BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux,* Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Mazarine, 3, Paris.

44683 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BROCARD, GOURSAT, G. KŒNIGS,
LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTE, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY
ET DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXXIV. — ANNÉE 1910.

(XLVe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55

1910

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

APPELL (PAUL). — TRAITÉ DE MÉCANIQUE RATIONNELLE. Deuxième édition, entièrement refondue. Tome III : *Équilibre et mouvement des milieux continus,* avec une Note de MM. E. et F. COSSERAT, *Sur l'action euclidienne.* In-8, VII-645 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

PRÉFACE.

Dans cette nouvelle édition, les parties classiques ont été peu modifiées. L'historique de la théorie de l'équilibre des corps flottants a été complété par quelques indications sur le Mémoire génial de Christian Huygens *De iss quæ liquido supernatant* (T. XI des Œuvres de Huygens et Notes de M. Korteweg). Le paragraphe relatif à l'étude des discontinuités dans les fluides a été rédigé d'une façon plus satisfaisante. La théorie de l'élasticité a été complétée par le théorème de réciprocité de Betti, puis par l'indication sommaire des recherches nouvelles les plus importantes de divers auteurs et en particulier des travaux de MM. E. et F. Cosserat sur le problème de Barré de Saint-Venant et la théorie des corps minces.

Mais ce qui fait l'intérêt de ce nouveau Volume, c'est la Note si remarquable *Sur la théorie de l'action euclidienne* que MM. E. et F. Cosserat ont bien voulu rédiger. Cette Note se trouve à sa place naturelle à la fin d'un Traité dans lequel la Mécanique est exposée, comme il est nécessaire pour une première étude, sous une forme expérimentale et inductive : elle a pour but de rattacher les différentes théories de la Mécanique à un concept général unique, dont elles découlent par voie déductive et qui constitue un instrument permettant de nouvelles découvertes.

On sait que deux grandeurs dominent la Mécanique moderne : l'*énergie* qui dépend de la différence T — U et l'*action* qui s'exprime à l'aide de la somme T + U. MM. E. et F. Cosserat se sont attachés à la notion d'action, dont l'importance résulte des théories d'Hamilton et d'Helmholtz ; ils ont réussi à faire faire à ces théories un nouveau et important progrès, en dégageant ce qui est fondamental dans le concept qu'elles contiennent et en établissant une *définition directe* de l'action, dont la forme peut être transportée dans tous les domaines de la Philosophie naturelle. Leur point de départ est cette remarque que l'*action*, telle que Maupertuis l'a introduite, est *invariante dans le groupe des déplacements euclidiens* : ce même caractère se retrouve dans la statistique des corps déformables, qui repose sur la considération du ds^2 de l'espace ; dans la Physique, la théorie des phénomènes dus à la gravitation, à la chaleur et à l'électricité dépend, comme l'ont montré les premiers Laplace, Fourier et Maxwell, de l'étude de paramètres différentiels, qui sont également des invariants dans le groupe des déplacements. M. H. Poincaré a écrit que la notion de groupe préexiste dans notre esprit au moins en puissance, et s'impose à nous, non comme forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement. Suivant cette idée philosophique, la Mécanique rationnelle et la Physique théorique doivent avoir un fondement analogue à celui de la Géométrie, et il est naturel de chercher à les construire sur la notion unique d'*action euclidienne*.

C'est ce que MM. E. et F. Cosserat ont fait dans leur Note, à l'égard des questions qui rentrent dans le cadre habituel de la Mécanique. Ils ont ouvert ainsi, à la critique des principes sur lesquels repose cette partie de la Science, dans sa forme classique,

une voie nouvelle dont l'intérêt est actuellement manifeste. En même temps, ils ont pu faire entrer d'une manière plus complète, dans le champ de la recherche rationnelle, les problèmes de la déformation des corps posés au siècle dernier par la grande école française de Physique mathématique.

Le lecteur verra avec quel succès ils ont réussi et comment leur méthode les conduit, par une voie régulière, aux divers problèmes de Statique et de Dynamique concernant la ligne déformable, la surface déformable, le milieu déformable, avec tous les cas particuliers considérés en Géométrie et en Mécanique.

Je suis heureux d'adresser ici tous mes remercîments à MM. E. et F. Cosserat, pour l'amabilité qu'ils ont eue de publier leur beau travail à la fin de mon *Traité de Mécanique*.

EISENHART (L.-P.). — A TREATISE ON THE DIFFERENTIAL GEOMETRY OF CURVES AND SURFACES. 1 volume in-8, XI-474 pages. Ginn and Company, Boston, New-York, Chicago, London.

Ce Livre est le développement des leçons qu'a données pendant plusieurs années l'auteur à l'Université de Princeton. La meilleure manière d'indiquer à nos lecteurs l'intérêt de cet Ouvrage excellent sera d'en analyser le contenu.

Le Chapitre I de l'Ouvrage, qui contient 52 pages, est consacré à la théorie des courbes gauches. Les méthodes sont celles qui sont appliquées d'ordinaire dans les Traités de calcul infinitésimal. Mais l'auteur a pensé que l'emploi du trièdre mobile et les considérations de Géométrie intrinsèque de Cesaro étaient de nature à développer le sens géométrique, et il leur a fait une place dans son exposition.

Le reste de l'Ouvrage est divisé en trois parties. La première, qui se compose des Chapitres II à VI, traite des coordonnées curvilignes sur une surface et des enveloppes, de l'élément linéaire d'une surface, de la représentation conforme et des paramètres différentiels, de la Géométrie d'une surface dans le voisinage d'un point, de la méthode de Gauss pour l'étude des surfaces combinée avec l'emploi du trièdre mobile, des différents systèmes de courbes

sur les surfaces et des lignes géodésiques. Nous y voyons apparaître tous les éléments essentiels de la théorie des surfaces, la méthode de Gauss, les deux formes quadratiques fondamentales, les symboles de Christoffel, etc.

Dans les Chapitres VII et VIII, ces théories générales sont appliquées à des surfaces particulières, aux quadriques, aux surfaces réglées, aux surfaces minima, aux surfaces à courbure totale constante, aux surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques.

Le problème général des surfaces applicables est discuté dans les Chapitres IX et X, ce dernier étant entièrement consacré à la méthode récente de Weingarten et à ses développements. Nous y remarquons en particulier un paragraphe sur les surfaces de M. Goursat.

Les quatre derniers Chapitres sont consacrés à la déformation infinitésimale, aux congruences de lignes droites et de cercles, aux systèmes triples de surfaces orthogonales. Le Chapitre VIII en particulier contient une étude des belles propriétés des systèmes cycliques, découvertes par Ribaucour. Celui sur les systèmes orthogonaux contient la démonstration du théorème de Dupin et de sa réciproque, la transformation de Combescure, les équations de Lamé, les systèmes triples de MM. Weingarten et Bianchi.

On voit que le Livre a été professé. Chaque Chapitre est accompagné d'exercices. L'auteur a donné bien des indications bibliographiques, mais il a cru pouvoir se dispenser de les rendre tout à fait complètes en renvoyant ses lecteurs à l'Encyclopédie mathématique.

On le voit, il ne s'agit ici ni d'un Ouvrage élémentaire, ni d'un Ouvrage tout à fait complet. L'essentiel est que M. Eisenhart n'ait rien oublié d'important, qu'il ait fait connaître les méthodes et qu'il ait éveillé l'esprit géométrique chez ses élèves ou ses lecteurs. Nous croyons que, sur tous ces points, il aura réussi.

J. G.

KIEPERT (L.). — Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. I. Teil : *Differential-Rechnung*. Elfte unveränderte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von weil. Dr Max Stegemann. In-8, XX-818 pages. Hannover, 1910, Helwingsche Verlagsbuchhandlung.

Nous avons rendu compte à différentes reprises des diverses éditions de l'excellent Ouvrage de M. Kiepert. La dixième édition, qui parut en 1905 et fut tirée à plus de 5000 exemplaires, est maintenant complètement épuisée. La nouvelle édition, n'en doutons pas, aura le même succès. Car l'éditeur n'a rien négligé de ce qui pouvait en faire un excellent livre de chevet et d'étude. Les Tables des formules les plus importantes du Calcul différentiel forment en particulier un fascicule séparé dont l'emploi sera des plus commodes. J. G.

APPELL (Paul). — Traité de Mécanique rationnelle. Troisième édition, entièrement refondue. Tome I : *Statique, dynamique du point*. In-8, X-615 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

Il nous suffira évidemment de signaler cette troisième édition de l'excellent et très complet *Traité de Mécanique* de M. Appell. La principale modification apportée par l'auteur concerne la théorie des vecteurs. Le mieux sera, évidemment, de reproduire tout ce qu'il en dit lui-même dans sa Préface :

« En dehors des améliorations de détail apportées à la rédaction et des indications bibliographiques nouvelles, nous avons présenté, dans le premier Chapitre, la théorie des vecteurs, sous une forme entièrement renouvelée, dont le point de départ est dans ce fait qu'on rencontre, dans les applications, trois catégories de vecteurs. La première catégorie comprend des vecteurs qui sont définis en grandeur, direction et sens, mais dont le point d'application peut être pris arbitrairement dans l'espace : tels sont les vecteurs qui représentent des axes de couples appliqués à un solide; nous appelons les vecteurs de cette catégorie *vecteurs non localisés* (*unlocalised*), suivant l'expression employée par M. Love dans sa *Theoretical mechanics*, ou encore *vecteurs libres*. Dans

la deuxième catégorie figurent des vecteurs définis en grandeur, direction et sens, pouvant glisser abitrairement sur la droite qui les porte : tels sont les vecteurs qui représentent des forces appliquées à un solide; nous les appelons *vecteurs localisés sur une droite* ou *vecteurs glissants*. Enfin, dans la troisième catégorie, figurent les vecteurs qui ont un point d'application déterminé, comme les vecteurs représentant les vitesses de points mobiles ou les forces d'un champ; ces vecteurs sont *localisés en un point* ou *liés à leur point d'application*. Nous avons, en outre, introduit la distinction, si importante en Physique, entre les vecteurs *axiaux* et les vecteurs *polaires*. »

LECHALAS (G.). — ÉTUDE SUR L'ESPACE ET LE TEMPS.
2[e] édition. 1 volume in-8, 327 pages. Paris, Alcan, 1909.

La première édition de cette *Étude* remonte à l'année 1895 ; depuis lors, de nombreux et importants travaux ont été publiés sur les fondements logiques de la Géométrie ; l'auteur a eu à cœur d'en tenir compte ; il ne faut pas s'étonner si la partie de son Livre qui se rapporte à la Géométrie a plus que doublé ; celle qui concerne la Mécanique a été modifiée moins profondément : M. Lechalas a emprunté à M. Duhem diverses indications d'ordre historique sur les repères auxquels on rapporte les mouvements observés ; il a aussi tiré parti de la communication de M. Painlevé à la Société française de Philosophie sur le rôle du principe de causalité dans le choix de ces repères. Il a discusé les objections de M. Poincaré contre le principe de tout essai de détermination de la Géométrie de notre univers. Enfin, à l'occasion de la critique de l'infini et du continu, il a introduit quelques considérations fondées sur la théorie des ensembles infinis de M. G. Cantor.

En achevant la lecture du Livre de M. Lechalas, je m'étais d'abord résolu à me borner aux indications qui précèdent et qui sont tirées de la préface. C'eût été sage : les gens incompétents qui se mêlent de discuter la doctrine d'un philosophe méritent

sans doute, comme le dit Bayle dans un passage qu'a cité l'auteur, d'être « abandonnés ou à leur stupidité, ou à leur mauvaise foi, ou à la force insurmontable de leurs préjugés », et, s'ils se rendent compte de leur incompétence, ils craignent naturellement d'être traités comme ils le méritent. C'est toutefois M. Lechalas lui-même qui m'a rassuré : il disserte en effet, sans trop d'hésitation, sur la façon dont Dieu connaît les choses ; il ne manquera pas de pardonner à un profane qui se permet de dire quelques mots d'un Chapitre de son Livre, ou plutôt d'un paragraphe de ce Chapitre, qui, dans la Table, est intitulé *Démonstration de la loi du nombre*.

En vertu de cette loi du nombre, à propos de laquelle on a mené grand bruit, il n'y a pas de collections infinies. Renouvier, M. Pillon, M. Evellin, M. Lechalas lui-même ont été ou sont parmi les tenants de cette doctrine. Qu'un philosophe l'admette et la préconise, qu'il s'efforce d'y soumettre sa théorie de l'univers, qu'il s'amuse à en déduire les conséquences logiques ; qu'il trouve parmi ces conséquences, sans qu'aucune le fasse reculer, l'impossibilité d'un espace ou d'un temps infinis, l'impossibilité de la continuité de l'un et de l'autre et du mouvement, je ne veux pas m'en émouvoir ; les métaphysiciens ont trop de plaisir à étonner les gens pour que ceux qui les écoutent ou qui les lisent n'aient pas le droit de se cuirasser contre tout étonnement ; mais qu'il fût possible de donner une *démonstration* de cette loi du nombre, voilà qui m'émerveillait beaucoup. Je ne puis cacher ma déception. La démonstration de M. Lechalas ne convaincra, j'en ai bien peur, que ceux qui croient d'avance à *ce qu'il fallait démontrer*. Elle consiste à supposer réalisés deux ensembles infinis de disques ; sur les disques du premier ensemble sont inscrits les numéros 1, 2, 3, ... et sur les disques de l'autre les numéros 2, 4, 6, ... ; chaque disque du second ensemble est relié par une ficelle rouge au disque de même rang dans le premier ensemble et par une ficelle bleue au disque de ce premier ensemble qui porte le même numéro que lui. « Or, en quelque région de l'ensemble des deux séries que nous nous placions, toujours un élément de la seconde série sera le point de départ d'une ficelle bleue et d'une ficelle rouge, mais les secondes extrémités de ces ficelles présenteront une singularité : tandis que les ficelles rouges aboutiront à tous les

disques de la première série, les ficelles bleues n'aboutiront qu'à un disque sur deux. » C'est tout.

Comment un homme aussi subtil et aussi averti que M. Lechalas peut-il voir, dans la singularité qu'il trouve à son assemblage de disques, de ficelles bleues et rouges, une démonstration *per absurdum* de la *loi du nombre*? Il parle un peu plus loin du *tapage insignifiant de notre sensibilité*; mais ne s'est-il pas laissé étourdir par ce tapage, et la *singularité* qu'il signale est-elle autre chose? Nous sommes impuissants à imaginer l'infini, c'est entendu; mais cette impuissance n'empêche pas la justesse de nos raisonnements quand nous prenons les précautions qu'il faut. Chacun de ceux qui étudient les Mathématiques est gêné de temps en temps par des raisonnements sur l'infini qui ne s'accordent pas avec ses intuitions habituelles. Je croirais volontiers que les uns et les autres ne sont pas choqués de la même façon par les mêmes faits mathématiques : voilà un beau sujet d'enquête. Les ficelles bleues et rouges, qui choquent tant M. Lechalas, ne me gênent en aucune façon ; mais je suis très scandalisé par ces points d'abscisses rationnelles qui sont aussi rapprochés qu'on veut de n'importe quel point de l'intervalle (0, 1) et qu'on peut entourer chacun d'un petit segment, sans que l'ensemble de tous ces segments recouvre l'intervalle. J'ai rencontré des gens qui ne partageaient pas du tout mon ahurissement. Peu importe, je suis très convaincu de la légitimité du raisonnement. Un bon raisonnement, bien juste, s'impose; l'intuition garde quelque chose d'individuel et de subjectif.

Au reste, M. Lechalas ne rejette pas tous les raisonnements sur l'infini : il admet et reproduit bon nombre de ceux que M. Cantor a introduits dans la Science; il raisonne comme un autre sur l'infini, mais il ne veut pas du tout que l'infini soit réalisé. S'il y a dans la notion de l'infini une contradiction interne, cette contradiction ôte toute valeur à tout raisonnement où intervient la notion de l'infini. Ce n'est pas, semble-t-il, dans l'idée même de l'infini, mais dans la réalisation de cette idée que M. Lechalas voit une contradiction ; il y a là une conception du réel qui m'échappe. Pourquoi ce qui n'est pas contradictoire ne pourrait-il être réalisé?

C'est l'expérience qui atteint le réel, non le raisonnement déductif; celui-ci nous apprend que telle conséquence résulte de telle

hypothèse, que cette hypothèse-ci est contradictoire avec celle-là; en outre, il nous permet de mettre de l'ordre dans nos connaissances expérimentales et dans les inductions dont elles sont le point de départ; mais il ne peut, à lui seul, créer ou anéantir rien qui existe. L'essai de démonstration que donne M. Lechalas n'est, à ce qu'il me semble, qu'une image vague; mais un raisonnement qui prétendrait aboutir à la même conclusion, sans faire éclater quelque contradiction dans la notion de collection infinie, me causerait plus de défiance encore que la *preuve ontologique*. Ni l'expérience, ni le raisonnement, n'apporteront aucune réponse à cette question : l'infini est-il réalisé dans le monde extérieur? La réponse est affaire d'opinion ou de croyance. Mais ceux qui, comme M. Lechalas (si je ne me trompe), sont bien assurés que nous ne connaîtrons jamais que nos propres états de conscience, doivent-ils se mettre beaucoup en peine de cette réponse, et comment jugent-ils qu'une de nos idées, si elle n'est pas contradictoire avec elle-même, peut être contradictoire avec l'existence, et sur quoi donc s'appuie la distinction qu'ils font entre l'idéal et le réel?

J. T.

FABRY (E.). — Problèmes et exercices de Mathématiques générales. 1 volume in-8, 420 pages. Paris, Hermann et fils, 1910.

AUBERT (P.) et PAPELIER (G.). — Exercices d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonométrie a l'usage des élèves de Mathématiques spéciales. 2 volumes in-8, 362 et 359 pages. Paris, Vuibert et Nony, 1908 et 1910.

Le Recueil de Problèmes de M. Fabry est le complément indispensable de ce Traité de Mathématiques générales du même auteur, dont le *Bulletin* a rendu compte au moment où il a paru [1]. Les étudiants qui suivent un cours de Mathématiques générales sans faire d'exercices perdent leur temps, si même ils croient comprendre les matières qu'on leur enseigne; lors même que, par impossible, ils auraient vraiment compris ces matières, le but cependant n'est pas atteint, puisque ces matières sont enseignées essentiellement en vue des applications. Le Recueil de M. Fabry, qui contient 739 exercices, sera d'autant mieux accueilli des étu-

---

[1] *Bulletin*, t. XXXII, 1908, p. 233.

diants et des professeurs, que ces exercices portent réellement sur toutes les parties du cours de Mathématiques générales (Algèbre, Géométrie analytique, Analyse et Mécanique).

Tous les exercices, choisis avec grand soin, sont d'ailleurs brièvement résolus. Beaucoup sont nouveaux; plusieurs ont été donnés aux examens.

Si le Recueil de M. Fabry a été composé pour les étudiants des Universités, il n'en sera pas moins utile aux élèves de la classe de Mathématiques spéciales. C'est à ces derniers élèves que sont destinés les deux Volumes de MM. Aubert et Papelier dont chacun contient plus de 700 exercices, les uns résolus et les autres non.

Ces exercices, à la vérité, ne portent que sur une partie du cours, mais sur la partie où les recueils sont plus rares et où la tradition est moins établie; ils m'ont paru d'ailleurs fort intéressants.

J. T.

FOUËT (E.-A.). — LEÇONS ÉLÉMENTAIRES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES. 2e édition. Tome II : *Les fonctions algébriques, les séries simples et multiples, les intégrales.* 1 volume in-8, XI-265 pages. Paris, Gauthier-Villars. 1910.

L'auteur de ces Leçons ne s'est pas endormi sur le succès mérité qu'elles ont obtenu; dans cette nouvelle édition, et dans le second Volume comme dans le premier, il a voulu conserver à son Livre le mérite d'être *au courant* qu'il avait su lui donner tout d'abord; ce mérite n'était pas le seul, et les étudiants n'ont pas manqué d'être attirés par les nombreux renseignements historiques ou bibliographiques et par les vues d'ensemble qu'ils rencontraient dans l'Ouvrage de M. Fouët.

Tout en gardant son caractère primitif, cet Ouvrage a été profondément remanié; parmi les additions les plus importantes, l'auteur signale les démonstrations de la formule de Green et du théorème de Cauchy complété par M. Goursat, qui sont dues à M. Porter et à M. Pringsheim, les extensions récentes du théorème de Weierstrass sur les séries à éléments analytiques, les recherches de MM. Faber et Hartogs concernant les séries entières à plusieurs variables.

J. T.

A. ANTHIAUME ET J. SOTTAS. — L'ASTROLABE-QUADRANT DU MUSÉE DES ANTIQUITÉS DE ROUEN. — RECHERCHES SUR LES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET NAUTIQUES AU MOYEN AGE. 1 volume in-8, 162 pages et 8 planches. Paris, G. Thomas, 1910.

L'histoire des Arts serait inintelligible sans les monuments d'architecture et de sculpture que nous ont laissés les générations des temps passés ; celle de la philosophie, au contraire, repose exclusivement sur les textes. C'est encore par les textes principalement qu'on suit l'histoire du progrès scientifique ; mais les théories scientifiques et les démonstrations mathématiques aboutissent à des applications pratiques, elles suscitent l'invention d'instruments ingénieux dont le mécanisme concret projette parfois une clarté prodigieuse sur l'abstraite théorie.

Les édifices et les statues de l'antiquité suffisent à nous faire connaître l'art assyrien, l'art égyptien ou l'art grec, alors que la reconstitution d'une simple trirème est pour nous un problème insoluble, faute de document figuré explicite. Dans un ordre d'idées plus spécial, combien serait précieuse pour nous la possession de quelques-uns des instruments inventés par les astronomes de l'École d'Alexandrie !

Sans remonter à une antiquité aussi reculée, on trouve, dans nombre de musées des capitales et de villes principales de l'Europe, des instruments anciens d'Astronomie ou de Mathématiques dont l'étude attentive pourrait permettre plus d'une fois d'élucider des questions restées obscures ou incertaines dans l'histoire des Sciences.

C'est ainsi que les recherches de J.-J. et L.-A. Sédillot sur les *instruments astronomiques des Arabes* sont fondées à la fois sur l'étude des textes et sur l'examen d'instruments anciens qui sont parvenus jusqu'à nous.

Parmi ces instruments les plus fréquemment décrits sont des astrolabes, particulièrement l'astrolabe circulaire ou *astrolabe plan équinoxial*, et l'on possède des spécimens orientaux qui remontent au xe siècle.

Les modèles d'astrolabes européens que l'on connaît sont bien

plus modernes ; l'astrolabe de Regiomontanus, cité comme un des plus anciens, est daté de l'année 1468.

Le *quadrant astronomique*, qui est une sorte d'astrolabe, est représenté par un certain nombre de modèles arabes décrits ; mais le type latin de cet instrument, partiellement exposé par les auteurs de la Renaissance, est peu connu. Les spécimens du type complet de cet instrument qui ont pu subsister sont probablement fort rares, car il n'en existe aucune description moderne.

Le *Musée de Rouen* possède ce type complet ; c'est un *astrolabe-quadrant* qu'on suppose avoir appartenu au célèbre navigateur normand Jean de Béthencourt. L'instrument est remarquable par son antiquité, par la multiplicité des tracés et des notations qu'il porte et par la rareté du modèle qu'il représente.

L'importance de ce document est encore rehaussée par l'existence de textes anciens et inédits qui s'appliquent exactement à l'instrument du Musée de Rouen. Les auteurs du présent Mémoire ont particulièrement examiné trois manuscrits qui sont des transcriptions d'une composition datant de la fin du XIII[e] siècle. Deux de ces manuscrits ont été signalés par Renan ; le troisième a passé inaperçu jusqu'ici.

En fait, l'astrolabe-quadrant du Musée de Rouen est un spécimen original et presque contemporain du *quadrans novus* composé en 1290 par le rabbin don Profat Tibbon (*Profatius*) de Montpellier ou de Marseille, principalement sur des données scientifiques des Arabes.

L'instrument a la forme d'un quart de cercle plein en cuivre dont les deux faces sont couvertes de tracés (*Pl. I, II, III*).

Pour la commodité de la description, les auteurs ont divisé leur étude en deux Livres répondant aux deux faces considérées séparément. Le Livre III est consacré à l'examen de l'origine et de l'ancienneté de l'instrument.

LIVRE I. — La face circulaire de l'astrolabe de Rouen (p. 11).

Une des faces, qui est le dos du quadrant, porte des tracés circulaires qui rappellent ceux du dos de l'astrolabe circulaire. Le premier Livre, consacré à l'étude de cette face, contient un premier Chapitre d'historique sur l'astrolabe circulaire et sur l'astrolabe nautique.

Chapitre I. — *Notions historiques sur l'astrolabe circulaire et sur l'astrolabe nautique.*

La constitution de l'astrolabe circulaire, qui est bien connue, est brièvement rappelée, ainsi que la théorie du planisphère qui est la base de l'astrolabe plan équinoxial.

La transmission de cette forme d'instrument depuis les Grecs jusqu'aux Latins modernes, en passant par les Arabes, est exposée en quelques pages.

En raison de la destination apparente de certains tracés de l'instrument de Rouen, et à cause du nom de Béthencourt qui s'y trouve attaché, la question de l'application nautique de l'astrolabe a été traitée, et l'on a donné une figure inédite de l'astrolabe nautique conservé au Musée de Caudebec-en-Caux (*Pl. V*).

Chapitre II. — *Description de la face circulcire de l'astrolabe de Rouen* (p. 23).

Ce Chapitre comprend la description et l'interprétation des différentes parties de la face circulaire avec les particularités spéciales à l'instrument.

Première partie. — Tracés du plateau de la face circulaire (*Pl. I*).

I. Un premier système comprend trois tableaux circulaires :

1° *Le zodiaque solaire*, formé par l'écliptique avec les noms des signes du zodiaque.

2° *Le cercle des jours de l'année*, qui permet de trouver la longitude du Soleil pour tous les jours des années communes et de l'année bissextile.

3° *Le zodiaque lunaire* (p. 28, *Pl. I et IV*) figuré sur l'astrolabe de Rouen est particulièrement intéressant. Il reproduit le zodiaque lunaire des Arabes tel qu'il fut institué au VIIIe siècle. Il est signalé par les caractéristiques astronomiques de cette époque, la longitude de la déterminatrice de la première mansion étant 16°30′. Les mansions sont désignées par leurs noms arabes et illustrées par la représentation schématique des astérismes. En raison de l'importance de ce document figuré, les auteurs

insistent assez longuement sur l'origine et la signification des mansions lunaires : ils démontrent que, malgré son nom, cette institution est essentiellement solaire. Elle sert de mesure pour l'année solaire et s'accorde avec la périodicité des variations météorologiques des saisons.

La signification astrologique de cette institution est signalée brièvement.

II. *La Table pascale* (p. 47, *Pl. I*). — Sur la même face existe une Table perpétuelle qui permet de retrouver la date de la fête de Pâques dans les années du Calendrier Julien.

Les particularités du cycle lunaire et du nombre d'or, du cycle solaire et des lettres dominicales qui s'appliquent à cette Table ont été relevées.

Par cet exposé concis et précis, qui résume la substance de volumineux Traités de Diplomatique, le mécanisme de la Table pascale de l'astrolabe est complètement élucidé et l'usage pratique est défini en quelques lignes. Cette Table pascale perpétuelle est la plus complète qui ait été signalée sur un instrument ancien ; il importait d'en donner une explication détaillée.

SECONDE PARTIE. — LE COMPAS LUNAIRE (p. 57, *Pl. II*).

Au centre du dos de l'astrolabe-quadrant est un appareil formé par deux disques mobiles pourvus d'alidades. Les auteurs ont donné à tout l'appareil le nom de *compas lunaire*, puis aux alidades les noms significatifs d'*alidade solaire* ou *méridienne*, *alidade lunaire* ou *d'élongation*. L'ensemble sert à mesurer le mouvement diurne de la Lune et celui des *marées*, questions qui se rattachent à la navigation côtière.

Le mécanisme de l'appareil est démontré par plusieurs exemples d'application pratique : c'est le premier indice de la destination nautique de l'instrument.

LIVRE II. — Le quadrant de l'astrolabe de Rouen (p. 69).

La description de l'autre face de l'instrument, ou face quadrant, est précédée d'un Chapitre historique.

Chapitre I. — *Notions historiques sur le quadrant astronomique et sur le quadrant nautique.*

Ce Chapitre précise plusieurs points peu ou pas connus. L'histoire du développement des différentes formes du quadrant astronomique et de la transmission de cet instrument des Arabes aux Latins est exposée dans les premières pages du Chapitre. Puis les auteurs s'arrêtent spécialement au *quadrans novus* composé en 1290 par *Profatius* (p. 75 et suiv.). Les trois manuscrits de la Bibliothèque Nationale, qui se rapportent à cette composition, sont analysés, et l'on montre qu'ils s'appliquent exactement à l'instrument du Musée de Rouen.

L'attention est retenue par un tracé trigonométrique emprunté aux Arabes et reproduit sur le quadrant de Rouen, alors que des mathématiciens de la Renaissance, P. Apian et Oronce Finé, se donnent comme les inventeurs de cette application (p. 83 et suiv.).

L'histoire de l'emploi du quadrant dans la navigation a été développée (p. 86 et suiv.). On démontre comment le tracé trigonométrique s'adapte à la lecture des Cartes plates marines du moyen âge (p. 88) en fournissant la valeur des composantes rectangulaires Nord-Sud et Est-Ouest de toute route oblique parcourue en haute mer.

La réalité de cette application est établie sur un document très explicite : la Table de la Carte marine (*ltoleta de marteloïo*) reproduite dans l'Atlas du géographe vénitien André Bianco (1436). Les valeurs données par Bianco pour les composantes rectangulaires des routes obliques sont précisément les sinus et les cosinus des arcs de rumbs de vent.

Le même tracé trigonométrique fournit encore le moyen de réduire à l'équateur les milles parcourus sur un parallèle donné et par conséquent de connaître le déplacement en longitude.

Ce dernier usage du quadrant ne semble pas être antérieur au XVI[e] siècle. Il est développé dans un manuscrit français, traduction d'une œuvre du cosmographe portugais Pedro Nunez (p. 93).

Chapitre II. — *Description du quadrant de l'astrolabe de Rouen* (p. 95).

Les différents tracés de la face quadrant sont analysés dans une suite de paragraphes avec des exemples d'application et des figures explicatives.

I. *Le quadrant d'altitude* (p. 95). — C'est le quart de cercle de hauteur qui donne, par la position du fil à plomb sur le limbe de l'instrument, la hauteur angulaire des astres ou de tout autre point sur le plan horizontal.

II. *Le tracé des heures inégales* (p. 96 et *fig.* 2, p. 98). — Après une définition des heures inégales, on explique comment le quadrant permet de les trouver ainsi que les heures égales.

III. *Le carré des ombres* (p. 100 et *fig.* 3, p. 101). — Le sens de ce tracé, emprunté à l'astrolabe circulaire, est élucidé, puis les relations mathématiques de ses différentes parties sont démontrées. Ces explications font comprendre pourquoi les Arabes appelaient la *tangente* d'un arc l'*ombre verse*, la *cotangente* l'*ombre droite*, et la *sécante* le *diamètre de l'ombre*.

Ce tracé permet de mesurer la hauteur des édifices et lieux élevés, d'où son nom d'*échelle altimètre*. Il trouve son emploi dans les travaux d'arpentage et de géodésie.

IV. *Le planisphère* (p. 106 et *Pl. VII*). — La projection stéréographique de la sphère ou planisphère de l'astrolabe plan équinoxial est représentée sur l'instrument de Rouen, mais avec une disposition particulière.

Les quatre quadrants du cercle sont repliés sur le quadrant matériel. De plus, sur ce même plan fixe, sont réunis les éléments de l'araignée mobile et les éléments des tableaux fixes de latitude de l'astrolabe circulaire.

Bien que le mécanisme de l'astrolabe se trouve ainsi supprimé, les usages de ce dernier instrument peuvent être, pour la plupart, répétés par le quadrant. Un fil fixé au centre de projection et muni de deux index mobiles reproduit les fonctions de l'araignée de l'astrolabe.

Les éléments de la projection sont analysés successivement. Les positions d'étoiles ont été mesurées et comparées aux positions actuelles (Tableau, p. 110).

Les lignes d'horizon oblique projetées correspondent à une zone comprise entre 36° et 52°, c'est-à-dire à la zone des pays latins.

On a donné (p. 144 et suiv.) des exemples d'application du planisphère à des mesures astronomiques : heure du lever et du cou-

cher du Soleil, passage au méridien, mesure de l'arc diurne, de la différence ascensionnelle, ascension droite et déclinaison des astres, etc.

V. *Le tracé trigonométrique* (p. 119 et *fig.* 7, p. 123). — Le tracé trigonométrique est la partie la plus intéressante de l'instrument.

Les éléments de ce tracé sont le limbe du quadrant qui représente le quart ou le demi-cercle, une échelle double portant la division du rayon en 60 parties et du diamètre en 120 parties égales, et deux demi-cercles donnant les sinus par le moyen du fil muni d'index mobiles.

Les fonctions circulaires considérées par les anciens : le *sinus droit* et le *sinus verse*, sont définies et comparées aux conceptions trigonométriques modernes (p. 120), puis le mécanisme du tracé est démontré géométriquement (p. 123).

Les auteurs développent, en suivant le texte même des manuscrits du moyen âge, l'application du tracé à la solution de *problèmes astronomiques*, notamment à la recherche de l'heure vraie par la hauteur d'un astre. Ce problème, capital dans la science nautique, a subi une série de modifications, et l'exemple choisi en représente une des formes primitives.

Certaines relations mathématiques utilisées par les Latins sont rapprochées d'analogies évoquées par L.-A. Sédillot, d'après les Arabes, et démontrées géométriquement (p. 128).

L'adaptation du tracé trigonométrique à la solution des *problèmes de route en haute mer* a été longuement traitée. Les deux lemmes fondamentaux dont procèdent les problèmes de la *navigation hauturière établie sur l'estime* du chemin parcouru reçoivent, par le tracé du quadrant, une démonstration complète.

L'application du quadrant à ces deux lemmes fait connaître :

1° Le déplacement dans le Nord et Sud et dans l'Est et Ouest pour une longueur de chemin parcourue suivant une aire de vent indiquée par la boussole ;

2° Le déplacement en longitude pour une longueur de chemin parcourue suivant un parallèle moyen.

Le Chapitre se termine par un rapprochement établi entre le tracé du quadrant, le treillis de la face à sinus du *quadrant des-*

tour des Arabes, le canevas rectangulaire de la *Carte plate marine* du moyen âge et le *quartier nautique de réduction* dont le tracé de l'instrument de Rouen peut être considéré comme l'ébauche.

L'instrument, rassemblant dans un petit espace le résumé de la Trigonométrie, de la Mécanique céleste et de la *Connaissance des Temps*, devient ainsi le *vade mecum* de l'astronome et du navigateur.

LIVRE III. — Origine et antiquité de l'astrolabe-quadrant du Musée de Rouen.

Il importait d'assigner une date à la construction de l'instrument.

Les caractéristiques astronomiques ont été étudiées minutieusement. D'après les principales, la position de l'équinoxe de printemps au commencement du 13e jour de mars et les coordonnées des étoiles, l'instrument se rapporte à la fin du XIIIe siècle, qui est précisément l'époque de la composition du *quadrans novus*.

Les caractères épigraphiques et artistiques sont ceux du XIVe siècle.

La gaine qui contient l'instrument porte des figures (*Pl. II*) qui reproduisent le motif principal des armoiries de la ville de Rouen. Ces figures ont été copiées sur le denier d'or à l'aignel frappé en 1310, sous le règne de Philippe IV. L'instrument, fabriqué dans la première moitié du XIVe siècle, a pu, sans anachronisme choquant, conserver les caractéristiques astronomiques du *quadrans novus* de la fin du XIIIe siècle.

La prédominance des armes de la ville de Rouen révèle un possesseur normand, et l'instrument a pu être utilisé par J. de Béthencourt ou par quelque autre navigateur normand de son époque.

Ce document peut être considéré comme un des rares vestiges des navigations normandes entre le XIVe et le XVe siècle.

Le présent Mémoire repose sur l'étude d'un modèle original ancien et de manuscrits contemporains de l'instrument. Il a quelque analogie avec les travaux de J.-J. et L.-A. Sédillot, qui ont étudié les instruments astronomiques des Arabes particulièrement au XIIIe siècle.

En décrivant un instrument astronomique composé à la même époque dans l'Europe latine, les auteurs ont établi une preuve nouvelle de la transmission de la Science arabe à l'Occident.

L'analyse des tracés du quadrant, éclairée par des exemples d'application, révèle chez les savants du moyen âge des connaissances mathématiques et nautiques qui rendent plus intelligible la constitution des Cartes marines de cette époque.

Certaines données mathématiques, comme les relations des fonctions circulaires trigonométriques que, sur la foi des mathématiciens célèbres de la Renaissance, on pourrait considérer comme ayant été éditées pour la première fois dans l'Europe latine vers la fin du XVe siècle, étaient au contraire parfaitement connues des docteurs du moyen âge, qui savaient en tirer parti.

J. C.

MÉLANGES.

SUR LES ÉQUATIONS DU CINQUIÈME DEGRÉ RÉSOLUBLES ALGÉBRIQUEMENT, QUAND LE PRODUIT DES RACINES RESTE ARBITRAIRE;

PAR M. DEMETRIUS GRAVÉ,
Professeur à l'Université de Kieff (Russie).

1. Proposons-nous de trouver toutes les équations de la forme

$$x^5 + 10px^3 + 10qx^2 + 5rx + s = 0, \tag{1}$$

où p, q, r sont des nombres rationnels, le nombre s restant arbitraire.

Cela revient à trouver les nombres p, q, r de telle manière que l'équation résolvante du sixième degré ait une racine rationnellement exprimée en quantité s.

2. Cayley a calculé, dans un Mémoire intitulé : *On a new auxi-*

tiary equation in the theorie of equations of the fifth order (¹), les coefficients de l'équation résolvante.

On a

$$(2)\qquad (\varphi^3 + A\varphi^2 + B\varphi + C)^2 = 3\,200\,000\,\Delta\varphi,$$

où

$$A = -\quad 100(r + 3p^2),$$
$$B = \quad 2000(-2qs + 3r^2 - 2p^2r + 8pq^2 + 15p^4),$$
$$C = \quad 40\,000(ps^2 - 2qrs + r^3 - 2p^2qs - 11p^2r^2 + 28pq^2r - 16q^4 + 35p^4r - 40p^3q^2 - 25p^6),$$

Δ désignant le discriminant, c'est-à-dire

$$(3)\qquad \Delta = s^4 + Ls^3 + Ms^2 + Ns + R,$$

où

$$L = -120pq,$$
$$M = \quad 160pr^2 + 360q^2r - 1440p^3r + 2640p^2q^2 + 3456p^5,$$
$$N = -640qr^3 + 1480p^2qr^2 - 10\,080pq^3r + 3456q^5 - 11\,520p^4qr + 5120p^3q^3,$$
$$R = \quad 256r^5 - 2560p^2r^4 + 5760pq^2r^3 - 2160q^4r^2 + 6400p^4r^3 - 3200p^3q^2r^2.$$

3. Posons

$$\varphi = \frac{P}{Q},$$

où P et Q sont des fonctions entières de s avec des coefficients rationnels. En substituant dans l'équation (2), nous aurons

$$(4)\qquad (P^3 + AP^2Q + BPQ^2 + CQ^3)^2 = 3\,200\,000\,\Delta PQ^5.$$

En substituant dans l'identité (4) pour s une racine ξ du polynome Q, on aura

$$P = 0.$$

Nous voyons que toutes les racines du dénominateur Q annulent aussi le numérateur P, d'où l'on a que le polynome Q doit diviser le polynome P et la fonction φ rationnelle en s doit être entière. Nous avons ainsi

$$Q = 1, \qquad \varphi = P.$$

(¹) Cayley, *The collected mathematical papers*, t. IV, p. 309.

Il est aisé de voir que la fonction entière φ doit être de degré nul; en d'autres termes, cette fonction doit se réduire à un nombre constant commensurable. En effet, supposons le contraire, c'est-à-dire qu'on ait

$$\varphi = P = as^n + \ldots \qquad \text{où} \qquad n > 1.$$

Notre identité est la suivante :

$$(P^3 + AP^2 + BP + C)^2 = 3\,200\,000\,AP. \tag{5}$$

Les membres

$$P^3, \quad AP^2, \quad BP, \quad C$$

sont de degré

$$3n, \quad 2n, \quad n+1, \quad 2,$$

par rapport à s. Nous voyons que la première partie de l'équation (5) est de la forme

$$a^6 s^{6n} + b s^{6n-1} + \ldots.$$

La seconde partie a la forme

$$3\,200\,000\,as^{n+4} + \ldots,$$

et, comme

$$6n > n + 4,$$

on a

$$a = 0,$$

ce qui prouve que la fonction φ doit se réduire à une constante.

4. Notre problème est devenu plus facile. Il ne reste qu'à satisfaire à l'identité (2) en s d'une façon la plus générale par quatre nombres commensurables p, q, r, φ.

5. En égalant les coefficients de s^4 dans les deux parties de (2), nous obtenons

$$\varphi = 500\,p^2. \tag{6}$$

Il faut examiner d'abord la première hypothèse $p = 0$.

On aura

$$\varphi = 0, \qquad 2qrs - r^3 + 16q^4 = 0,$$

d'où

$$qr = 0, \qquad -r^3 + 16q^4 = 0,$$

$$q = 0, \qquad r = 0.$$

Nous obtenons, comme la première solution de notre problème, l'équation binome

$$x^5 + s = 0.$$

6. Revenons au cas général de p différent de zéro. Il faut substituer $\varphi = 500p^2$ dans l'équation (2). On obtient

$$(ps^2 - A_1 s - B_1)^2 = \Delta p^2,$$

où

$$A_1 = -50p^2q - 2qr,$$

$$B_1 = 1600p^6 - 640p^4r - 160p^3q^2 + 64p^2r^2 + 28pq^2r - r^3 - 16q^4.$$

En égalant les coefficients de s^3, on obtient

$$pq(r - 4p^2) = 0.$$

Nous avons à considérer les deux hypothèses

$$q = 0, \qquad r - 4p^2 = 0.$$

7. Considérons d'abord la première hypothèse $q = 0$.

On a

(7) $$(ps^2 - 1600p^6 + 640p^4r - 64p^2r^2 + r^3)^2 = \Delta p^2,$$

où

$$\Delta = s^4 + s^2(160pr^2 - 1440p^3r + 3456p^5) + 256r^3(r - 5p^2)^2.$$

8. En égalant les coefficients de s^2, nous obtenons

$$r^3 - 16p^2r^2 + 80p^4r - 128p^6 = 0.$$

En posant $r = \alpha p^2$, on obtient

$$\alpha^3 - 16\alpha^2 + 80\alpha - 128 = 0$$

ou

$$(\alpha - 4)^2(\alpha - 8) = 0;$$

on a

$$\alpha = 4, \qquad \alpha = 8.$$

9. En égalant dans l'identité (7) les membres indépendants de s, on a

$$(1600p^6 - 640p^4 + 64p^2r^2 + r^3)^2 = 256r^3p^2(r - 5p^2)^2.$$

En posant $r = \alpha p^2$, on reçoit

$$(8) \qquad (\alpha^3 + 64\alpha^2 - 640\alpha + 1600)^2 = 2^8\alpha^3(\alpha - 5)^2;$$

α étant un nombre entier, il doit être un carré parfait.

Il ne nous reste que la supposition $\alpha = 4$. Et, en effet, l'équation (8) est satisfaite en posant $\alpha = 4$.

Nous sommes arrivés à la seconde solution de notre problème, c'est-à-dire à l'équation

$$(9) \qquad x^5 + 10px^3 + 20p^2x - s = 0,$$

où p est un nombre commensurable arbitraire.

10. Il ne nous reste qu'à considérer la dernière hypothèse, $r = 4p^2$, le nombre q étant différent de zéro. En effet, en substituant $r = 4p^2$, nous aurons

$$A_1 = -60p^2q,$$

$$B_1 = 128p^6 + 272p^3q^2 - 16q^4.$$

Le coefficient M du discriminant (3) sera

$$M = 256p^5 + 4080p^2q^2.$$

Alors, en égalant les coefficients de s^2, on obtient

$$2pB_1 - A_1^2 = p^2M$$

ou

$$256p^7 - 4144p^4q^2 - 32pq^4 = 256p^7 + 4080p^4q^2,$$

d'où

$$2p^4q^2 - pq^4 = 0;$$

enfin

$$q^2 = 2p^3.$$

Mais on a

$$q = p\sqrt{2p};$$

$2p$ doit être un carré parfait d'un nombre rationnel ρ, c'est-à-dire

$$2p = \rho^2,$$

et nous aurons

$$p = \frac{\rho^2}{2}, \qquad q = \frac{\rho^3}{2}, \qquad r = \rho^4.$$

En substituant les dernières valeurs dans l'équation

$$(ps^2 + A_1s + B_1)^2 = \Delta p^2,$$

on parvient à une contradiction, c'est-à-dire qu'on parvient à une équation du premier degré par rapport à s qui n'est pas une identité.

L'hypothèse $r = 4p^2$ ne donne pas de solutions de notre problème. Mais, quoique nous n'obtenions aucune classe d'équations avec s arbitraire, nous obtenons l'équation résoluble algébriquement avec le coefficient s rationnel et égal à

$$s = -\frac{35}{2}\rho^5.$$

En n'ôtant de l'équation aucunement sa généralité, nous pouvons poser $\rho = 1$.

Ainsi nous voyons que notre analyse nous a amené à l'équation

$$x^5 + 5(x^3 + x^2 + x) - \frac{35}{2} = 0,$$

résoluble algébriquement.

11. Il est aisé de voir que l'équation (9) n'est autre chose que l'équation de la division de l'arc du cercle. En effet, en posant $x = \alpha y$, on obtient

$$y^5 + \frac{10p}{\alpha^2}y^3 + \frac{20p^2}{\alpha^4} + \frac{s}{\alpha^5} = 0;$$

posons encore

$$\frac{10p}{\alpha^2} = -\frac{5}{4},$$

on aura

$$\alpha = \sqrt{-8p}, \qquad \frac{20p^2}{\alpha^4} = \frac{5}{16}.$$

En posant

$$\frac{\sigma}{16} = \frac{-s}{(-8p)^{\frac{5}{2}}},$$

on obtient définitivement

$$(10) \qquad y^5 - \frac{5}{4}y^3 + \frac{5}{16}y = \frac{\sigma}{16}$$

ou

$$\cos(5 \operatorname{arc} \cos y) = \sigma,$$

$$\sin(5 \operatorname{arc} \sin y) = \sqrt{1 - \sigma^2},$$

$$e^{i\,5 \operatorname{arc} \cos y} = \sigma + i\sqrt{1 - \sigma^2},$$

$$y + i\sqrt{1 - y^2} = e^{i \operatorname{arc} \cos y} = \sqrt[5]{\sigma + i\sqrt{1 - \sigma^2}}.$$

d'où

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{\sigma - i\sqrt{1-\sigma^2}} + \sqrt[5]{\sigma - i\sqrt{1-\sigma^2}}\right).$$

12. On peut considérer l'équation (10) comme le cas particulier de (9) quand

$$p = -\frac{1}{8}, \qquad \varphi = \frac{5^3}{2^4}.$$

DÉMONSTRATION ANALYTIQUE D'UNE FORMULE DE LIOUVILLE;

PAR M. G. HUMBERT.

Dans une de ses lettres à Liouville (t. XXXIII, p. 58 du *Bulletin*), Dirichlet établit, par voie arithmétique directe, une importante formule que Liouville venait de publier sans démonstration.

On peut arriver à cette formule par une méthode toute différente, en partant de deux développements elliptiques bien connus.

Je poserai, comme je l'ai fait dans d'autres recherches,

$$\mathrm{H}(x) = 2\sum_{m=0}^{\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(-1)^m \sin(2m+1)x,$$

$$\mathrm{H}_1(x) = 2\sum q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \cos(2m+1)x;$$

$$\Theta(x) = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{m^2}(-1)^m \cos 2mx,$$

$$\Theta_1(x) = 1 + 2\sum q^{m^2} \cos 2mx;$$

$$\eta_1 = \mathrm{H}_1(0), \qquad \theta_1 = \Theta_1(0).$$

On a alors les développements classiques :

$$(1) \qquad \eta_1\,\theta_1\,\frac{\mathrm{H}}{\Theta} = 4\sum_{0}^{\infty} \frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}} \sin(2m+1)x,$$

$$(2) \qquad \eta_1^2\,\theta_1^2\,\frac{\mathrm{H}^2}{\Theta^2} = 8\sum_{1}^{\infty} \frac{mq^m}{1-q^{2m}}(1-\cos 2mx).$$

Au second membre de (2), supposé développé suivant les puissances croissantes de q, cherchons le coefficient de q^{N} ; il faut, pour l'obtenir, poser de toutes les manières possibles

$$N = d(2\rho + 1) \qquad (d, \rho \text{ entiers} \geq 0)$$

et faire la somme

$$8 \sum d(1 - \cos 2dx),$$

étendue à toutes les valeurs trouvées pour d, c'est-à-dire à tout diviseur positif de N à conjugué impair (si $N = pq$, les diviseurs p et q sont dits *conjugués*).

Élevons maintenant au carré les deux membres de (1), et cherchons, au second membre nouveau, le coefficient de q^{N} ; il sera égal au coefficient qu'on vient de calculer, puisque le premier membre de (2) est le carré de celui de (1).

Pour l'obtenir, il faut poser de toutes les manières possibles

$$N = \frac{2m + 1}{2}(1 + 2\rho) + \frac{2m' + 1}{2}(1 - 2\rho'),$$

m, ρ, m', ρ' étant entiers ≥ 0, c'est-à-dire

$$(3) \qquad 2N = a\alpha + b\beta \qquad (a, b, \alpha, \beta \text{ impairs et } > 0),$$

et faire la somme

$$16 \sum \cos ax \cos bx,$$

étendue à toutes ces décompositions (3). On en conclut, en remplaçant le produit des deux cosinus par une différence, la formule

$$(4) \qquad \sum [\cos(a - b)x - \cos(a + b)x] = \sum d(1 - \cos 2dx),$$

où la première somme s'étend aux décompositions (3) de 2N et la seconde aux diviseurs d, de N, à conjugué impair.

La relation (4) a lieu quel que soit x ; développons les cosinus et égalons les coefficients de x^{2h} dans les deux membres ; nous trouvons, en posant $x^{2h} = \varphi(x)$, avec $h > 0$,

$$(5) \qquad \sum [\varphi(a - b) - \varphi(a + b)] = -\sum d\,\varphi(2d).$$

Soit alors $\Phi(x)$ une fonction *entière* de x, *paire*, s'annulant pour $x = 0$; on déduit de (5), puisque $\Phi(x)$ est une somme de termes $A_h\, x^{2h}$, la relation

$$(6)\qquad \sum [\Phi(a-b) - \Phi(a+b)] = -\sum d\,\Phi(2d).$$

Si maintenant $f(x)$ est une fonction *entière et paire*, prenant pour $x = 0$ une valeur quelconque, en faisant dans (6)

$$\Phi(x) = f(x) - f(0),$$

on aura

$$(7)\qquad \sum [f(a-b) - f(a+b)] = \sum d[f(0) - f(2d)].$$

C'est la formule de Liouville, étendue au cas où N est non seulement impair, mais quelconque, avec la restriction toutefois que la fonction paire $f(x)$ doit être entière.

Mais il n'intervient dans (7) que les valeurs de $f(x)$ pour x entier; d'autre part M. Borel a montré (*Comptes rendus*, t. CXXIV, 1897, p. 673) qu'on peut toujours former une fonction entière prenant pour $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, les mêmes valeurs qu'une fonction donnée; la formule (7) se trouve dès lors établie pour une fonction paire quelconque, $f(x)$, sans aucune restriction [1].

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Chambers (George-F.). — *The story of the Comets. Simply told for general readers.* In-8° (9,25-5,75), 272 p., illustr. (Clarendon Press.) Frowde. 6 s.

Delauney. — *Lois des distances des satellites du Soleil.* In-8°, 12 p. avec 1 fig. Paris, Gauthier-Villars. 1 fr.

---

[1] Il faut, bien entendu, pour que la formule de Liouville ait un sens, que $f(x)$ soit déterminée et finie pour x entier, positif, nul ou négatif.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München u. Wien, sowie unter Mitwirkg. zahlreicher Fachgenossen. VI. Bd. 1. Tl. A. Geodäsie u. Geophysik. Red. v. Ph. Furtwängler u. E. Wiechert. 3. Heft. In-8°, p. 245-372 avec fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 4 m.

Fouët (Ed.-B.). — *Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.* T. II : *Les fonctions algébriques. Les séries simples et multiples. Les intégrales*, avec 25 fig. 2e éd., rev. et augm. In-8°, xi-265 p. Paris, Gauthier-Villars, 9 fr.

Fricke (Rob.). — *Hauptsätze der Differential- u. Integral-Rechnung, als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt.* 5. Aufl. Gr. in-8°, xv-219 p. avec 74 fig. Braunschweig, F. Vieweg et Sohn. 5 m.; relié, 5 m. 80.

Love (A.-E.-H.). — *Elements of the Differential and Integral Calculus.* In-8° (7,75-5), 222 p. Cambridge, Univ. Press. 5 s.

Parker (Gilbert). — *Northern Lights.* In-8° (7,75-5), 386 p. London, Methuen. 6 s.

Vallée-Poussin (Th. de La). — *Cours d'Analyse infinitésimale.* T. I. 2e éd. In-4°, xii-424 p. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.

Wilson (V.-T.). — *Descriptive Geometry.* In-8°. London, Chapman et H. 6 s. 6 d.

Salvert (De). — *Mémoire sur l'attraction du parallélépipède ellipsoïdal.* 1er fasc. In-8°, xii-340 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr.

Boulanger (J.) et Ferrié (G.). — *La télégraphie sans fil et les ondes électriques.* 7e éd., augm. et mise à jour. In-8°, 488 p., 255 fig., rel. Paris, Berger-Levrault et Cie. 10 fr.

Appell (Paul). — *Traité de Mécanique rationnelle.* T. I : *Statique, dynamique du point.* 3e éd. In-8°, x-615 p. avec 178 fig. Paris, Gauthier-Villars. 20 fr.

Borel (Émile). — *Die Elemente der Mathematik.* Deutsch v. *Paul Stäckel.* II. Bd. : Geometrie. Gr. in-8°, xii-324 p. avec 403 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 6 m. 40.

Cajori (Florian). — *A History of the logarithmic slide rule and allied Instruments.* In-8° (7,75-5), 144 p. London, Constable. 4 s. 6 d.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LEVY (Maurice). — La statique graphique et ses applications aux constructions. Troisième édition. Première Partie : *Principes et applications de Statique graphique pure.* Texte, xxx-598 pages. Atlas, 25 planches in-8. Paris, Gauthier-Villars, 1907.

Nous sommes bien en retard pour signaler la troisième édition de ce bel Ouvrage, que nous avons déjà étudié d'une manière détaillée et présenté à nos lecteurs dans des éditions précédentes. Pour donner une idée des modifications que l'auteur a apportées, nous ne saurions mieux faire que de reproduire ici même la Préface de la nouvelle édition :

PRÉFACE.

La bienveillance avec laquelle la deuxième édition de cet Ouvrage a été accueillie nous fait un devoir de le conserver dans son économie générale, surtout ce premier Volume qui forme, à lui tout seul, un Traité de Statique graphique élémentaire des systèmes sans conditions surabondantes, c'est-à-dire de ceux qui donnent lieu à des problèmes ne ressortant que des principes les plus simples de la Statique. Nous avons naturellement introduit dans la nouvelle édition les améliorations de détail que nous avons rencontrées. Nous avons complété le Chapitre relatif au passage d'un convoi sur un pont-route ou pour voie ferrée. Nous y avons joint quelques données pratiques et une Table numérique de M. Resal, qui peut être très commode pour l'étude rapide d'un avant-projet de pont à deux appuis soit pour route, soit pour chemin de fer. Cette Table sera complétée pour les poutres à travées solidaires dans le second Volume. De plus, nous avons donné dans la Note II le texte du règlement ministériel du 29 août 1891. concernant les calculs et les épreuves des ponts métalliques. règlement qui remplace celui du 9 juillet 1877, qui était en

vigueur lors de la publication de la deuxième édition de cet Ouvrage.

De même, le Chapitre relatif aux charpentes pour toitures est complété par la Note II *bis*, où nous donnons un règlement du 17 février 1903 sur les calculs et épreuves des halles à voyageurs et à marchandises des chemins de fer, règlement édicté à la suite d'un accident survenu dans l'un de ces édifices.

La Note IV de l'ancienne édition devenue la Note V de la nouvelle a été complétée sur deux points : d'une part, nous avons indiqué, d'après des Communications que nous avons faites à l'Académie des Sciences en 1898, comment on peut compléter les équations fournies par la Statique pure quand il s'agit de systèmes plans élastiques et la marche générale à suivre pour déterminer les forces élastiques qui se développent dans ces systèmes; d'autre part, nous avons résumé les idées que l'on se fait actuellement sur les résistances à la rupture et sur les lignes de Luders étudiées par le commandant Hartmann.

Enfin, en présence de l'importance que prennent les constructions en béton ou ciment armé, et bien que ce soit une anticipation, nous avons cru rendre service en ajoutant dans une Note spéciale (Note VII) le texte des instructions sur cette matière, datées du 20 octobre 1906, envoyées par M. le Ministre des Travaux publics aux ingénieurs de l'État. Elles comprennent trois pièces :

1° Une circulaire ministérielle explicative des instructions proprement dites et contenant les principes actuellement admis pour les calculs de résistance des pièces en béton armé;

2° Les instructions réglementaires elles-mêmes;

3° Le rapport justificatif à l'appui des instructions et de la circulaire adressé au Conseil général des Ponts et Chaussées par une Commission spéciale qu'il a chargée de les préparer, rapport dont il a demandé l'impression comme pouvant être de quelque intérêt pour les ingénieurs.

Pour ne pas trop allonger ce Volume en raison de l'addition des diverses Notes ci-dessus mentionnées et de divers développements dans le corps du Volume, nous avons supprimé l'ancienne Note II sur les planimètres et les intégrateurs, ce sujet étant

aujourd'hui classique et développé dans les Ouvrages spéciaux de Calcul graphique ou de Nomographie.

En terminant, nous ne pouvons que renouveler à l'éditeur M. Gauthier-Villars les remercîments que nous lui avons adressés à l'occasion des précédentes éditions pour la remarquable confection de cet Ouvrage. J. G.

VALLOIS (Edmond). — Cours de Géométrie descriptive a l'usage des candidats a l'École des Beaux-Arts. 1 volume broché de 300 pages avec 410 figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

Comme son titre l'indique, ce Livre est écrit pour des candidats à un examen.

L'auteur a développé très exactement, et dans l'ordre même où elles sont inscrites au programme officiel, toutes les matières qui composent ce programme élémentaire : point, droite et plan; méthodes générales de changement de plans, rotations et rabattements; problèmes fondamentaux sur les intersections, les distances et les angles; polyèdres réguliers.

Rien n'a été épargné pour faciliter aux candidats leur préparation. Une abondance d'épures très nettes, intercalées dans un texte sobre et clair, présentent les tracés dans différents cas. Les solutions des principaux problèmes sont accompagnées de figures en perspective, habilement exécutées, qui permettent de voir dans l'espace et de suivre facilement les constructions employées. Elles sont appliquées à un grand nombre d'exemples, trop peut-être, car n'est-il pas à craindre que cette multitude de cas examinés supprime l'initiative de l'élève et nuise à son originalité? Ainsi, on trouve 25 exemples de l'intersection de deux plans! Pourquoi pas les 91 cas que fourniraient les combinaisons, deux à deux, des treize positions de plan envisagées?

Peut-être l'auteur a-t-il cédé à des préoccupations d'examen, ainsi que dans la préférence qu'il accorde au plan perpendiculaire au second bissecteur, à l'emploi trop répété des traces d'un plan, et aux tracés peu pratiques qui exigent deux changements de plans ou deux rotations.

Je ne me souviens pas d'avoir lu le mot *projectif*. C'est cependant une notion importante en Géométrie descriptive que celle des propriétés projectives. Faute d'en parler, on s'expose à voir l'élève faire un rabattement quand on lui demande de construire les projections du centre de gravité d'un triangle.

Dans les épures pratiques, la ligne de terre n'est généralement pas tracée d'avance. Il serait bon d'habituer de futurs architectes à cette pratique qui, entre autres avantages, aurait permis de simplifier bien des questions, telles que l'emploi des plans auxiliaires de projection, le rabattement d'un plan sur un plan horizontal, etc.

Il m'a paru aussi que l'auteur avait attribué une importance exagérée à la construction du triangle de rabattement dans une position autre que celle où on le place habituellement, et qui n'est pas plus avantageuse.

Je n'ai pas rencontré non plus de règle de ponctuation relative aux polyèdres.

Il n'en reste pas moins que le *Cours de Géométrie descriptive* de M. Vallois est un Ouvrage consciencieux et soigné, capable de rendre des services aux jeunes gens auxquels il est destiné.

C. ROUBAUDI.

GANS (R.). — EINFÜHRUNG IN DIE VEKTORANALYSIS MIT ANWENDUNGEN AUF DIE MATHEMATISCHE PHYSIK. Zweite Auflage. 1 volume in-8, X-125 pages. Leipzig, Teubner, 1909.

Nous avons déjà dit ([1]), à propos de la première édition de cette *Introduction à l'Analyse vectorielle*, les qualités de ce petit Livre : il est bien ordonné et contient vraiment les choses essentielles; s'il est très concis, l'auteur a mis tous ses soins à ce que la concision ne nuisît pas à la clarté.

Le succès qu'a rencontré la première édition est donc fort naturel; il a permis à l'auteur, qui se loue d'ailleurs des excellents conseils qu'il a reçus, d'améliorer son Livre sur quelques points et de corriger quelques fautes. On peut assurément prédire le même

---

([1]) Voir *Bulletin*, t. XXIX, 1905, p. 318.

succès à la seconde édition, d'autant que l'usage de l'Analyse vectorielle se répand davantage de jour en jour. Ni la mécanique des corps solides ou des corps fluides, ni la théorie de l'électricité, ni la cristallographie, ni la Physique mathématique ne peuvent s'en passer. J. T.

LANDAU (E.). — HANDBUCH DER LEHRE VON DER VERTEILUNG DER PRIMZAHLEN. 2 volumes in-8, t. I, p. XVIII, 1-564; t. II, p. IX, 565-961. Leipzig, Teubner, 1909.

Voici plusieurs années que M. Landau accumule sur le difficile problème de la distribution des nombres premiers et sur des sujets connexes d'importants résultats, obtenus par des méthodes plus simples et qui vont plus loin que celles de ses devanciers. Il rend un véritable service en publiant un Livre d'ensemble sur le sujet, un Livre qui réjouira assurément ceux qui se plaisent à la beauté de la matière et à la façon dont elle est ouvrée, qui passionnera sans doute quelques-uns de ceux qui l'étudieront, en leur donnant à la fois le désir et le moyen de devenir eux-mêmes de bons ouvriers et, peut-être, de vrais artistes.

L'Ouvrage de M. Landau est d'une lecture facile; d'abord, l'exposition est très claire, à la fois précise et détaillée; puis l'auteur ne suppose chez son lecteur que des connaissances vraiment élémentaires, tant en Arithmétique que dans la théorie des fonctions; il reprend à nouveau, sans jamais renvoyer à d'autres Traités ou aux Mémoires originaux, tout ce qui dépasse ce fonds commun de connaissances que doivent certainement posséder ceux qui s'attaquent à un Livre de cette nature; le lecteur, pendant qu'il étudie le Traité de M. Landau, peut réellement être l'*homme d'un seul livre*. Celui qui aurait approfondi plusieurs questions particulières, traitées avec une pareille ampleur, se trouverait avoir acquis, en dehors de ces questions, des connaissances très importantes, qu'il pourra sans doute avoir besoin de compléter et de systématiser, mais dont, parfois, il saisira mieux la portée que celui à qui ces connaissances ont été enseignées d'une façon plus séparée, plus logique et comme pour elles-mêmes.

Au début de chaque Livre, M. Landau commence par faire l'historique des travaux qui ont précédé les siens, et des siens propres, en indiquant les principaux résultats. Avec cet historique le lecteur est déjà orienté : il sait où il va, il sait les efforts qu'ont demandés les problèmes qu'il va aborder; les résultats qu'on lui annonce ne peuvent manquer de piquer sa curiosité. Quand il expose le sujet même, l'auteur ne se préoccupe plus d'historique, au moins en apparence; il ne se préoccupe que d'exposer, le mieux possible, la suite des idées. Pas de renvois, ni de notes au bas des pages, qui détournent l'attention. Celui qui veut se renseigner sur les sources et la bibiographie trouvera toutes les indications utiles dans le second Volume, d'une part dans les pages intitulées *Quellenangaben*, d'autre part dans le copieux *Literaturverzeichniss* qui les suit. Quant à l'exposition, elle est faite systématiquement, en allant du simple au compliqué; l'auteur explique ce que chaque méthode donne naturellement, en commençant par celles qui sont vraiment élémentaires, en continuant par celles qui exigent quelques connaissances un peu plus élevées, en terminant par celles qui impliquent la théorie des fonctions : on a l'impression, en le lisant, de monter peu à peu et très haut.

Désignons par $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Le premier théorème sur cette fonction $\pi(x)$, à savoir qu'elle croît indéfiniment avec x, remonte, comme on sait, à Euclide.

D'après Legendre, on pourrait poser

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x - A(x)}, \tag{1}$$

où la fonction $A(x)$, que définit cette égalité, aurait une limite pour x infini et une limite égale à 1,08366.... S'il était seulement prouvé que la fonction $A(x)$ est bornée, la proposition fondamentale qu'exprime l'égalité

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{\left(\dfrac{x}{\log x}\right)} = 1 \tag{2}$$

serait évidemment établie; M. Landau donne à cette proposition le nom de *Primzahlsatz :* c'est elle, dans ses fondements, dans ses

alentours, dans ses prolongements, ses conséquences et ses généralisations, qui sera l'objet essentiel du premier Volume.

Legendre a aussi considéré les $\varphi(k)$ progressions [1] arithmétiques dont le terme général est, pour chacune, de la forme $ky + l_\nu$ ($y = 0, 1, 2, \ldots$), l_ν étant un des $\varphi(k)$ nombres naturels premiers et inférieurs à la raison k. Il affirme que ces progressions contiennent une infinité de nombres premiers et que ceux-ci tendent à se répartir également entre les diverses progressions; en d'autres termes, si l'on désigne par $\pi_\nu(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x contenus dans la progression arithmétique dont le terme général est $ky + l_\nu$, on doit avoir

$$(3) \qquad \lim_{x=\infty} \pi_\nu(x) = \infty, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\pi_\nu(x)}{\pi_{\nu'}(x)} = 1;$$

mais les démonstrations de Legendre, qui a le mérite d'avoir posé des questions importantes, sont sans valeur.

On connaît assez le glorieux Mémoire où Dirichlet a établi la première des deux assertions de Legendre relatives aux progressions arithmétiques.

Dans une note manuscrite de lui se trouve proposée, à la place de la formule de Legendre, pour l'expression asymptotique de $\pi(x)$, la fonction

$$\sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n};$$

toutefois Dirichlet n'était pas en mesure d'établir le fait que le rapport de $\pi(x)$ à cette fonction tend vers 1, quand x croît indéfiniment.

Parmi les progrès très importants qu'a réalisés Tschebyschef

(1) Le symbole φ, tout le long de cet article, sera employé avec sa signification arithmétique. La lettre k conservera la signification qu'on vient de lui donner. La lettre x désignera en général un nombre positif: il sera souvent question de fonctions qui sont tout d'abord définies pour les valeurs naturelles de x, et dont il est commode d'étendre la définition aux valeurs positives quelconques de x: on devra entendre que la valeur de la fonction reste la même tant que la partie entière $[x]$ de x reste la même. C'est de cette façon que devront être entendues les notations $\sum_{n=1}^{x}$, $\prod_{n=1}^{x}$.

dans la connaissance de la fonction $\pi(x)$, je me borne à citer ceux-ci, avec la forme que leur donne M. Landau.

Pour $x=\infty$, la limite supérieure de la fonction

$$\frac{\log^q x}{x}\left[\pi(x)-\int_2^x \frac{du}{\log u}\right],$$

où q est un nombre réel fixe, d'ailleurs quelconque, est positive ou nulle; sa limite inférieure est négative ou nulle.

Les limites supérieure et inférieure, pour x infini, de la fonction

$$\frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\log x}\right)}$$

sont, la première, supérieure ou égale à 1 et, la seconde, inférieure ou égale à 1. D'après cela, si la précédente fonction a une limite, cette limite ne peut être qu'égale à 1. Mais Tschebyschef n'est pas en mesure d'établir l'existence de cette limite.

Signalons l'introduction de la fonction

$$\Im(x)=\sum_{p\leqq x}\log p,$$

qui représente la somme des logarithmes des nombres premiers p inférieurs ou égaux à x; elle tient un grand rôle dans les recherches de Tschebyschef.

Riemann établit ou affirme des propriétés très profondes et cachées de la fonction

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

et de ses racines. En outre, par une analyse d'ailleurs insuffisante, il relie au logarithme intégral de x la fonction $f(x)$ égale, pour une valeur de x qui n'est pas la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un nombre premier, à la somme d'un nombre fini de termes,

$$\pi(x)+\frac{1}{2}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{3}\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)+\ldots,$$

et, dans le cas d'exception signalé, à la même expression diminuée

de $\frac{1}{2m}$: la formule de Riemann consiste dans l'identité

$$(4) \qquad f(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\rho', \rho''} [\mathrm{Li}(x^{\rho'}) + \mathrm{Li}(x^{\rho''})] + \int_x^{\infty} \frac{dy}{(y^2-1) y \log y} - \log 2,$$

où ρ'' est égal à $1 - \rho'$ et où ρ' doit parcourir les valeurs des racines imaginaires de $\zeta(s)$ à ordonnées positives, rangées dans un ordre tel que ces ordonnées aillent en croissant. Pour x réel, le logarithme intégral $\mathrm{Li}(x)$ est la valeur principale de l'intégrale

$$\int_0^x \frac{du}{\log u}.$$

On ne peut conclure, des résultats que Riemann a obtenus ou annoncés, la relation

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1,$$

qui équivaudrait à l'assertion de Dirichlet, ou à la formule (2).

Gauss n'a rien publié sur le sujet ; mais il y avait profondément pensé quand il avait 15 ou 16 ans, ainsi qu'il le raconte à Encke alors qu'il en avait 72 : il tenait la formule (2) pour vraie et regardait comme assez probable l'existence d'une limite non nulle pour la fonction $[A(x) - 1] \log x$. M. Landau rétablit la suite vraisemblable des idées par où a dû passer Gauss.

M. Mertens établit les relations

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1),$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + g + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

et une relation analogue à cette dernière où, dans le premier membre, p, au lieu de parcourir tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à x, prend seulement celles de ces valeurs qui font partie d'une progression arithmétique.

Dans la dernière formule, g est une constante. Quant à la notation $O[g(x)]$, où $g(x)$ désigne une fonction positive pour

x positif et suffisamment grand, M. Landau l'emploie pour désigner une fonction $f(x)$ (réelle ou complexe), telle que le rapport à $g(x)$ de la valeur absolue de cette fonction reste, pour x suffisamment grand, inférieur à un nombre positif fixe. D'après cela, $O(1)$ désigne une fonction qui, pour x suffisamment grand, reste moindre en valeur absolue qu'un nombre positif fixe. Il emploie la notation $o[g(x)]$ pour désigner une fonction telle que la limite, pour x infini, du rapport de sa valeur absolue à $g(x)$ soit nulle.

Il semble que M. Landau n'ait pu se défendre d'une sorte d'émotion en parlant des recherches de M. Hadamard. Il cite, au sujet d'une démonstration rigoureuse de la formule (2), la phrase suivante que Sylvester écrivait en 1881 :

« But to pronounce with certainty upon the existence of such possibility, we shall probably have to wait until some one is born into the world as far surpassing Tchebycheff in insight and penetration as Tchebycheff has proved himself superior in these qualities to the ordinary run of mankind. »

Il fait observer qu'elle s'applique incontestablement à M. Hadamard; on doit à celui-ci d'avoir établi (1893) la vérité des propositions suivantes qu'avait énoncées Riemann (sauf des différences de forme):

Des deux séries

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|}, \quad \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^2},$$

où ρ doit prendre les valeurs de toutes les racines imaginaires de la fonction $\zeta(s)$, la première est divergente et la seconde convergente.

On a, en désignant par a, A, b, B des constantes, et par r une variable qui doit prendre les valeurs de toutes les racines réelles ou imaginaires de la même fonction :

$$(s-1)\zeta(s) = ae^{bs}\frac{1}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}},$$

$$(s-1)\zeta(s) = \mathrm{A}\,e^{\mathrm{B}s}\prod_{r}\left(1-\frac{s}{r}\right)e^{\frac{s}{r}}.$$

M. Hadamard était en droit de dire plus tard :

« Une fois ces propositions établies, la théorie analytique des nombres premiers put, après un arrêt de 30 ans, prendre un nouvel essor; elle n'a cessé, depuis ce moment, de faire de nouveaux progrès. »

Il déclarait d'ailleurs n'être pas en mesure d'établir l'assertion de Riemann qu'exprime l'égalité

$$(5)\qquad N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1+\log(2\pi)}{2\pi} T + O(\log T),$$

où N(T) désigne le nombre de racines de la fonction $\zeta(s)$, comptées avec leur degré de multiplicité, dont l'ordonnée est comprise entre 0 (exclu) et le nombre positif T (inclus), ni même d'établir l'existence d'une limite, pour T infini, de la fonction

$$\frac{N(T)}{T \log T}.$$

En 1896, il établissait la relation

$$\lim_{x=\infty} \frac{\mathfrak{I}(n)}{x} = 1,$$

qui entraîne la relation (2), comme l'a montré M. de la Vallée-Poussin, lequel a d'ailleurs établi la relation précédente, en même temps que M. Hadamard.

M. von Mangoldt a établi la formule (5) en 1905. Dix ans auparavant, il l'avait, sauf la substitution de $O(\log^2 T)$ à $O(\log T)$, démontrée dans un Mémoire dont la conclusion essentielle est la démonstration de la formule (4) de Riemann.

Ainsi, des assertions de Riemann relatives à la fonction $\zeta(s)$, il reste celle-ci, qui n'est ni démontrée ni contredite : les racines de $\zeta(s)$, autres que les racines négatives impaires, ont $\frac{1}{2}$ pour partie réelle.

On doit à M. de la Vallée-Poussin d'avoir établi la formule

$$(6)\qquad \lim_{x=\infty} \frac{\log^{q}(x)}{x}\left[\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u}\right] = 0,$$

où q est un nombre réel quelconque. Elle permet, en particulier,

si l'on fait $q=2$ et $q=3$, de montrer combien étaient justes les vues de Gauss sur la fonction $A(x)$ définie par l'égalité (1). Elle permet aussi de montrer que la fonction $\pi(x)$ est *mieux* représentée par le logarithme intégral $\mathrm{Li}(x)$ que par n'importe laquelle de ses expressions approchées

$$f_q(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{1!\,x}{\log^2 x} + \ldots + \frac{(q-2)!\,x}{\log^{q-1} x},$$

puisqu'on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^{q+1} x}{x}[\pi(x) - \mathrm{Li}(x)] = 0,$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^{q+1} x}{x}[\pi(x) - f_q(x)] = +\infty.$$

Dans le même Mémoire, M. de la Vallée-Poussin établit la relation

$$(7) \qquad \pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left[x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right],$$

où α est une constante positive. La formule (6) est une conséquence aisée de cette dernière formule.

On doit encore à M. de la Vallée-Poussin d'avoir établi les formules, relatives aux nombres de nombres premiers contenus dans les progressions arithmétiques dont on a parlé au début :

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi_\nu(x)}{\left(\dfrac{x}{\log x}\right)} = \frac{1}{\varphi(k)}, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\pi_\nu(x)}{\pi_{\nu'}(x)} = 1.$$

Le premier [1] de ses propres Mémoires dont parle M. Landau, remonte à 1903. La première partie de ce Mémoire n'apporte point de résultats nouveaux concernant la fonction $\pi(x)$, mais elle permet d'obtenir, par une voie très rapide, toutes les propriétés de cette fonction qu'ont établies MM. Hadamard et de la Vallée-Poussin ; sauf, toutefois, la formule (7) qui est remplacée par la formule

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x\, e^{-\sqrt[13]{\log x}}\right).$$

---

[1] *Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes* (*Math. Ann.*, t. LVI).

laquelle, tout en étant légèrement moins précise, permet d'établir la formule (6). La méthode de M. Landau ne fait pas usage des théorèmes de M. Hadamard sur les fonctions entières et, en particulier, sur la fonction $(s-1)\zeta(s)$; elle ne suppose rien de connu sur les racines imaginaires de $\zeta(s)$, ni même sur l'existence de cette fonction dans tout le plan.

La portée de cette méthode se manifeste d'ailleurs par cela même qu'elle a permis à M. Landau d'établir la théorie correspondante pour les primidéaux. Dans ce domaine nouveau, les anciennes méthodes ne pouvaient réussir, puisque les propriétés de la fonction qui généralise la fonction $\zeta(s)$ sont encore inconnues.

Dans un autre Mémoire (1) de la même année, M. Landau a établi, au moyen du théorème de Cauchy sur les intégrales d'une fonction complexe, la formule

$$(8) \qquad \pi_\nu(x) = \frac{1}{\varphi(k)}\int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x e^{-\gamma\sqrt{\log x}}\right).$$

où $\pi_\nu(x)$ représente, comme plus haut, le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, contenus dans la progression arithmétique dont le terme général est $ky + l_\nu$. Ultérieurement, il a prouvé (2) qu'on pouvait prendre pour γ un nombre indépendant de k et de l_ν.

M. de la Vallée-Poussin avait montré qu'il y a des constantes positives a et t_0 telles que, si l'on pose (3)

$$s = \sigma + ti,$$

en désignant par σ et t des nombres réels, la fonction $\zeta(s)$ ne s'annule pour aucun point de la région définie par les inégalités

$$\sigma \geqq 1 - \frac{1}{a\log t}, \qquad t \geqq t_0.$$

En partant de là, M. Landau a pu (4) établir directement la

---

(1) *Ueber die Primzahlen einer arithmetischen Progression* (*Sitzungsberichte* de Vienne, t. CXII).

(2) *Ueber die Primzahlen in einer arithmetischen Progression und die Primideale in einer Idealklasse* (*Sitzungsberichte* de Vienne, t. CXVII, 1908).

(3) Cette notation sera conservée tout le long de cet article.

(4) *Neuer Beweis der Riemannschen Primzahlformel* (*Sitzungsberichte* de Berlin, 1908).

formule (7) et cela pour toutes les valeurs de α qui vérifient la condition $\alpha < a^{-\frac{1}{2}}$. Ce résultat a une grande portée parce que la proposition et la méthode se généralisent dans un domaine où l'existence dans tout le plan de la fonction analogue à $\zeta(s)$ n'est pas certaine. En outre, M. Landau a pu obtenir une valeur de a plus faible que celle qu'avait donnée M. de la Vallée-Poussin, ce qui permet une évaluation plus précise de la fonction $\pi(x)$.

Enfin, dans un Mémoire inséré aux *Annales de l'École normale supérieure* [1], M. Landau a remplacé par une autre, incomparablement plus courte, la démonstration qu'on doit à M. von Mangoldt de la formule de Riemann (4) et a établi la formule analogue pour la progression arithmétique.

L'analyse qui précède peut donner quelque idée au lecteur des matières qui sont traitées dans le premier Volume, mais non de la façon dont elles sont traitées. Je m'efforcerai, dans ce qui suit, de rendre compte de l'ordre dans lequel elles sont disposées.

Le premier Livre (p. 59-390) est consacré à la fonction $\pi(x)$ et à la fonction $\zeta(s)$. Il est divisé en quatre Parties.

Si élémentaire que soit la première, on y aperçoit déjà la puissance et la simplicité des méthodes de l'auteur. La considération du produit

$$\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

étendu aux ρ premiers nombres premiers et une des propositions les plus classiques de la théorie des nombres permettent tout d'abord de démontrer qu'on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0.$$

(1) *Nouvelle démonstration pour la formule de Riemann sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, et démonstration d'une formule plus générale pour le cas des nombres premiers d'une progression arithmétique* (*Ann. Éc. norm.*, 3e série, t. XXV, 1908).

L'auteur introduit ensuite les fonctions [1]

(9) $$T(x) = \sum_{n=1}^{x} \log n, \qquad \mathfrak{J}(x) = \sum_{p \leqq x} \log p,$$

$$\psi(x) = \mathfrak{J}(x) + \mathfrak{J}(\sqrt{x}) + \mathfrak{J}(\sqrt[3]{x}) + \ldots = \sum_{p^m \leqq x} \log p,$$

qui sont liées par la relation identique, valable pour toutes les valeurs positives de x

(10) $$T(x) = \sum_{n=1}^{x} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Pour la première fonction, $T(x)$, on parvient aisément à la relation

(11) $$T(x) = x \log x - x + O(x),$$

qui permet ensuite d'établir que $\psi(x)$ et $\mathfrak{J}(x)$ ont le même ordre de grandeur que x; on prouve ensuite que $\frac{\pi(x)\log x}{x}$ et $\frac{\mathfrak{J} x}{x}$ ont les mêmes limites d'indétermination; ces limites, M. Landau les resserre de plus en plus et prouve qu'elles comprennent le nombre 1; entre temps, il établit le postulat de Bertrand, à savoir que, pour $x \geqq 1$, il y a au moins un nombre premier entre x et $2x$.

La seconde Partie est consacrée aux séries de Dirichlet, c'est-à-dire aux séries de la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

où l'on suppose, pour cette seconde Partie, que les coefficients a_n sont réels, ainsi que la variable s. La propriété de ces séries de converger quand s dépasse un certain nombre s_0, de diverger pour $s < s_0$; le caractère uniforme de leur convergence; la possibilité de les différentier terme à terme; le parti qu'on tire de ce

[1] Il est à peine utile de dire que n désigne un nombre naturel et p un nombre premier; j'ai déjà dit un peu plus haut que x peut être un nombre positif non entier; on entendra pour la première formule, par exemple, que n doit prendre toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à la partie entière de x (inclusivement); si x était plus petit que 2, $T(x)$, $\mathfrak{J}(x)$, $\Psi(x)$ seraient nuls. J'ai cru inutile de répéter ultérieurement des observations analogues.

qu'on sait sur la façon dont se comporte pour x infini la fonction

$$S(x) = \sum_{n=1}^{x} a_n,$$

en particulier les inégalités

$$(12) \quad \begin{cases} \lim\limits_{s=1} \text{sup.}\, (s-1) f(s) \leqq \lim\limits_{x=\infty} \text{sup.}\, \dfrac{S(x)}{x}, \\ \lim\limits_{s=1} \text{inf.}\, (s-1) f(s) \geqq \lim \text{inf.}\, \dfrac{S(x)}{x}, \end{cases}$$

et d'autres inégalités du même genre, relatives, comme les précédentes, au cas où la série $f(s)$ converge pour $s > 1$; le fait que deux séries de Dirichlet dont les valeurs sont toujours égales pour $s > s_0$ sont égales terme à terme, tout cela est établi d'une façon aussi simple qu'élégante,

Disons tout de suite que la théorie de la fonction $\zeta(s)$ sera reprise, dans la troisième Partie, pour les valeurs imaginaires de s; que d'importantes propriétés des séries de Dirichlet apparaîtront ici et là, au moment où l'on va en avoir besoin; enfin que la théorie générale de ces séries, à laquelle le sixième et dernier Livre est entièrement consacré, constitue en quelque sorte le couronnement de l'Ouvrage. L'auteur considérera alors ces séries sous la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

où les λ_n sont des nombres réels tels qu'on ait

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \ldots,$$
$$\lim_{n=\infty} \lambda_n = \infty,$$

forme qui contient les séries ordinaires de Dirichlet pour $\lambda_n = \log n$ et les séries de puissances pour $\lambda_n = n$. Il en reprendra la théorie à partir du théorème de M. Jensen sur le mode de convergence et des recherches si importantes de M. Cahen, qui ont toutefois exigé une longue et difficile discussion. C'est là qu'on trouvera, en particulier, les beaux résultats obtenus par M. Landau sur la multiplication des séries de Dirichlet. Mais revenons à la seconde Partie du premier Livre; les propositions sur les séries

réelles de Dirichlet qu'on y a considérées ont été établies en vue des fonctions particulières qui interviennent dans l'étude de la distribution des nombres premiers, et tout d'abord de la fonction

$$(13) \qquad \zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots,$$

pour laquelle l'identité d'Euler

$$(14) \qquad \zeta(s) = \frac{1}{\prod\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)},$$

d'une part, fait prévoir le rôle essentiel qu'elle tiendra dans cette étude et, de l'autre, conduit aux séries de Dirichlet pour $\log \zeta(s)$ et pour

$$(15) \qquad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s};$$

le coefficient

$$\Lambda(n) = \psi(n) - \psi(n-1)$$

est nul pour $n = 1$ et pour toutes les valeurs entières du nombre naturel n qui ne sont pas de la forme p^m; pour $n = p^m$, $\Lambda(n)$ est égal à $\log p$.

La façon dont se compose $\zeta(s)$ quand s s'approche de 1 résulte immédiatement de l'identité

$$(16) \qquad \left(1 - \frac{2}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \ldots.$$

La relation

$$\lim_{s=1}(s-1)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(x)} = -1$$

ou

$$\lim_{s=1}(s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s} = 1$$

conduit, grâce aux inégalités (12), aux formules

$$\lim_{x=\infty} \text{sup.} \frac{\psi(x)}{x} \geq 1, \qquad \lim_{x=\infty} \text{inf.} \frac{\psi(x)}{x} \leq 1.$$

Voici quelques-unes des relations auxquelles on parvient

ensuite

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} \geqq 1, \qquad \liminf_{x=\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} \leqq 1,$$

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\log x}\right)} \geqq 1, \qquad \liminf_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\log x}\right)} \leqq 1,$$

$$\sum_{p\leqq x} \frac{1}{p} = \log\log x + B + o(1),$$

$$\prod_{p\leqq x}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-C}}{\log x} + O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)$$

(B est une constante numérique, et C la constante d'Euler);

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\log^q x}{x}\left[\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u}\right] \leqq 0,$$

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\log^q x}{x}\left[\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u}\right] \geqq 0.$$

C'est dans la troisième Partie que commence à intervenir la théorie des fonctions analytiques.

L'identité (16) fournit une première méthode pour prolonger $\zeta(s)$ à gauche de la droite $\sigma = 1$ jusqu'à la droite $\sigma = 0$; une autre méthode, due à M. de la Vallée-Poussin, permet de montrer en outre qu'on a, en désignant par C la constante d'Euler,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + C + C_1(s-1) + \ldots,$$

aux environs du pôle 1.

La fonction $\zeta(s)$ ne s'annule pas dans la région du plan situé à droite de la courbe définie par les équations

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \sigma = 1 - \dfrac{1}{c\log^9 t}, & \text{pour} & t \geqq 3, \\ \sigma = 1 - \dfrac{1}{c\log^9 3}, & \text{pour} & -3 \leqq t \leqq 3, \\ \sigma = 1 - \dfrac{1}{c\log^9(-t)}, & \text{pour} & t \leqq -3, \end{array}\right.$$

ni sur la courbe même; on a d'ailleurs, pour $t \geqq 3$, $\sigma \geqq 1 - \dfrac{1}{c\log^9 t}$,

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < b \log^9 t;$$

b et c désignent des constantes numériques.

L'identité

$$\sum_{n=1}^{x} \Lambda(n) \log \frac{x}{n} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$$

conduit, en appliquant le théorème de Cauchy à l'intégrale

$$\int \frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$$

prise le long d'un contour convenable, à la formule

$$\sum_{n=1}^{x} \Lambda(n) \log \frac{x}{n} = x + O\left(x e^{-\sqrt[11]{\log x}}\right);$$

qui, en remplaçant 11 par 13, convient encore pour $\psi(x)$ et pour $\mathfrak{S}(x)$; enfin, on obtient une expression analogue pour $\pi(x)$, qui permet en particulier d'établir la formule (6).

L'auteur peut maintenant multiplier les expressions asymptotiques pour diverses sommes du type

$$\sum_{p \leq x} F(p, x),$$

où la fonction $F(p, x)$ est soumise à certaines conditions : montrer que, à partir d'une valeur suffisamment grande de x, il y a plus de nombres premiers de 1 à x que de x à $2x$; établir la relation

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\left(\frac{x}{\log \log x}\right)} = e^{-C},$$

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\log \tau(x)}{\left(\frac{\log x}{\log \log x}\right)} = \log 2.$$

où $\tau(x)$ est le nombre des diviseurs de x; obtenir l'ordre maximum des permutations d'un degré donné, etc.

L'étude de la fonction $\zeta(s)$, poursuivie dans la quatrième Partie, va conduire l'auteur à des propriétés encore plus profondes.

Après avoir montré, d'une façon très élémentaire, comment cette fonction peut être prolongée dans tout le plan, l'auteur

donne deux démonstrations de la propriété qu'a la fonction

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

de ne pas changer quand on change s en $1-s$; la première s'appuie sur une identité tirée de la théorie de la transformation linéaire des fonctions thêta; l'autre, dont le point de départ est dans la formule

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx,$$

et dans la démonstration qu'a donnée Hermite de la possibilité de prolonger la fonction $\zeta(s)$ dans tout le plan, est due à M. Lerch.

Un théorème de M. Carathéodory sur les séries de puissances et diverses propositions de M. Hadamard sur les fonctions transcendantes entières conduisent ensuite au théorème de M. Hadamard sur les décompositions en facteurs relatives à la fonction $\zeta(s)$: si l'on désigne par $g(x)$ la fonction entière qu'on obtient en remplaçant s par $\frac{1}{2} + i\sqrt{x}$ dans la fonction $\xi(s)$, on peut mettre $g(x)$ sous la forme

$$g(x) = g(0)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{\xi_\nu}\right),$$

la série $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|\xi_\nu|^k}$ étant convergente lorsque k dépasse $\frac{1}{2}$. On en déduit

$$(s-1)\zeta(s) = \frac{1}{2}e^{Bs}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 + \frac{s}{2n}\right)e^{-\frac{s}{2n}}\prod_{\rho}\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}},$$

où les racines imaginaires ρ de la fonction $\zeta(s)$ correspondent aux racines ξ_ν de $g(x)$ et où

$$B = \log 2\pi - 1.$$

Un peu plus loin, M. Landau parvient à établir l'existence d'une constante positive a, plus grande que $18,52$, telle que la fonction $\zeta(s)$ n'ait certainement pas de racines dans la région définie par les inégalités

$$t > 2, \qquad \sigma \geq 1 - \frac{1}{a}\log t,$$

et enfin la formule (7), avec la condition $\alpha < a^{-\frac{1}{2}}$.

L'auteur s'occupe ensuite de la démonstration de la formule (4) et, plus généralement, de l'évaluation de fonctions du type

$$f(x, r) = \sum_{p^m \leqq x}' \frac{1}{m} \frac{1}{p^{mr}},$$

où r est un paramètre complexe [nul dans le cas de la fonction $f(x)$ de la formule (4)] et où l'accent dont est affecté le signe Σ veut dire que, dans le cas où $x = p_0^{m_0}$, le dernier terme doit être remplacé par sa moitié. A cette fonction il convient de joindre la fonction

$$F(x, r) = \sum_{p^m \leqq x}' \frac{\log p}{p^{mr}} = -\frac{\partial}{\partial r} f(x, r),$$

qui, lorsque r est nul, se réduit à $\psi(x)$ en général et à $\psi(x) - \frac{1}{2}\log p_0$ pour $x = p_0^{m_0}$. L'évaluation de ces fonctions exige en particulier la démonstration de propriétés assez cachées de la dérivée logarithmique de la fonction $\zeta(s)$ et de lemmes relatifs à la distribution des racines imaginaires de $\zeta(s)$, par exemple de la formule

$$N(T) = O(T \log T),$$

où $N(T)$ désigne le nombre de racines imaginaires de $\zeta(s)$ dans lesquelles le coefficient de i est positif et inférieur ou égal au nombre positif T. Les formules auxquelles on parvient sont assez compliquées; elles comportent, comme la formule (4), des séries où figurent les racines imaginaires de $\zeta(s)$, sur lesquelles on sait peu de chose ([1]).

La propriété de $N(T)$ qu'on vient de rappeler est évidemment contenue dans la formule (5), que M. Landau établit ensuite entièrement; dans cette démonstration, le fait que le coefficient

---

([1]) Signalons les propositions suivantes, qu'on trouvera dans le Livre de M. Landau :

Ces racines imaginaires sont toutes dans la bande $0 < \sigma < 1$ et, d'une façon plus précise, dans le domaine défini par les inégalités

$$\frac{1}{b \log(2 + |t|)} \leqq \sigma \leqq 1 - \frac{1}{b \log(2 + |t|)},$$

où b est une constante positive. On ne sait pas encore s'il y a ou non des racines dont les abscisses sont infiniment voisines de la droite $\sigma = 1$. Sur la borne supé-

de i dans l'intégrale

$$\int_{2-Ti}^{-1+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds$$

est du type $O(\log T)$ tient une place essentielle : l'auteur montre comment cette proposition peut se généraliser.

Le second Livre est consacré à l'étude de la distribution des nombres premiers dans la progression arithmétique dont le terme général est $ky + l$, où k et l sont des nombres naturels premiers entre eux. Il comportera la généralisation d'un grand nombre de propositions qui, jusqu'à présent, se rapportaient à la suite naturelle des nombres.

L'auteur, en ne supposant connue que la notion de racine primitive pour un nombre premier, explique, d'après Dirichlet, ce qu'est le *système d'indices* d'un nombre naturel n pour le module,

$$k = 2^{\lambda} p_1^{\lambda_1} \ldots p_r^{\lambda_r},$$

et ce que sont les $h = \varphi(k)$ *caractères*

$$\chi_1(n), \quad \chi_2(n), \quad \ldots, \quad \chi_h(n) \qquad \text{du nombre } n:$$

Je rappelle que ces fonctions sont toutes nulles quand n et k ne sont pas premiers entre eux; qu'on a $\chi(nn') = \chi(n)\chi(n')$ et, pour $n \equiv n' \pmod{k}$, $\chi(n) = \chi(n')$; que le caractère principal $\chi_1(n)$ est égal à 1 quand n est premier à k; que, parmi les autres caractères, les uns sont réels quel que soit n, tandis que les autres sont imaginaires, au moins pour certaines valeurs de n, ce qui permet de diviser les caractères en trois espèces; enfin que les caractères se divisent encore en caractères propres et impropres :

---

rieure Θ de leur partie réelle, on sait qu'on a

$$\frac{1}{2} \leq \Theta \leq 1;$$

si $\Theta = \frac{1}{2}$, toutes les racines imaginaires ont $\frac{1}{2}$ pour partie réelle, ainsi que l'affirmait Riemann.

Enfin, comme le montre M. Landau à la fin du premier Livre, le nombre Θ est la borne inférieure des nombres η tels qu'on ait

$$\pi(x) - \mathrm{Li}(x) = O(x^{\eta}).$$

le caractère $\chi(n)$ relatif au module k est impropre s'il y a un diviseur K de k, autre que 1 et que k, tel qu'on ait certainement $\chi(n)=\chi(n')$, si les deux nombres naturels n et n' sont premiers à k et si leur différence est divisible par K; s'il n'y a pas de tel diviseur K, $\chi(n)$ est un caractère propre.

Le rôle que tenait la fonction $\zeta(s)$ dans le premier Livre sera tenu maintenant par les h fonctions de Dirichlet

$$L_\varkappa(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_\varkappa(n)}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-\frac{\chi_\varkappa(p)}{p^s}}\qquad(\varkappa=1,2,\ldots,h),$$

dont on représentera à l'occasion l'une quelconque, celle qui correspond au caractère $\chi(n)$, par le symbole plus commode $L(s,\chi)$ et même par $L(s)$. Ces séries sont regardées comme étant de première, de deuxième ou de troisième espèce, suivant que le caractère correspondant est de première, de deuxième ou de troisième espèce. On les étudie d'abord en supposant s réel. La série de première espèce, évidemment liée à $\zeta(s)$ par la relation

$$L_1(s)=\zeta(s)\prod_{p\mid k}\left(1-\frac{1}{p^s}\right),$$

où le symbole $p\mid k$ veut dire que le produit doit être étendu aux nombres premiers p qui divisent k, converge comme $\zeta(s)$. Lorsque s tend vers 1 en décroissant, on a

$$\lim_{s=1}(s-1)L_1(s)=\frac{h}{k}.$$

Pour s positif, les séries de deuxième et de troisième espèces convergent, sont continues, peuvent être différentiées terme à terme; au reste, on prouvera ultérieurement qu'elles définissent, par prolongement dans tout le plan, des fonctions (transcendantes) entières.

On a, en désignant par l un nombre naturel premier à k,

$$(18)\qquad -\sum_{\varkappa=1}^{h}\frac{1}{\chi_\varkappa(l)}\frac{L'_\varkappa(s)}{L_\varkappa(s)}=\sum_{p^m\equiv l}\frac{\log p}{p^{ms}},$$

où il faut entendre que la sommation doit être étendue à tous les

couples de nombres naturels p, m tels qu'on ait (p étant premier)

$$p^m \equiv l \pmod{k}.$$

En vertu des propriétés des séries $L_\chi(s)$ qu'on vient d'énoncer, le premier terme

$$-\frac{L'_1(s)}{L_1(s)}$$

de la somme qui figure au premier membre de l'équation (18) augmente indéfiniment quand s tend vers 1 en décroissant et, pour prouver que les autres termes sont finis, il suffit de prouver que la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}$$

est différente de zéro. C'est là, pour ce qui concerne les caractères réels, le point le plus difficile de la preuve de l'existence d'une infinité de nombres premiers dans une progression arithmétique; M. Landau en donne deux démonstrations. Il est clair, d'après ce qui vient d'être dit, qu'on a

$$\lim_{s=1} \sum_{p^m \equiv l} \frac{\log p}{p^{ms}} = +\infty;$$

mais la série qui figure dans cette égalité étant sûrement convergente pour $s > \frac{1}{2}$ quand on en exclut les termes où m est égal à 1, il faut qu'on ait

$$\lim_{s=1} \sum_{p \equiv l} \frac{\log p}{p^s} = +\infty$$

et, par conséquent, que la série

$$K(s) = \sum_{p \equiv l} \frac{\log p}{p^s}$$

contienne une infinité de termes, en d'autres termes :

Il y a une infinité de nombres premiers dans la progression arithmétique dont le terme général est $ky + l$.

Aux fonctions $\pi(x)$, $\mathfrak{I}(x)$ du premier Livre correspondant

maintenant les fonctions $\Pi(x)$, $\Theta(x)$; elles représentent, la première, le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x qui sont contenus dans la progression arithmétique, et, la seconde, la somme des logarithmes de ces nombres premiers; les fonctions $\Pi(x)$, $\Theta(x)$ ont des propriétés asymptotiques qui généralisent celles des fonctions $\pi(x)$, $\mathfrak{I}(x)$ et qu'on parvient à préciser par des méthodes analogues à celles qui ont été suivies dans le premier Livre.

La fonction entière $\xi(s)$ est remplacée par les fonctions, dont on démontre aussi qu'elles sont entières,

$$\xi(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\alpha}{2}\right) L(s, \chi),$$

où χ désigne un caractère propre relatif au module k, supposé plus grand que 2, où α est égal à 0 ou à 1, suivant que $\chi(-1)$ est égal à 1 ou à -1; on a la relation

$$\xi(s, \chi) = \varepsilon(\chi)\,\xi(1-s, \bar{\chi}),$$

où $\bar{\chi}$ est le caractère conjugué de χ et où le nombre $\varepsilon(\chi)$, dont la valeur absolue est toujours 1, est égal, suivant les deux mêmes cas, soit à

$$\varepsilon(\chi) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{n=1}^{k} \chi(n)\, e^{\frac{2\pi n i}{k}}$$

soit à cette même quantité divisée par i. Cette équation fonctionnelle permet de montrer que les zéros de la fonction $\xi(s, \chi)$ autres que ceux qui sont mis en évidence par le facteur Γ, appartiennent à la bande $0 < \sigma < 1$. D'un autre côté, le mode de croissance de cette fonction $\xi(s, \chi)$ permet de reconnaître de quelle façon elle se décompose en facteurs primaires. Il y a lieu, comme pour la fonction $\zeta(s)$, de déterminer des régions de la bande $0 < \sigma < 1$, où l'on est assuré que la fonction $L_\chi(s)$ ne s'annule pas. Enfin, on a à considérer des fonctions $N(T)$ analogues à celles qu'on a étudiées dans le premier Livre, mais relatives maintenant aux fonctions $L_\chi(s)$.

La fin du premier Volume est occupée par d'intéressantes applications à la décomposition d'un nombre en deux ou en trois

carrés, à la décomposition d'un nombre en cubes, à la démonstration d'une proposition qui permet d'établir la curieuse proposition de M. Stormer que voici :

Les nombres naturels x tels que le produit

$$i(i-1)(i-2)\ldots(i-x)$$

soit réel ou purement imaginaire sont en nombre fini.

Le troisième Livre est intitulé : *La fonction $\mu(n)$ et la distribution des nombres sans diviseurs carrés.*

Cette fonction $\mu(n)$ peut être définie par l'identité

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\prod\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$$

ou par les propriétés équivalentes : on a $\mu(1)=1$; lorsque n est un nombre naturel plus grand que 1, on a $\mu(n)=0$ quand un facteur premier entre dans n avec un exposant plus grand que 1 ; enfin, on a $\mu(n)=(-1)^\rho$ pour un nombre n qui n'admet pas de diviseur carré et qui est le produit de ρ facteurs premiers différents. Une de ses propriétés les plus connues (Liouville et Dedekind) consiste dans la façon dont elle permet de passer de l'égalité

$$G(n)=\sum_{d\mid n}F(d)$$

à l'égalité

$$F(d)=\sum_{d\mid n}\mu(d)\,G\left(\frac{n}{d}\right);$$

dans ces égalités, le symbole $d\mid n$ indique que les sommations doivent s'étendre à tous les diviseurs [1] d de n.

A cette fonction $\mu(n)$, il convient d'adjoindre la fonction $\lambda(n)$, définie par les propriétés

$$\lambda(1)=1,\qquad \lambda(n)=(-1)^\rho,$$

où ρ désigne le nombre de facteurs premiers, comptés maintenant chacun avec son ordre de multiplicité, qui figurent dans la composition de n.

---

(1) Je continuerai d'employer cette notation.

L'induction a fait prévoir à Euler les égalités

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n} = 0;$$

et à Möbius celle-ci

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mu(n)\log n}{n} = -1.$$

Les fonctions

$$g(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)}{n}, \qquad M(x) = \sum_{n=1}^{x} \mu(n),$$

$$L(x) = \sum_{n=1}^{x} \lambda(n), \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)\log n}{n},$$

ont été étudiées au point de vue asymptotique, la première par M. Gram, puis par M. de la Vallée-Poussin; la deuxième et la troisième par M. von Mangoldt, la dernière par M. Landau, qui, en outre, a donné pour les quatre fonctions des formules asymptotiques de plus en plus précises.

L'ordre suivi par l'auteur est analogue à celui que j'ai essayé de caractériser pour le premier Livre. Après avoir rappelé les propriétés essentielles des fonctions qu'il étudiera, il montre comment les propositions qu'expriment les égalités

$$M(x) = o(x), \qquad g(x) = o(1)$$

ressortent du *Primzahlsatz*; il montre comment le fait que la fonction $\zeta(s)$ ne s'annule pas dans la région définie par les inégalités (17) conduit aux formules

$$M(x) = O\left(\frac{x}{\log^q x}\right),$$

$$g(x) = O\left(e^{-\gamma\sqrt{\log x}}\right),$$

$$f(x) = -1 + O\left(e^{-\gamma\sqrt{\log x}}\right).$$

Les théorèmes sur les racines de la fonction $\zeta(s)$ et divers lemmes sur l'inverse de cette fonction permettent enfin d'obtenir

les relations

$$M(x) = O(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}),$$

$$g(x) = O(e^{-\alpha\sqrt{\log x}}),$$

$$f(x) = -1 + O(e^{-\alpha\sqrt{\log x}}),$$

$$L(x) = O(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}),$$

où α désigne comme plus haut un nombre moindre que la constante $\frac{1}{\sqrt{a}}$, le nombre $\frac{1}{5}$ par exemple.

Le quatrième Livre est intitulé : *La fonction* $\mu(n)$ *et la distribution des nombres sans diviseurs carrés dans une progression arithmétique.*

Les recherches de M. Landau sur ce sujet ont pour point de départ une proposition prévue par M. Kluyver en 1904, à savoir que la série

$$\sum_{n \equiv l} \frac{\mu(n)}{n}$$

est convergente pour toute progression arithmétique, de terme général $ky + l$: la notation précédente indique que la sommation s'étend aux valeurs de n qui font partie de la progression [1]. M. Landau montre qu'on a

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv l}}^{x} \mu(n) = O\left(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right),$$

où l'on peut prendre encore $\alpha = \frac{1}{5}$. La convergence, pour toutes les valeurs réelles de q et de t, de la série

$$\sum_{\substack{n=2 \\ n \equiv l}}^{\infty} \frac{\mu(n) \log^q(n)}{n^{1+ti}}$$

en résulte.

Notons encore cette conséquence :

---

(1) Il n'y a plus lieu, dans le présent Livre, de supposer que l est premier avec k; on écartera toutefois le cas où ces deux nombres auraient un diviseur carré, puisque $\mu(n)$ serait alors nul pour tous les termes de la progression.

Si dans la progression arithmétique dont le terme général est $ky+l$ et dans laquelle on suppose que k et l n'ont pas de diviseur commun carré, on considère les termes inférieurs ou égaux à x qui n'ont point de diviseur carré; le nombre des termes composés d'un nombre pair de facteurs premiers tend, lorsque x augmente indéfiniment, à être égal au nombre de termes composés d'un nombre impair de nombres premiers.

Dans le cinquième Livre, M. Landau traite de problèmes assez divers qui, d'ailleurs, se rapportent toujours à la théorie des nombres premiers.

Tout d'abord, il établit l'existence d'une limite positive, pour x infini, pour les deux fonctions

(19) $$\frac{\sum_{n=1}^{x} 2^{\nu(n)}\Theta(n)}{\left[\frac{x}{(\log x)^{1-\frac{2\lambda}{h}}}\right]}, \qquad \frac{\sum_{n=1}^{x} \Theta(n)}{\left[\frac{x}{(\log x)^{1-\frac{\lambda}{h}}}\right]};$$

les quantités qui figurent dans ces expressions sont définies comme il suit :

On considère λ nombres distincts $l_1, l_2, \ldots, l_\lambda$ premiers à k; $\Theta(n)$ est égal à 1 si tous les facteurs premiers qui composent n sont congrus, suivant le module k, à l'un des nombres $l_1, l_2, \ldots, l_\lambda$; s'il n'en est pas ainsi, $\Theta(n)$ est égal à zéro. La lettre h est mise, comme plus haut, à la place de $\varphi(k)$; enfin le symbole $\nu(n)$ désigne le nombre des facteurs premiers distincts qui entrent dans le nombre naturel n. C'est une prévision de M. Lehmer qui a conduit M. Landau à étudier la première de ces fonctions; M. Lehmer avait déduit de la théorie des formes quadratiques la relation

$$\lim_{x=\infty} \frac{\sum_{n=1}^{x} 2^{\nu(n)}\Theta(n)}{x} = \frac{1}{\pi},$$

en supposant $k=4$, $\lambda=1$, $l_1=1$; il avait aussi traité les cas $k=3$, $\lambda=1$, $l_1=1$ et $k=6$, $\lambda=1$, $l_1=1$.

Dans le cas où $k = 4$, $\lambda = 1$, $l_1 = 1$, la fonction

$$\sum_{n=1}^{x} \Theta(n)$$

est égale au nombre de nombres égaux ou inférieurs à x qui sont la somme de deux carrés; le théorème relatif à la seconde des fonctions (19) montre que ce nombre est, pour x infini, équivalent à

$$b \frac{x}{\sqrt{\log x}},$$

où b est une constante positive.

Une partie de ce cinquième Livre est consacrée à diverses séries considérées par Euler, Möbius, Cesàro et M. Kluyver. L'auteur tire grand parti du théorème de Stieltjes que voici :

Si les deux séries $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ *sont convergentes, la première étant absolument convergente, on peut affirmer la convergence de la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ *où* γ_n *est la somme*

$$\sum_{d \mid n} \alpha_d \beta_{\frac{n}{d}}$$

étendue à tous les diviseurs d du nombre naturel n.

Il démontre aussi un théorème du même genre où les deux premières séries sont convergentes et ont des termes du type $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Signalons, par exemple, les formules

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\chi(n)\lambda(n)}{n} = \frac{\pi}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n} = \frac{4}{\pi},$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\chi(n)\lambda(n)2^{\nu(n)}}{n} = 2,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\chi(n)\varphi(n)}{n^2} = \frac{\pi}{4\,\mathrm{L}(2)}, \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\chi(n)2^{\nu(n)}}{n} = \frac{1}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda(n)f(n)}{n} = -\frac{\pi^2}{6},$$

. . . .

Dans ces formules $\lambda(n)$, $\mu(n)$, $\nu(n)$, $\varphi(n)$ ont les significations qui ont été spécifiées antérieurement. $f(n)$ est le nombre de décomposition de n en une somme de deux carrés de nombres positifs; $\chi(n)$ est le caractère non principal de n relativement au module 4, c'est-à-dire que $\chi(n)$ est égal 0, 1, 0, -1, suivant que le reste de n, par rapport au module 4, est 0, 1, 2, 3.

La dernière Partie est consacrée à des questions d'une tout autre nature; l'auteur commence par établir l'intéressante proposition que voici :

Soit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

une série de Dirichlet, dans laquelle les coefficients a_n sont positifs ou nuls, et soit α le nombre tel qu'elle converge pour $s > \alpha$ et qu'elle diverge pour $s < \alpha$: α est un point singulier de la fonction analytique définie par la série pour $s > \alpha$.

M. Landau fait intervenir cette proposition dans la démonstration du théorème suivant, énoncé par Tschebyschef et démontré en 1891 par M. Phragmén, puis en 1905 par lui-même :

Si de la totalité des nombres premiers de la forme $4n+3$, inférieurs ou égaux à x, on retranche celle des nombres premiers de la forme $4n+1$, qui ne dépassent pas la même limite, et qu'on divise ensuite la différence par la quantité $\frac{\sqrt{x}}{\log x}$, on trouvera plusieurs valeurs de x telles que ce quotient s'apvrochera de l'unité aussi près qu'on le voudra.

M. Landau donne diverses généralisations du théorème de Tschebyschef.

Signalons encore les propositions suivantes, où Θ désigne la borne supérieure de la partie réelle des racines imaginaires de $\zeta(s)$, où c est un nombre plus grand que la plus petite valeur absolue de ces mêmes racines, où enfin $\rho(x)$ est égal à

$$\sum_{p^m \leq x} \frac{1}{m} = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \ldots .$$

Si l'on se donne le nombre positif δ, chacune des inégalités

$$f(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} > x^{\Theta-\delta},$$

$$f(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} < -x^{\Theta-\delta},$$

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} + \frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log u} > x^{\Theta-\delta},$$

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} + \frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log u} < -x^{\Theta-\delta},$$

$$f(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} > \frac{1}{c}\frac{\sqrt{x}}{\log x},$$

$$f(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} < -\frac{1}{c}\frac{\sqrt{x}}{\log x},$$

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} + \frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log u} > \frac{1}{c}\frac{\sqrt{x}}{\log x},$$

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} + \frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log u} < -\frac{1}{c}\frac{\sqrt{x}}{\log x},$$

est vérifiée par quelque valeur de x aussi grande qu'on le veut.

Ces propositions ont été établies pour la première fois par M. E. Schmidt; les démonstrations de M. Landau sont plus simples; on lui doit, en outre, d'avoir diminué de moitié la valeur de c qu'avait indiquée M. Schmidt.

Malgré son très grand intérêt, malgré les propriétés nouvelles, relatives à la fonction $\zeta(s)$ qu'on y trouve, je ne reviendrai pas sur le sixième Livre, dont j'ai déjà dit qu'il contenait une théorie générale des séries de Dirichlet.

J'aurais souhaité que le présent compte rendu, en dépit de tout ce qui lui manque, pût donner aux lecteurs du *Bulletin* quelque idée de l'importance et de l'intérêt de l'Ouvrage de M. Landau; mais je suis bien convaincu que ceux qui étudieront cet Ouvrage seront les seuls à en goûter vraiment les qualités : ce sera leur récompense.

J. T.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HÖFLER (A.). — DIDAKTIK DES MATHEMATISCHEN UNTERRICHTS. 1 volume in-8, XVIII-510 pages. Leipzig, Teubner, 1910.

Ce Volume est le premier d'une collection destinée à perfectionner l'enseignement des sciences dans les écoles réales; il est entièrement consacré aux Mathématiques. Il présente dans les grandes lignes le programme élaboré par la Commission d'enseignement de la *Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aertze*. Mais son but principal est de fournir au professeur, pour l'application des nouveaux programmes, une sorte d'aide-mémoire illustré d'une foule d'exemples concrets.

L'Ouvrage comprend trois parties :

I. But de l'enseignement des Mathématiques. Plan d'ensemble;

II. Développement du plan d'études;

III. Considérations psychologiques sur l'enseignement des Mathématiques et la culture, en général.

L'enseignement des Mathématiques, pour des jeunes gens de 10 ans à 18 ans, est divisé en trois cycles : 10-13; 13-16; 16-18. Les matières enseignées sont à peu près celles qui le sont dans nos Lycées, jusque, et y compris, la classe de Mathématiques spéciales. Cependant, il s'y trouve sensiblement moins de Géométrie, surtout de Géométrie analytique, et aussi moins d'Analyse.

Ce qui frappe dans ce Livre, c'est le caractère réaliste donné aux méthodes. L'auteur ne craint pas de descendre dans les moindres détails d'exposition, ce qui lui donne l'occasion d'observations souvent fort judicieuses.

Cet Ouvrage pourra intéresser tous ceux qui s'occupent de questions pédagogiques et qui tiennent à être au courant des idées professées à ce sujet à l'étranger.

CERF.

BOCHER (M.). — Einführung in die höhere Algebra. 1 volume in-8, XII-348 pages. Leipzig, Teubner, 1910.

Le *Bulletin* a rendu compte récemment [1] de l'excellente *Introduction to higher Algebra* de M. Maxime Bôcher. « L'auteur l'a écrite pour répondre aux besoins des étudiants américains; mais ces besoins sont les mêmes, sans doute, dans tous les pays. » Que ce Livre réponde aux besoins des étudiants allemands, c'est assurément l'opinion de M. Hans Beck qui l'a traduit, de M. E. Study qui a mis une intéressante préface à cette traduction, de la maison Teubner qui l'a publié. J'ai expliqué jadis comment il répondait aussi aux besoins des étudiants français, qui pourront le lire maintenant dans le texte allemand ou dans le texte anglais.

J. T.

CAPELLI (A.). — Istituzione di Analisi algebrica. Quarta edizione notevolmente ampliata. 1 volume in-8, XXVIII-953 pages. Naples, Pellerano, 1909.

Le *Bulletin* a rendu compte en 1903 [2] de la troisième édition de ce gros livre où, en un peu moins de mille pages, les théories les plus fondamentales de l'Arithmétique, de l'Algèbre et de l'Analyse sont exposées avec rigueur et clarté : presque tous les paragraphes sont suivis d'un grand nombre de notes et d'exercices qui permettent au lecteur de compléter ses connaissances, de s'assurer qu'il sait s'en servir et, par là même, de se les assimiler plus parfaitement; enfin de s'initier quelque peu au travail de recherches. Ces *Istituzione* sont très bien adaptées aux besoins des étudiants des Universités et le succès qu'elles paraissent avoir obtenu auprès d'eux n'a rien que de naturel.

La quatrième édition comporte quelques changements

La théorie de la divisibilité des polynomes a été étendue aux polynomes à plusieurs variables. Cette extension est aussi indis-

(1) Voir *Bulletin*, t. XXXII_1, 1908, p. 36.

(2) Voir *Bulletin*, t. XXVI_1, p. 207.

pensable à la Géométrie analytique (algébrique) qu'à la pure Algèbre.

Le Chapitre sur la continuité et les dérivées a été notablement augmenté de façon à devenir une véritable introduction au Calcul infinitésimal.

Dans le Chapitre suivant, l'auteur introduit les fonctions circulaires et hyperboliques et développe leurs propriétés, en partant des séries.

Deux Chapitres consécutifs portent l'un sur les fondaments de la théorie des séries de puissance, l'autre sur la théorie des fonctions elliptiques; de cette façon, la théorie des fonctions analytiques, où le lecteur a été introduit par le premier Chapitre, trouve immédiatement une de ses plus belles applications. On remarquera la façon élégante dont M. Capelli, après avoir établi le théorème de Jacobi sur les produits de quatre fonctions $\mathfrak{S}$, en déduit des formules simples et générales pour l'addition de ces fonctions. Les propriétés des fonctions sn, cn, dn sont déduites des propriétés des fonctions $\mathfrak{S}$. L'auteur, qui estime que ces diverses fonctions doivent aujourd'hui trouver quelque petite place dans les Livres destinés à exposer les fondements de l'Analyse, a su, en une trentaine de pages, en faire ressortir le caractère et l'importance.

J. T.

SYLVESTER. — THE COLLECTED MATHEMATICAL PAPERS OF JAMES JOSEPH SYLVESTER, Volume III (1870-1883), in-4, xv-648 pages. Cambridge at the University Press, 1909.

Lors de l'apparition du premier Volume des Œuvres de Sylvester, en 1904, nous avons déjà rendu compte (*Bulletin*, t. XXVIII, p. 265) de tout ce que la Science doit au penseur original et profond, au puissant esprit dont le nom demeurera associé à ceux de Cayley et d'Hermite dans l'histoire de la création de l'Algèbre moderne; nous avons dit aussi tout l'intérêt que présentait, pour la génération nouvelle, la réunion en un faisceau de tous les Mémoires si originaux et si variés du grand géomètre anglais.

Le présent Volume, qui comprend toute la période de 1870 à 1883, a été édité par M. H.-F. Baker avec le même soin que le premier. Il comprend surtout un très grand nombre de travaux relatifs à l'énumération et à la constitution du système complet d'invariants et de covariants fondamentaux relatif à une forme donnée où à un ensemble de formes. Mais il contient aussi plusieurs Mémoires traitant de sujets tout différents, par exemple les études si intéressantes relatives au mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe et à la représentation de Poinsot, des recherches sur la théorie atomique et ses rapports avec les invariants des formes binaires, sur les équations algébriques dont les racines sont réelles, sur le criterium de Newton relatif au nombre des racines imaginaires, sur différentes espèces de déterminants, sur la partition des nombres, sur les séries de Farey, etc. Quelle que soit la branche d'études dont il s'occupe spécialement, tout géomètre trouvera ici de quoi retenir et captiver son attention.

G. D.

SCHUR (Fr.). — GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE. 1 volume in-8, x-192 pages. 63 figures. Leipzig et Berlin, Teubner, 1909.

M. Schur a voulu dans ce Livre édifier la Géométrie projective indépendamment de l'axiome d'Euclide et de l'axiome d'Archimède. Par Géométrie projective, M. Schur entend l'ensemble des propriétés (par exemple : les propriétés d'homographie, d'involution, d'homologie, etc.) qui, dans la Géométrie ordinaire, sont invariantes pour toute transformation linéaire, en particulier pour toute projection.

Pour démontrer que de telles propriétés étaient indépendantes des trois postulats précités, l'auteur aurait pu énoncer une liste des postulats de la Géométrie, vérifier leur indépendance et montrer qu'en éliminant les trois axiomes en question on pouvait retrouver les théorèmes fondamentaux de la Géométrie projective. C'est la marche qu'a suivie M. Hilbert pour des questions analogues, par exemple pour son extension des démonstrations de MM. Lie et Poincaré sur l'indémontrabilité de l'axiome d'Euclide. Une telle

méthode aurait réduit le Livre à n'être qu'une démonstration. M. Schur a préféré — avec raison, me semble-t-il — procéder autrement. Il énonce une liste de postulats qui lui suffisent pour édifier une Géométrie projective et montre que dans la Géométrie ainsi construite on peut à volonté supposer vérifiés ou non vérifiés les axiomes d'Euclide et d'Archimède.

L'auteur n'a pas la prétention d'avoir choisi des principes fondamentaux indépendants. Comment, dit-il, vérifier une telle indépendance, alors que les notions nécessaires pour l'énoncé de l'un résultent forcément de l'énoncé du précédent? Cette difficulté dont M. Hilbert ne fait pas mention ne semble cependant pas lui avoir échappé, car dans son Mémoire il ne démontre pas l'indépendance de *ses axiomes*, mais bien de *ses groupes d'axiomes*.

Toujours sur le choix de ces mêmes postulats, l'auteur fait d'autres remarques intéressantes à signaler. Il a voulu choisir autant que possible des propriétés *expérimentales*. Il rejette pour cette raison la notion d'espace multiplicité à trois dimensions : les propriétés générales de l'espace (homogénéité, isotropie, etc.). La notion générale de surface et de ligne lui semble encore trop compliquée, car, dit-il, il y a des surfaces qui ne limitent pas des corps et des lignes qui ne limitent pas des surfaces. Il se servira uniquement de la seule notion de point, de droite et de plan, et plus tard définira une figure comme un *ensemble* de points, de droites et de plans.

Dans le premier Chapitre sont énoncés les postulats de la droite et du plan, ou plus exactement des segments et du triangle, ceci afin d'éviter l'introduction, dès le début, des points à l'infini. Ces postulats correspondent aux groupes 1 et 2 d'Hilbert (association et distribution). Deux points en déterminent une infinité d'autres formant un *segment* (Strecke) et cette quasi-définition est suivie d'un certain nombre de propriétés faciles à imaginer (axiomes, théorèmes et définitions) sur la superposition et l'intersection de deux segments et le *prolongement* (Verlängerung) d'un segment. La ligne droite étant alors définie par un segment et ses deux prolongements, on admet l'existence de trois points non en ligne droite et l'intérieur d'un triangle est défini par le postulat : M étant à l'intérieur de ABC, les segments AM, BM, CM ont respectivement un point de leur prolongement sur BC — CA — AB. L'existence des

points extérieurs étant une conséquence du prolongement d'un segment, le plan est défini : l'ensemble des points des droites coupant un triangle. Enfin, ayant admis l'existence d'un point en dehors d'un plan, on peut démontrer l'existence de l'intérieur et de l'extérieur d'un tétraèdre, ce qu'on appelle l'*espace* et il suffit d'énoncer un dernier postulat négatif sur la non-existence d'un point en dehors de l'espace (la Géométrie est à trois dimensions).

Dans le deuxième Chapitre, M. Schur, suivant en cela des idées de Klein et de Pasch, introduit les éléments *idéaux*. Une droite et un plan ou deux droites d'un même plan permettent de définir une *gerbe* de droites (Bündel) telles que deux droites quelconques de la gerbe soient dans un même plan et que, par un point de l'espace, il passe une droite de la gerbe. Toutes les droites de la gerbe peuvent avoir un point commun, sinon on dit qu'elles définissent un point *idéal*. Une droite *idéale* sera définie de même par deux points idéaux ou deux plans définissant un faisceau (Buschel) de plans sans droite commune; enfin trois points idéaux ou réels n'appartenant pas à une même droite idéale ou réelle définissent un *plan idéal*.

L'ensemble de tous les éléments réels et idéaux constitue un système sans contradiction vérifiant les axiomes énoncés et pour lequel on peut énoncer sous sa forme projective le théorème sur les triangles homologiques (théorème de Desargues d'après MM. Schur et Hilbert). L'introduction des éléments idéaux revient en somme à introduire les *éléments à l'infini* dans la Géométrie d'Euclide, et les éléments du *domaine extérieur* dans la Géométrie de Lobatchefski; enfin ces éléments n'existeraient pas dans la Géométrie de Riemann.

Le troisième Chapitre est consacré aux postulats du déplacement et à leurs conséquences. Un déplacement est une correspondance entre points telle qu'aux points d'un segment correspondent les points du segment correspondant. L'existence d'une telle correspondance, ainsi que la composition de deux déplacements constituent deux postulats. On trouve en outre un postulat sur la définition d'une figure par un demi-plan, une demi-droite sur son arête et l'origine de cette demi-droite. Enfin deux autres postulats de symétrie sur l'égalité d'un angle à lui-même par retournement, sur l'égalité d'un segment à lui-même. Je n'insiste pas sur les con-

séquences de ces axiomes et je cite seulement le théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit dans deux droites qui joue un grand rôle dans les études de M. Hilbert et de ses élèves plus ou moins directs sur les fondements de la Géométrie.

Le Chapitre IV est consacré à des développements sur les propriétés des projections centrales des correspondances homographiques, sur la notion de « segment projectif », de rapport anharmonique, etc.

Le Chapitre V traite de l'égalité des triangles et de la Géométrie métrique non euclidienne; on y trouve l'introduction de la constante K et de la Trigonométrie générale (Trigonométrie sphérique). L'auteur y énonce le postulat du compas (Zirkelkonstruction) ou de l'existence d'un triangle rectangle connaissant un côté ou l'hypoténuse, ce qui est en somme le deuxième postulat de continuité d'Hilbert ou encore le postulat de Cantor.

Dans le Chapitre VI, M. Schur démontre d'abord la célèbre proposition de Legendre : *Si dans un triangle la somme des angles est inférieure, égale ou supérieure à deux droits, il en est de même pour tous les autres triangles.* En réalité, Legendre avait ajouté que le troisième cas était impossible, mais sa démonstration était basée sur l'axiome d'Archimède que M. Schur ne suppose pas vérifié. Ensuite il démontre la possibilité de chacun des trois cas, dans une Géométrie basée sur les axiomes déjà énoncés, et donne enfin quelques conséquences du postulat d'Euclide.

Dans le Chapitre VIII, on trouve deux formes du postulat d'Archimède, l'une avec un énoncé projectif comme propriété des divisions harmoniques, l'autre avec l'énoncé ordinaire. Une conséquence intéressante est l'identité complète de la définition de la correspondance homographique au moyen des perspectives, donnée dans le Chapitre IV, et la définition de von Staudt par la conservation du rapport harmonique.

Dans le deuxième Chapitre, les éléments idéaux étaient introduits au moyen des considérations de Géométrie de l'espace. Cette introduction peut se faire en Géométrie plane comme conséquence des seuls axiomes et propriétés du plan. Le Chapitre VII est consacré à cette difficile étude.

Tel qu'il est, je ne doute pas que ce Livre intéresse vivement tous ceux qui s'occupent, même accessoirement, des fondements de

la Géométrie. Actuellement de profondes modifications tendent à s'introduire, tant dans l'enseignement que dans notre conception de la Géométrie. On ne peut encore dire jusqu'où iront ni à quoi aboutiront ces tentatives, mais on peut affirmer que le Livre de M. Schur, par son exposé méthodique et simple de nombreuses questions, marquera une des étapes de cette transformation.

A. Châtelet.

AHRENS (W.). — Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Erster Band. 1 vol. in-8° : IX-400 pages.

Il ne faut mépriser ni les énigmes, ni les amusements, ni les jeux mathématiques ; tout cela peut éveiller et piquer la curiosité, obliger à réfléchir et aiguiser la réflexion. Après tout, il y a plus d'un problème dont personne ne contestera le caractère scientifique, qui n'a précisément ce caractère que parce qu'il fait partie d'un ensemble, d'une théorie où il se pose et se résout naturellement ; c'est parce qu'il est isolé, qu'un autre est regardé comme une énigme. Au reste, les amateurs de ces sortes de questions peuvent invoquer, s'ils le veulent, des noms très illustres, parmi lesquels ceux de Leibnitz, d'Euler et de Gauss suffisent sans doute.

Ils se réjouiront de voir l'intéressant Ouvrage de M. Ahrens en arriver à sa seconde édition et de constater que cette seconde édition contient deux volumes, au lieu d'un. Peut-être y ont-ils contribué d'une façon plus ou moins directe, car l'auteur nous dit que, d'une édition à l'autre, il a reçu une foule de lettres de demandes et de renseignements. Toutefois, il a tenu à conserver au Livre son caractère primitif : la seconde édition, comme la première, peut être lue par des personnes qui n'ont pas de culture mathématique spéciale ; de temps en temps, les mathématiciens trouveront un passage écrit en petit texte qui les concerne ; les questions, d'ailleurs, ont presque toujours été choisies en raison de leur intérêt scientifique ; la plupart ont une histoire, que M. Ahrens conte agréablement, et qui rehausse leur intérêt propre.

Chaque Chapitre est orné d'une ou plusieurs épigraphes qui

sont toujours ingénieuses et piquantes : je reproduis ci-dessous les titres de ces Chapitres : ils donneront au lecteur une idée des sujets traités.

Les voyages difficiles. — Un problème de Tait. — Systèmes de numération. — Problèmes de transvasement. — Le parquetage. — Quelques petits amusements. — Les jeux sur l'échiquier. — Le jeu du solitaire. — Le problème des huit reines. — Les cinq reines sur l'échiquier. — Le saut du cavalier.

J. T.

MÉLANGES.

DE QUELQUES MANUSCRITS D'OLE RŒMER;

PAR KIRSTINE MEYER, née BJERRUM.

I. — Ole Rœmer et le thermomètre (1).

Les thermomètres à indication indépendante de la pression de l'atmosphère firent leur apparition dans la dernière moitié du XVIIe siècle; mais c'est Fahrenheit qui donna le premier à ces thermomètres des échelles telles que leurs indications concordaient entre elles. Les thermomètres Fahrenheit furent très admirés et marquaient en effet un très grand progrès. Il y aurait donc, ce me semble, quelque intérêt à démontrer qu'avant Fahrenheit, Ole Rœmer avait résolu le problème en question et que c'est à lui que Fahrenheit était redevable de sa méthode; j'espère que les pages qui suivent mettront en évidence le bien-fondé de cette assertion. Une circonstance qui impose aux compatriotes de Rœmer le devoir de contribuer, autant qu'il est en eux, à son illustration, est le sort funeste qui a pesé sur la publication de ses œuvres scientifiques. Horrebow a décrit d'une manière fort dramatique comment

---

(1) KIRSTINE MEYER, *Temperaturbegrebets Udvikling gennem Tiderne og dets Forhold til vekslende Anskuelser om Varmens Natur* (*Sur le développement de la notion de température à travers les âges et sur son rapport avec les diverses conceptions qu'on s'est faites de la nature de la chaleur*). Copenhague, 1909.

les journaux et Tables des observations astronomiques de Rœmer furent détruits par l'incendie qui ravagea, en 1728, une grande partie de Copenhague; en outre, les nombreuses missions dont Rœmer s'est chargé pour être utile à son pays l'ont empêché de donner des Communications imprimées des résultats obtenus par ses recherches.

Le hasard m'a fait rencontrer, dans la littérature scientifique du XVIIIe siècle, quelques remarques d'où il semble résulter qu'Ole Rœmer s'est occupé de la construction des thermomètres et aussi qu'il a été en relations avec Fahrenheit. J'ai fouillé alors les bibliothèques et les archives de Copenhague pour voir s'il y avait des œuvres inédites de Rœmer. Et, en effet, j'ai trouvé à la Bibliothèque de l'Université les *Adversaria*, in-folio manuscrit à couverture brune (1). Une remarque à la dernière page nous apprend comment ce Livre est devenu la propriété de la Bibliothèque après avoir échappé à l'incendie de 1728. C'est qu'il était resté entre les mains de la veuve d'Ole Rœmer, qui avait épousé en secondes noces Th. Bartholin; en 1739 seulement elle a fait don du manuscrit à la Bibliothèque. Voici la remarque :

« Puisque feu mon mari Olaus Rœmer a fait brocher ces cahiers en parchemin, il me paraît probable qu'il leur a attribué quelque importance, et c'est la raison pourquoi je désire déposer ce volume à la Bibliothèque de l'Université parmi d'autres manuscrits pour le cas où quelqu'un pourrait en tirer profit.

» E. M. BARTHOLIN,
» S. (2) Th. BARTHOLINS.

» *In octobre* 1739. »

Le Livre contient un Mémoire sur le thermomètre auquel se rattachent quelques notices sur son emploi, dont il sera question plus loin. Le principe adopté par Rœmer pour la construction du thermomètre me semble avoir beaucoup d'intérêt : Rœmer est évidemment le premier qui ait construit des thermomètres à *deux points fixes*, *point de fusion de la neige* (*Nix sine gelu et calore*) et *point d'ébullition de l'eau*, et avec division du tube en volumes

(1) La *langue* des *Adversaria* est essentiellement le latin.
(2) S. veut dire défunt.

égaux. Certaines remarques de Rœmer et de Horrebow nous permettent de fixer à 1702 environ l'époque où les opérations en question ont eu lieu : à la page 131 *b* (1) des *Adversaria* se trouve une référence à un article d'Amontons (2) contenant une comparaison entre les indications enregistrées par Amontons et par Newton, respectivement, pour une même série de températures, et Rœmer donne un extrait du Tableau de comparaison, puis il ajoute : « L'observation du commencement de la gelée et du point d'ébullition de l'eau me semble au dernier degré utile pour la construction et la division d'un thermomètre universel, le premier point étant suffisamment fixe et le second méritant, contrairement à mon opinion d'autrefois, qu'on s'y fie sur les observations concordantes et les assurances dignes de foi des Français affirmant que l'eau bouillante ne peut pas augmenter de chaleur une fois l'ébullition commencée. » Il semble donc qu'en 1703 Rœmer était fixé sur le principe. D'autre part, Horrebow a fait, dans le manuscrit des *Adversaria*, des Notices dont nous pouvons conclure que les thermomètres de Rœmer furent construits vers 1702. Horrebow écrit (3) :

« Le 10 avril 1710, je priai la veuve de Rœmer de me dire la date de la construction des cinq thermomètres (4). Elle me répondit qu'ils avaient été construits en sa présence, mais qu'elle ne se rappelait plus aucun événement simultané permettant de fixer la date, si ce n'est que Rœmer avait été obligé de garder la chambre à cause d'une fracture d'os. C'était donc avant 1703, année où je fus admis, en juillet, aux observatoires de Rœmer, car Rumohr, John et d'autres domestiques (5) racontaient qu'il avait été dangereusement malade d'une fièvre traumatique attrapée par suite d'une fracture d'os.

» Le 17 avril la veuve de Rœmer vint chez moi pour me dire qu'elle était sûre maintenant que ces thermomètres avaient été construits en 1702. »

---

(1) Nous désignerons par *a* et *b* les deux côtés (recto et verso) des feuillets du manuscrit.

(2) *Mém. de l'Acad. royale des Sciences*, Paris, 1703.

(3) *Adv.*, p. 118 *b*.

(4) Horrebow a raconté plus haut qu'elle les lui avait apportés.

(5) Disciples attachés à la maison de Rœmer.

Le Chapitre des *Adversaria*, qui traite des thermomètres et de tout ce qui s'y rapporte, va de la page 113 *b* à 118 *b*, occupant en tout 11 pages. La première section est intitulée : *De la mesure des tubes de verre devant servir de thermomètres*. Une page et demie est consacrée à la solution du problème qui consiste à *diviser les thermomètres ayant des boules et des tubes de dimensions différentes d'une manière telle que les divisions soient comparables*, en d'autres termes que, par exemple, le volume de dix divisions soit partout proportionnel au volume du réservoir. Rœmer trouve les diamètres des tubes à l'aide d'une goutte de mercure : il l'introduit dans le tube et y mesure sa longueur, puis il la pèse et calcule son volume en supposant qu'un pied cube de mercure pèse 837 livres. Ceci nous apprend que pour Rœmer la densité du mercure est $13\frac{1}{2}$, car dans le système de mesure dont il se sert la livre équivaut à $\frac{1}{62}$ du poids d'un pied cube d'eau. Après avoir déterminé de la sorte la longueur et le volume de la goutte, Rœmer en calcule le diamètre et, par là, le diamètre intérieur de la partie du tube où se trouve la goutte.

Si nous voyons Rœmer s'occuper chemin faisant de cette détermination des rapports de volume, la raison en est sans doute que beaucoup des savants du temps avaient proposé de construire des thermomètres comparables entre eux d'après ce principe : un point fixe et le tube divisé en volumes égaux qui, dans tous les thermomètres, seraient proportionnels au volume du réservoir. Il admet que, dans un thermomètre où le diamètre du tube est a et celui du réservoir b, la longueur occupée par dix divisions soit c, et il cherche la longueur C de dix divisions d'un autre thermomètre où le diamètre du tube serait A, celui du réservoir B, et où le rapport entre le volume de dix divisions et celui du réservoir serait le même que dans le premier thermomètre. Le développement très circonstancié par lequel Rœmer arrive au résultat peut se résumer ainsi :

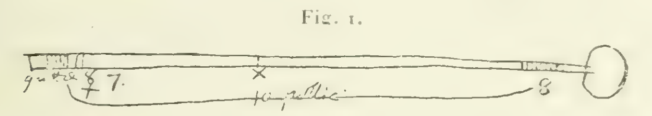
$$\frac{\frac{\pi}{4}a^2 c}{\frac{4}{8.3}\pi b^3} = \frac{\frac{\pi}{4}A^2 C}{\frac{4}{8.3}\pi B^3}, \qquad \frac{c}{C} = \frac{A^2 b^3}{B^3 a^2}.$$

A l'aide de cette équation on peut calculer C en supposant mesurées les autres grandeurs.

Rœmer donne ensuite un exemple chiffré. Enfin il attire l'attention sur le cas où C et B (ou A) étant donnés, on peut calculer A (ou B, respectivement), et il en donne un exemple.

Après ces calculs, Rœmer observe [1] : « Ceci est correct quoique d'une exécution laborieuse; il est vrai que nous n'en sommes guère plus avancés en ce qui concerne notre but principal qui est de déterminer l'irrégularité de la cavité des tubes dont la forme est le plus souvent conique ou encore plus irrégulière.

Fig. 1.

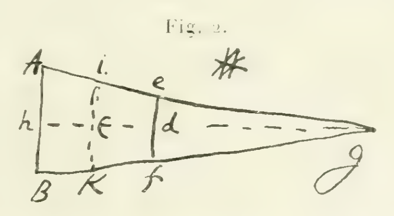


» J'en examine la forme à l'aide d'une goutte de mercure avant de procéder au soufflage de la boule. La cavité du tube ci-dessus mentionné a été trouvée suffisamment régulière, la longueur de la goutte de mercure étant au milieu de $7\frac{1}{2}$, à l'extrémité la plus large de 7, et à l'extrémité la plus étroite de 8 (unités arbitraires). Entre ces (derniers) points il y avait une distance de 10 pouces. *On peut donc considérer cette cavité comme un cône tronqué* [2], sur lequel les divisions thermométriques doivent être marquées (à distances) inégales, c'est-à-dire plus grandes vers l'extrémité la plus étroite et plus petites du côté de la base la plus grande. »

Suivent quelques pages consacrées à la division des tubes coniques en volumes égaux.

Rœmer suppose donné un tube de verre où une goutte de mercure a la longueur 7 à l'une des extrémités AB, et la longueur 8 à

Fig. 2.



l'autre extrémité *ef*; il admet en outre que la longueur du tube soit de 10 pouces et cherche le diamètre x de la section c divisant

(1) *Adv.*, p. 114 *b*.
(2) Souligné par K. M.

le tube en deux volumes égaux. Le problème est résolu d'une manière très circonstanciée ; voici un résumé succinct du raisonnement employé :

Les aires de section des extrémités du tube sont en raison inverse des longueurs données de la goutte de mercure ; leur rapport est donc de 7 : 8 ; les diamètres respectifs sont entre eux comme les racines carrées de ces chiffres. Les trois aires de section considérées sont les bases de trois cônes uniformes dont l'un égale en volume la moitié de la somme des deux autres ; les volumes sont entre eux comme les cubes de lignes correspondantes ; on a donc

$$x^3 = \frac{\sqrt{7^3} + \sqrt{8^3}}{2}, \qquad x = \sqrt[3]{\frac{7\sqrt{7} + 8\sqrt{8}}{2}}.$$

Rœmer expose le problème d'une manière beaucoup plus compliquée et finit par dire, après avoir obtenu le résultat : « Tout cela, je le vois beaucoup plus clairement en pensée que je ne saurais le mettre par écrit. » Puis, comme pour s'assurer qu'il est capable d'exprimer la même pensée d'une façon plus concise, il écrit : *aliter*, et refait en quatre lignes le raisonnement qui demandait tout à l'heure une page entière pour arriver au résultat :

« Les cônes sont comme des cubes, les hauteurs comme des racines cubes. Le grand et le petit cube, ou cône, ont des hauteurs connues ; le cône intermédiaire a un volume connu, moyen des deux autres. Donc sa racine cube est égale à la racine cube de la moitié de la somme des autres. »

Ensuite (¹) le même raisonnement est employé pour trouver cg du cône moyen en admettant que dg soit à hg comme $\sqrt{7}$ à $\sqrt{8}$ et que $dh = 10$. Ces chiffres sont introduits par l'indication suivante : « *Dans mon nouveau thermomètre*, les aires des extrémités, distantes l'une de l'autre de 10 pouces, ont été trouvées être : la plus grande de 8, la plus petite de 7 (unités arbitraires). »

Il donne un exemple type du calcul qui se fait par de simples calculs logarithmiques (6 chiffres) et il trouve

$$\frac{cd}{ch} = \frac{16}{15}.$$

(¹) *Adv.*, p. 115 *a*.

A la même page il donne une Table des valeurs obtenues pour *dc* et *hc* (dont la somme est 10) en supposant données, successivement, dix valeurs différentes du rapport des aires limites, à savoir :

$$\frac{75}{100}, \quad \frac{77\frac{1}{2}}{100}, \quad \frac{80}{100}, \quad \ldots$$

(et ainsi de suite avec des intervalles de $2\frac{1}{2}$).

La page suivante (¹) commence ainsi : « Dans le thermomètre achevé dont il a été constaté qu'il exige pour 60 divisions une longueur de 8 pouces environ, on estimait que la proportion convenable des aires limites était celle de 10 à 9. » A l'aide de calculs analogues à ceux dont nous venons de parler, Rœmer trouve le rapport où sont entre elles les longueurs des quatre troncs de cône superposés qui constituent les quarts du volume du cône tronqué considéré. Ces longueurs sont notées comme étant de 14,417; 14,824; 15,194; 15,563, respectivement; nous en pouvons conclure que le tube entier a été d'abord supposé gradué en 60 divisions de longueur égale. La partie du tube la plus étroite étant la plus rapprochée du réservoir, « le premier quart depuis zéro jusqu'à 15 est de $\frac{15,563}{60}$ », etc.

Rœmer ajoute : « Et il nous faut en rester là pour le thermomètre original. D'une manière générale, on doit toujours et partout suivre une règle invariable, à moins que les expériences ne l'exigent autrement. »

Après avoir fait remarquer que les calculs indiqués pour la division du tube sont corrects, il est vrai, mais qu'on pourrait les désirer plus clairs et plus simples, Rœmer commence la page suivante (²) par une mesure d'attaque qui doit l'encourager à continuer : « Enfin nous sortons du terrain raboteux (³) des chiffres pour entrer dans un chemin praticable. »

Suit un développement qui peut se résumer ainsi : Soit b un plan parallèle aux bases a et c du tube de verre et divisant le tube en deux volumes égaux ; le niveau de b se trouve en introduisant

---

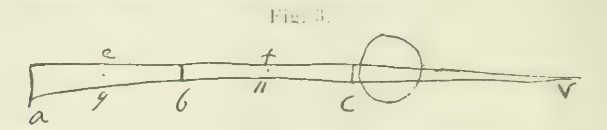
(¹) *Adv.*, p. 115 *b*.

(²) *Adv.*, p. 116 *a*.

(³) Le mot *salebras* est en surcharge ; il y avait d'abord *labyrinthos*.

dans le tube une quantité de mercure égalant en volume la moitié de la cavité du tube. Par ce procédé, qu'il avait d'ailleurs indiqué

Fig. 3.



précédemment, Rœmer arrive à constater que la distance $bc = m$ est plus grande que ab qu'il désigne par $m - d$.

Puis il cherche la hauteur $x = cv$ du cône qui constitue le sommet du tronc de cône représenté par le tube, et il en donne l'expression approchée que voici :

(1) $$x = \frac{2m^2 - 3md - \frac{1}{2}d^2}{d}.$$

Les calculs intermédiaires à l'aide desquels il est arrivé à cette formule ne sont pas notés, mais on peut les reconstituer en employant la méthode indiquée plus haut ; on obtient ainsi l'équation suivante :

(2) $$2(x + m)^3 = x^3 + (x - 2m - d)^3;$$

et si l'on cherche ensuite la valeur x de cette équation en rejetant les puissances de d plus élevées que la deuxième, on aura l'équation (1). Rœmer s'en sert immédiatement après dans un exemple chiffré où $bc = 11$, $ab = 9$, et obtient $x = 89$.

A la page suivante [1], Rœmer établit une formule exprimant d'une manière commode le résultat susdit et indiquant en même temps une méthode à suivre pour le calcul. En introduisant de nouvelles notations : $a = m$, $b = m - d$, il écrit

$$x = \frac{2ab - \frac{1}{2}(a^2 - b^2)}{a - b}.$$

En retranchant du double produit de a et b la moitié de la différence entre a^2 et b^2, il reste $x(a - b)$.

D'après cette formule, il calcule x pour une série de valeurs correspondantes de a et b ayant toutes l'unité pour différence. Puis il calcule les volumes des cônes ayant les hauteurs x, $x + a$,

---

[1] *Adv.*, p. 116 *b*.

$x + a + b$, et s'en sert ensuite pour calculer les volumes des troncs de cônes. Les résultats de ces calculs sont exposés sous forme schématique. Voici un exemple qui permettra de se rendre compte de l'utilité pratique d'un tel schéma :

$a = 2 \square 4$
$b = 1 \square 1$

Différence	3
Moitié.........	$1\frac{1}{2}$
Double produit.	4

$x = 2\frac{1}{2}$ (plus exactement : 2,49705)

Hauteur ou racines carrées.	Cubes.	Troncs de cône égaux.
2,5	15.626	
2		75,500 (302)
4,5	91,125	250
1		75,250 (301)
5,5	166,375	

Les résultats exacts sont indiqués à côté des résultats approchés. C'est également le cas pour les autres exemples où a et b ont des valeurs plus élevées et où par conséquent la différence 1 s'écarte moins de celle qu'on s'attendrait à trouver en pratique. Nous sommes informés, par exemple, que pour $a = 4$, $b = 3$, x sera trouvé égal à 20,5, tandis que la valeur exacte est de 20,4966, et Rœmer (¹) ajoute que cette différence étant sans importance dans la pratique, le résultat obtenu suivant la méthode énoncée précédemment peut être considéré comme suffisamment approché. Pour le cas de $a = 11$, $b = 9$, qui donnait $x = 89$, la valeur exacte est indiquée comme étant de $88,9967\frac{1}{2}$.

A la page 117a on trouve des calculs fournissant la valeur exacte pour le cas où $a = 11$, $b = 9$. Plus loin, à la page 118b Rœmer donne, comme une sorte de supplément, une expression

(¹) M. K. Prytz, professeur à l'École Polytechnique de Copenhague, a attiré mon attention sur ce fait que selon toute vraisemblance certains poids datant du temps de Rœmer sont bien les prototypes confectionnés par Rœmer lui-même pour le nouveau système de mesure qui fut introduit par l'ordonnance du 1er mai 1683. Comme ces poids portent inscrits les mots *Original Lod* (poids original), il y a lieu de croire que *thermomètre original* veut dire *thermomètre normal* et que Rœmer, qui avait déjà introduit des étalons pour les autres mesures, a voulu réaliser un thermomètre étalon.

approchée pour la hauteur du cône moyen des trois cônes susdits; l'approximation s'obtient de la manière ci-dessus décrite.

Évidemment Rœmer a été d'avis que ces indications constituaient une méthode suffisamment commode pour la division d'un tube conique en volumes égaux ; il passe maintenant au problème principal, qu'il avait en vue en résolvant le premier.

A la page 117 *b* on lit cette prescription intitulée : *De la construction d'un thermomètre original :*

« I. Avant de souffler la boule, on examinera à l'aide d'une goutte de mercure si le tube présente une cavité régulière, cylindrique ou conique. Les tubes de forme irrégulière sont rejetés. La forme cylindrique est employée sans examen ultérieur. En ce qui concerne les tubes de forme conique, il faut procéder comme suit :

» II. On mesure les longueurs de la goutte de mercure en allant du milieu du tube vers les extrémités.

» III. Après avoir obtenu à l'aide de cette expérience la bissection (de l'ensemble) des divisions, on subdivisera ultérieurement chacune des parties ainsi obtenues en augmentant ou en diminuant (les longueurs des subdivisions) proportionnellement, et le tube entier se trouvera ainsi divisé en quatre cavités égales.

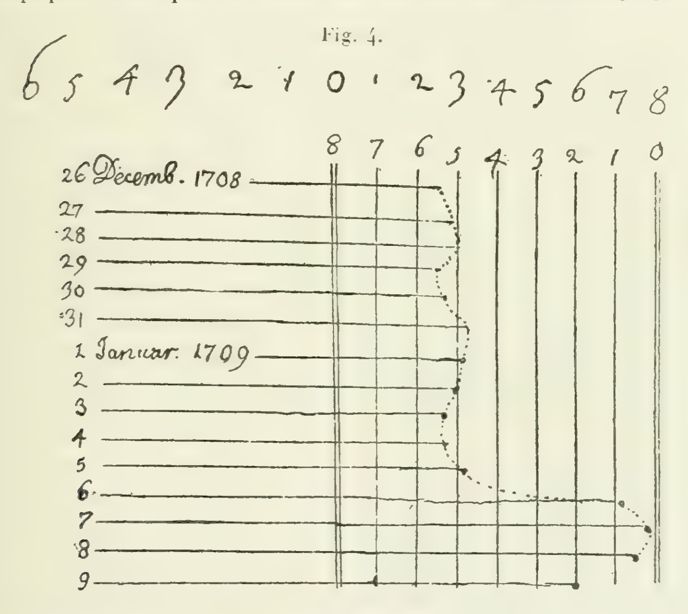
» IV. Après avoir achevé, rempli et fermé le thermomètre, on fixera le point de division $7\frac{1}{2}$ au moyen de la neige ou de la glace pilée, et le point 60 moyennant ébullition. »

Suivent quelques remarques supplémentaires écrites de la main de Horrebow et signées par lui : « ... Rœmer divisa la distance entre la limite de la neige et l'ébullition en 7 parties égales; une partie égale aux autres fut marquée au-dessous du point de neige en vue des températures plus basses, et comme il s'aperçut ensuite que la température baissait au-dessous de zéro, il commença de compter vers le bas 1, 2, 3 en préfixant le signe — .... En 1739, la veuve de Rœmer m'envoya cinq verres thermométriques que Rœmer avait lui-même remplis et divisés par deux points suivant sa règle ci-dessus donnée. L'esprit-de-vin y contenu est d'une couleur assez pâle, quoique Rœmer l'ait coloré par le safran selon son habitude .... Après avoir écrit ces lignes, j'en ai appelé aux

souvenirs de la veuve de Rœmer pour apprendre si Rœmer avait fait des changements à son thermomètre après que j'eus quitté ses observatoires. Elle m'a répondu qu'elle ne le savait pas et m'a donné le *vade-mecum* de Rœmer dans lequel j'ai trouvé un papier qu'on trouvera inséré ici après le feuillet suivant. J'y vois que Rœmer a fixé le point de division 8 à l'aide de la neige ; ainsi, pour autant que nous sachions, l'esprit-de-vin ne baisse jamais au-dessous de zéro à Copenhague, et j'y trouve indiqué que le 7 janvier 1709 l'esprit-de-vin baissa seulement jusqu'à $7\frac{9}{10}$. »

Le papier dont parle Horrebow contient un Tableau graphique

Fig. 4.



des températures relevées depuis le 26 décembre 1708 jusqu'au 1er avril 1709 (¹). Rœmer a relié les points marqués de jour en

(¹) L'hiver 1709 est resté célèbre par sa rigueur. D'après ledit Tableau de températures, il gelait incessamment pendant toute l'époque indiquée. Le maximum, deux fois atteint, fut de 0° Rœmer = — 14°,3 C, ; c'est donc surtout la longue durée de la gelée qui a rendu l'hiver si rigoureux. Dans le *Teatrum Daniæ* de Pontoppidan, nous lisons : « War in diesen und umliegenden Ländern ein überaus harter Winter In denen Wäldern frohr viel Wild zu todt und viele Bäumen gingen aus, ja man hörete von etlichen reisenden die unterweges erstarreten. Auf der Ostsee waren noch im May Monaht gleichsam Landwege von Schletten gebahnt.... »

jour par un tracé pointillé formant une courbe de températures. Nous aurons plus loin l'occasion de revenir sur ce Tableau ; pour donner une idée de son ordonnance, nous en reproduisons ici la première partie. Horrebow a écrit au-dessus : « *Mutaverat ergo Rœmerus primum suum propositum.* »

Les deux pages qui suivent (118a et 118b) contiennent des Tableaux qui sont pour ainsi dire des Tables de corrections se rapportant aux quatre subdivisions du tube ; les grandeurs recherchées sont désignées par r, s et t ; et les deux moitiés du tube, par a et b. La signification de la notation r n'est pas douteuse : d'après Rœmer, $r = \frac{a-b}{2(a+b)}$; la grandeur $100r$ serait donc l'erreur pour cent commise en plaçant le plan bissecteur au milieu de l'étendue $a+b$; aussi Rœmer nous dit-il que r représente l'*æquatio* du tronc de cône $a+b$, tandis que s et t sont les *æquationes* respectives des deux troncs de cône obtenus par la subdivision du tube. D'ailleurs s et t n'ont pas des significations tout à fait analogues à celle de r ; c'est ce qui résulte soit des formules par lesquelles ils sont exprimés, soit des résultats chiffrés indiqués pour différentes valeurs de a et b. On trouve indiquées les valeurs de r, s et t pour des valeurs de b et a allant depuis 1 et 2 jusqu'à 19 et 20, la différence entre a et b étant partout supposée égale à 1. Vient ensuite un petit Tableau où la différence des valeurs b et a est supposée égale à $1\frac{1}{2}$.

Il y a quelque lieu de croire que Rœmer a été sur le point d'adopter le procédé qui consisterait à diviser le tube en longueurs égales et de donner pour chaque thermomètre une Table des écarts que présenteraient les indications du thermomètre d'avec celles du même thermomètre divisé en volumes égaux. Quoi qu'il en soit, l'idée n'a pas été réalisée. Ajoutons que la signification des expressions données pour s et t est obscurcie par l'asymétrie des dénominateurs :

$$s = \frac{a-b}{10a+2b}, \qquad t = \frac{a-b}{10b-2a} \qquad (a > b).$$

Après avoir résumé les onze pages in-folio consacrées par Rœmer à la construction de son *nouveau* thermomètre, il convient d'attirer l'attention sur sa méthode et sur ce qu'elle avait alors de nouveau.

La méthode Rœmer est surtout caractérisée par le fait de baser la division du thermomètre sur deux points fixes correspondant l'un à la température de la neige fondante, l'autre à celle de l'eau bouillante, et de trouver la longueur du degré en divisant la partie du tube située entre ces deux points fixes en volumes égaux. Si le tube est cylindrique, cette distance est divisée en 52,5 parties de longueur égale, et 7,5 divisions pareilles sont portées au-dessous du point de congélation par quoi on trouve le point zéro. Au cas où le tube n'est pas cylindrique, mais conique, on a recours à un examen préalable des dimensions du tube, examen dont le procédé se trouve indiqué à la page 115*b* et par lequel on arrive à connaître le rapport entre la longueur des $\frac{7}{8}$ du volume situés immédiatement au-dessous du point d'ébullition et toute la longueur occupée par les 60°. Dans l'exemple qu'examine Rœmer à la page 115*b*, le rapport est tel que l'unité de longueur dont il se servira pour la graduation du tube se trouve en divisant la distance entre les deux points fixés en 52,2 parties égales, et il arrive au point zéro en portant au-dessous du point de congélation 7,8 segments égaux aux premiers. Pour se servir d'un tel thermomètre à tube conique, il faut donc avoir, à côté, un Tableau donnant les équivalents, en degrés, des valeurs observées. La valeur de 7,8, relevée au thermomètre Rœmer, correspondait par exemple à la température corrigée de 7°,5 ; 15,563 équivalait à 15°, etc. Peut-être faut-il voir dans les Tables relatives à *r*, *s* et *t*, dont il a été question plus haut, des Tables de correction de ce genre. Pour obtenir que le point d'ébullition et le point zéro fussent placés aux extrémités du tube, où les dimensions de celui-ci avaient été examinées, et que le point de congélation fût séparé du réservoir par une distance d'au moins $\frac{1}{8}$ de la longueur du tube, Rœmer devait maintenir un rapport convenable entre le diamètre de la boule et celui du tube. Or il résulte des calculs par lesquels commence le Chapitre sur les thermomètres qu'il était parfaitement capable de résoudre ce problème.

Les thermomètres de Rœmer existèrent encore en 1748 [1],

---

[1] Dans le *Nordisk Universitets Tidsskrift* (t. III, 1859) a paru un article sur Ole Rœmer par E. Philipsen. On y lit, dans une Note de la page 52 : « De ses divers instruments ou machines, il existe encore, outre les débris d'un baromètre

puisque Horrebow écrit dans ses *Elementa philosophiæ naturalis,* p. 144, qu'il a reçu de la veuve de Rœmer cinq thermomètres construits en 1702 et qui sont encore en sa possession. Dans une Notice insérée dans les *Adversaria* (1), Horrebow raconte qu'il en a fait l'objet d'un examen :

« Au commencement du mois d'avril 1741, j'ai détaché de leurs échelles les cinq thermomètres de Rœmer; je les ai examinés ensuite dans la neige et dans l'eau bouillante et, après tant d'années, je trouve les mêmes points exactement qu'avait marqués Rœmer à l'aide d'un caillou. »

Si nous essayons de nous expliquer quel a été le but que poursuivait Rœmer en employant son temps si précieux à la construction d'un thermomètre *originæl*, trois questions se posent aussitôt :

1° Quel rapport peut-il bien y avoir entre cette entreprise et les autres œuvres scientifiques ou pratiques de Rœmer?

2° Rœmer s'est-il servi des thermomètres ainsi construits pour des mesures systématiques?

3° Quelle a pu être l'influence exercée par les idées nouvelles de Rœmer sur la construction améliorée des thermomètres en général?

Je tâcherai de répondre à ces questions dans l'ordre indiqué (2).

A la première question il nous faut répondre par l'affirmative. Nous trouvons en effet dans les *Adversaria* des indices qui portent à croire que Rœmer s'est appliqué, pour deux raisons différentes, à déterminer la dilatation par échauffement des métaux : il s'agissait pour lui de préciser les changements provoqués par les variations de température : 1° dans l'arc gradué d'un instrument installé à son *Observatorium domesticum* et 2° dans la durée d'oscillation du pendule. Cet intérêt pour le mouvement pendulaire a pu lui être inspiré soit par ses travaux d'Astronomie, soit par ses études relatives à l'établissement des étalons de poids et mesures. En effet Rœmer méditait, de concert avec Picard, l'introduction d'un *pes*

---

et d'un thermomètre de sa propre construction qui appartiennent à la collection conservée dans l'ancien Musée d'art.... » (Les débris en question ne nous sont pas parvenus.)

(1) *Adv.*, p. 118 *b*.

(2) On donnera sous peu une réponse plus détaillée à ces questions dans *Archiv. f. Geschichte der Naturwissenschaften*, II. Leipzig, 1910.

universalis par rapport auquel on exprimerait les étalons de mesure linéaire adoptés par les divers pays. Ils se proposaient d'employer comme unité la longueur du pendule à seconde qu'ils croyaient identiques à elle-même en tous les points de la surface terrestre, les mesures entreprises à Paris par Picard, à Uranienborg avec l'assistance de Rœmer, et à Londres par Rœmer, ayant toutes donné la même valeur.

La page 67 des *Adversaria* traite « des changements de longueur déterminés dans les métaux par le froid et par la chaleur, observations faites le 12 décembre 1692 trois ou quatre fois » ([1]). Il ressort du texte que Rœmer s'intéresse particulièrement à ces questions de mesure à cause d'un instrument de mesure astronomique qu'il avait installé à l'une des fenêtres de son *Observatorium domesticum*. Par instrument de mesure il faut entendre sans doute sa célèbre lunette méridienne qui se trouve représentée dans la *Basis astronomiæ* de Horrebow. On y voit à côté de la lunette une pendule dont on a dû se servir pour les observations et probablement c'est à ladite pendule que se rapporte la page suivante des *Adversaria* où se lit un calcul de l'influence exercée par les variations de température sur la durée d'oscillation d'un pendule de fer long d'environ 38 pouces danois, soit de 456 lignes. Rœmer admet que la durée d'oscillation est proportionnelle à la racine carrée de la longueur et il montre d'abord qu'en diminuant la longueur du pendule de 1 ligne on déterminera, en 1 heure, dans le nombre d'oscillations, une augmentation égale à la diminution qu'on produirait en augmentant la longueur d'autant. Puis il donne un Tableau contenant les valeurs calculées des changements du nombre oscillatoire qui correspondraient par jour et par heure aux changements de longueur comprises entre 1 ligne et $\frac{1}{100}$ de ligne. Enfin le résultat est établi : « Le pendule de fer varie, comme je l'ai montré à la page précédente, de $\frac{1}{100}$ de ligne pour chaque degré du thermomètre; or une variation de $\frac{1}{100}$ de ligne augmente ou diminue l'allure de 1″ en 24 heures. »

En outre, on voit à la page 5 des *Adversaria* une esquisse schématique d'un appareil destiné aux mesures comparatives de la dilatation de l'air et des liquides par la chaleur ; et il nous a été conservé

(1) L'en-tête est en danois. Dans les pages suivantes des *Adversaria* on trouve par-ci par-là des remarques écrites en danois.

une série de mesures de la température à Copenhague faites avec le nouveau thermomètre pendant l'hiver 1709. Comme nous l'avons vu plus haut (p. 83), un feuillet contenant ces mesures a été trouvé dans le carnet de Rœmer par son disciple Horrebow, qui l'a inséré ensuite dans le manuscrit des *Adversaria* où il se trouve actuellement. Les mesures en question présentent un intérêt particulier, aussi en a-t-il été fait mention à l'étranger. Sur la rigueur de l'hiver 1709 en Danemark, W. Derham écrit, dans un article intitulé *The History of the Great Frost in the Last Winter* (¹) qui a été publié dans les *Philosophical Transactions* n° 324, 1709 : « Le Dr Woodward me raconte que, dans une lettre datée de Copenhague, Otto Sperling décrit l'hiver comme ayant été excessivement rigoureux (*Hyems atrocissima*). Et je trouve dans les *Diverses Communications* du *Bulletin de la Royal Society* du 4 mai 1709 une Notice d'après laquelle le Dr Judichar aurait dit que la glace avait atteint une épaisseur de 27 pouces dans le port de Copenhague et que le 9 avril N. S. de la même année on pouvait faire le trajet de Scanie en Danemark sur la glace. Ceci me donne meilleure opinion de certains papiers, actuellement en ma possession, qui ont été présentés à la Royal Society et où il est question de la gelée à Copenhague. On les disait fondés sur les observations de Rœmer, et si j'étais seulement convaincu de leur authenticité je ne me méfierais certainement pas des instruments et observations de ce savant éminent, mais certains passages et remarques les rendaient suspects à moi et à plusieurs autres personnes. Dans ces papiers il est dit que de mémoire d'homme il n'y a pas eu de gelée aussi forte dans ces régions *et que le* 23 *février* 1708-9 *la gelée atteignit presque la température de la congélation artificielle* (²). »

Que si nous regardons (³) le Tableau que donne Rœmer lui-même des basses températures observées en 1708-9, nous constatons qu'il va du 26 décembre 1708 au 9 avril 1709. Notons pourtant qu'à partir du 1er avril la température n'a pas été enregistrée pour chaque jour; la raison en est probablement que le Tableau ne devait contenir que des températures inférieures à 8°. Les remarques

(¹) Un résumé de cet article a été publié dans les *Phil. Trans.*, 1700-1720; dir. Henry Jones.

(²) Souligné par K. M.

(³) *Adv.*, fig. 16.

marginales sont écrites de la main de Horrebow. En haut nous lisons : « Rœmer s'était donc ravisé ([1]). » A en juger par d'autres remarques faites par Horrebow dans les *Adversaria*, il entend dire par là que Rœmer avait marqué 8 le point de la glace fondante qui dans le thermomètre dont il a été question plus haut, était marqué $7\frac{1}{2}$. Comme Rœmer ne s'est pas prononcé sur ce point, il serait peut-être un peu hasardé de conclure avec Horrebow que, puisque le Tableau ne peut recevoir que des températures de moins de 8°, c'est donc que 8 marque la *limite de la gelée*, comme on disait alors. On serait tout aussi fondé à croire qu'ayant décidé de relever les températures plus basses que celle de la glace fondante et ayant marqué cette dernière $7\frac{1}{2}$, Rœmer avait admis dans son Tableau le premier tracé de nombre entier qui se trouvait au delà du point limite. Cependant on peut alléguer en faveur de la manière de voir de Horrebow ce fait qu'au-dessus de la rangée de chiffres 8, 7, 6, ..., 0, qui indique les degrés du Tableau, s'en trouve une autre : 0, 1, 2, ..., 8, écrite, autant que je peux le voir, de la main de Rœmer et dont le zéro est exactement superposé au 8 de la rangée inférieure. C'est bien par zéro que Rœmer et ses contemporains devaient trouver naturel de représenter la limite entre la chaleur et le froid. En outre, la possibilité n'est pas exclue que Horrebow ait pu trouver dans le carnet dont le Tableau faisait originairement partie, des renseignements relatifs à ce point et, certes, il n'aurait pas été fâché de constater que Rœmer avait lui-même modifié sa première division, car il avait de son côté grande envie d'en appliquer une autre aux thermomètres de Rœmer et n'était retenu que par la vénération qu'il portait au maître.

Il ressort du Tableau qu'au 23 février (c'est justement la date signalée par Derham) le thermomètre accusait une température voisine du zéro de Rœmer. L'expression dont se sert Derham en relatant ce fait mérite d'être remarquée ; il raconte « que le 23 février 1708-9 le froid atteignit presque la température de la congélation artificielle ». Si Derham admet que la température en question était celle de quelque mélange réfrigérant, c'est sans doute qu'il en a été informé par le rapport qu'on lui avait adressé de

---

([1]) *Voir* plus haut, p. 83.

Danemark, et sa remarque a donc une certaine importance pour la question du rôle joué par le thermomètre Rœmer dans l'histoire du thermomètre. Je vais tâcher d'y répondre en établissant l'influence exercée par Rœmer sur Fahrenheit.

Commençons par citer quelques témoignages directs dont le plus important nous est fourni par Boerhaave, qui écrit au sujet du thermomètre Fahrenheit : « Or, on nous apprend qu'en l'an 9 de ce siècle l'éminent mathématicien Rœmer a observé à Dantzig des froids d'hiver atteignant le premier degré de ce même thermoscope *dont il était le premier inventeur*. Ensuite il (Fahrenheit) l'a augmenté de 32° au-dessous du point de congélation. » Nous sommes donc informés en propres termes que Rœmer est le premier inventeur du thermomètre Fahrenheit, et le témoignage de Boerhaave est d'autant plus digne de foi qu'il avait entretenu avec Fahrenheit des relations suivies. C'est Fahrenheit qui avait construit les thermomètres dont il se servait, et Boerhaave a souvent parlé avec admiration de son habileté comme constructeur d'instruments et comme expérimentateur. Quant aux mesures faites par Rœmer à Dantzig, Boerhaave se trompe probablement, et son erreur s'explique si, comme nous allons le voir ([1]), d'autres ont effectué des mesures à Dantzig, dans cette même année, avec un thermomètre semblable au sien. En tout cas je n'ai trouvé aucun indice portant à croire que Rœmer eût fait un séjour à l'étranger à cette époque, et je ferai observer qu'outre la faible santé de Rœmer et les nombreuses fonctions dont il était chargé, il y a un fait qui semble plaider contre cette hypothèse, c'est à savoir la liste de températures observées à Copenhague en 1709 qui fut adressée à la Royal Society.

D'autre part, on lit dans une biographie ([2]) de Fahrenheit écrite 4 ans après sa mort, qu'après 1706 il entreprit plusieurs voyages fatigants par mer et par terre et qu'il s'entretint alors avec les mathématiciens les plus célèbres du Danemark et de la Suède. Il est donc probable qu'Ole Rœmer est du nombre des savants qu'il est allé voir, et, selon toute vraisemblance, sa visite a eu lieu

---

([1]) *Voir* p. 93.

([2]) Un fragment de cette biographie a été publié dans le *Altpreuss Monatsschrift*, t. II, 1874.

à un moment où Rœmer se servait du « thermomètre original ». Cette circonstance, jointe au témoignage de Boerhaave, nous autorise à chercher dans le thermomètre de Fahrenheit les traces d'une influence rœmérienne, en dirigeant surtout notre attention sur les deux principes déjà adoptés par Rœmer : celui des deux points fixes ; et la division du tube en degrés de volume égal. Or, la description très sommaire que donne Fahrenheit (1) de la méthode suivie par lui pour la construction du thermomètre nous apprend qu'il se sert de points fixes comme base de la division du tube. Seulement, chez Fahrenheit, ces points sont au nombre de trois : température de la glace fondante ; température d'un mélange réfrigérant; température normale du corps humain. De ces trois points le dernier est évidemment employé comme point de contrôle, Fahrenheit s'en sert pour s'assurer que la température du mélange réfrigérant est toujours la même. Pour ce qui est des deux premiers points fixes, Fahrenheit les doit probablement à Rœmer, puisqu'il ressort du rapport de Derham que le point zéro de Rœmer désignait la température d'un mélange réfrigérant. Nous constatons en outre que les échelles des plus anciens thermomètres Fahrenheit offraient la même notation numérique que celle du thermomètre Rœmer. Ces premiers thermomètres Fahrenheit ont été mentionnés dans diverses publications ; rappelons surtout la description comparative qu'a donnée Grischow (2) des différentes échelles employées.

D'après Grischow (3) et d'autres auteurs (4), Fahrenheit aurait confié à son professeur de Mathémathiques Barnsdorf (de Rostock) le secret de sa graduation du thermomètre en ajoutant qu'une fois instruite du procédé à suivre, la première personne pourrait construire des thermomètres concordants. Grischow nous apprend que cela se passa *circiter* 1712 *nisi jam ante*. Peu de temps après, lorsque Fahrenheit était parti pour Halle et Leipzig, Barnsdorf essaya, en commun avec un collègue, Lange, de faire des thermomètres en se réglant sur sa prescription. L'échelle de ces thermo-

---

(1) *Phil. Trans. London*, vol. 33, 1724, p. 78-84.

(2) *Miscell. Berol.*, t. VI, 1740.

(3) *Loc. cit.*, p. 271.

(4) *Voir* Cotte, *Traité de Météorologie*, 1774, p. 129.

mètres n'était pas tout à fait celle du type Fahrenheit que nous connaissons aujourd'hui, et Grischow nous dit à ce sujet que Barnsdorf se servait sans doute d'une échelle plus ancienne, qui était peut-être l'échelle primitive de Fahrenheit. Le Tableau nous montre que les thermomètres de Barnsdof marquaient $7\frac{1}{2}$ le point de la glace fondante et $22\frac{1}{2}$ la température normale du corps humain. Chacun des degrés était subdivisé en huitièmes. Il me semble que le chiffre $7\frac{1}{2}$ marqué au point de la glace fondante concorde avec les autres indices qui portent à supposer une influence rœmérienne; il est peu probable que deux savants se soient décidés indépendamment l'un de l'autre pour le chiffre $7\frac{1}{2}$. *Le point zéro de Barnsdorf est placé un peu au-dessus de celui des thermomètres postérieurs de Fahrenheit.*

Voici quelques autres témoignages qui plaident en faveur d'un $7\frac{1}{2}$ porté par Fahrenheit au point de la glace fondante et aussi d'un point zéro placé originairement plus haut que dans les thermomètres postérieurs.

En 1737, Dn. Kirch, professeur à l'Université de Berlin, donna (¹) une description d'un thermomètre qu'il avait reçu de Fahrenheit, il y avait alors plus de 20 ans. Nous y lisons que dans ce thermomètre le point de la glace fondante est marqué $7\frac{1}{2}$ et que le point zéro y est porté un peu plus haut que dans les thermomètres plus récemment construits.

Un autre type de thermomètre, qui est peut-être le plus ancien de tous les thermomètres Fahrenheit, semble avoir été basé sur une division à points fixes, essentiellement analogue à celle qui fut employée par Barnsdorf, quoique la notation numérique en diffère sensiblement. Grischow écrit, en 1740, qu'un grand thermomètre construit par Fahrenheit pour l'Académie royale de Berlin avait été fait avec tant de précision qu'après 30 ans il concordait du tout au tout avec le petit thermomètre que Fahrenheit venait d'envoyer d'Amsterdam à Berlin. Ces *petits* thermomètres étaient gradués à l'aide de deux ou trois points fixes et étaient d'ailleurs tout à fait pareils à ceux dont on se sert aujourd'hui. Le *grand* thermomètre a donc également été construit d'après le principe de points fixes, sans cela la concordance mentionnée par Grischow n'aurait

(¹) *Misc. Berol.*, t. V, 1737, p. 129.

pas été possible. Un thermomètre de construction analogue et qui avait été employé pour des observations en 1709 fut retrouvé à Dantzig en 1740; c'est là sans doute un des premiers thermomètres construits par Fahrenheit.

Les thermomètres de ce dernier type étaient apparemment gradués comme ceux de Florence où l'on marquait 90° la température du corps humain; 0° la température d'été; 90° la température la plus basse, qui correspondait donc au point zéro des thermomètres Fahrenheit; et 30° le point de la glace fondante. Entre le minimum et le maximum de cette échelle, il y avait donc $180° = 8.22\frac{1}{2}$; l'espace compris entre le minimum et le point de la glace fondante en contenait $60 = 8.7\frac{1}{2}$, comme dans le thermomètre de Barnsdorf.

En 1714, Fahrenheit construisit deux thermomètres concordants pour le chancelier de l'Université de Halle, le baron Chr. von Wolf, qui en fut extrêmement content et nous en a laissé une description. L'échelle avait 26°; le point 2° était marqué : *maximum de froid;* de là jusqu'au sommet il y avait 24°; le point 8° était désigné par *froid*. Cette division rappelle une échelle donnée par Grischow comme caractéristique des thermomètres Fahrenheit de date plus ancienne. Nous y retrouvons les points 0 — 8 — 24, qui furent plus tard changés en 0 — 32 — 96. Fahrenheit se serait donc écarté de son premier système en mettant 8 au lieu de $7\frac{1}{2}$; nous avons vu plus haut que, d'après Horrebow, Rœmer de son côté aurait fait la même chose. Quoi qu'il en soit, tout porte à croire que c'est bien dans le chiffre bizarre porté par Rœmer pour la température de la glace fondante que nous devons chercher l'origine première de la notation par 32° du thermomètre Fahrenheit.

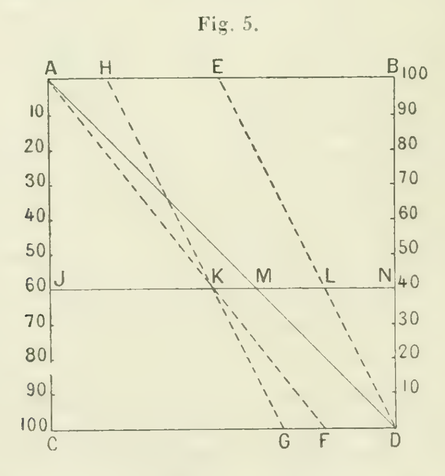
On pourrait objecter que, pour retrouver l'échelle de Rœmer dans celle de Fahrenheit, il faudrait que cette dernière eût le point d'ébullition marqué par 240° (= 4.60) et non pas par 212°. Cependant la notation par 212° s'explique si nous considérons que, d'après les descriptions ci-dessus citées, le point zéro était placé plus bas dans les thermomètres Fahrenheit plus récents que dans ceux de date plus ancienne. En effet, si nous supposons que les plus anciens ont eu un point zéro identique à celui du thermomètre Rœmer, leurs degrés ont dû être d'une longueur inférieure à celle adoptée dans les thermomètres postérieurs, car le même nombre de degrés devait tenir dans un espace plus court. Dans les ther-

momètres de construction plus récente, le chiffre qui devra être marqué vis-à-vis du point d'ébullition est trouvé en divisant la distance entre le point zéro (fixé principalement à l'aide d'un mélange réfrigérant) et le point de la glace fondante en 32 parties égales et en portant au-dessus de zéro des degrés ayant la longueur ainsi trouvée. Comme ces degrés sont plus longs que ceux des premiers thermomètres, leur nombre sera moins considérable sur une même étendue considérée et le point fixe d'ébullition sera marqué 212 au lieu de 240.

II.

Un Chapitre des *Adversaria* traite de l'examen des alliages métalliques par voie hydrostatique. Il se termine par une représentation graphique d'un procédé à suivre pour trouver, par interpolation, les proportions de deux métaux purs combinés dans un alliage, en supposant obtenue par observation la perte de poids de 100 unités pondérales de l'alliage et en supposant connues les pertes respectives de 100 unités pondérales de chacun des métaux purs. Nous reproduisons ci-dessous la figure en question et les Tables auxquelles elle se rapporte avec une traduction mot à mot du texte de Rœmer :

Fig. 5.



« Sur l'examen des alliages métalliques par voie hydrostatique. — Ce sujet a été traité plus haut aux feuillets 1 et 8.

» La Table qui suit montre comment les proportions des mé-

taux composants (c'est-à-dire l'aloi) et les sommes des pertes progressent suivant des séries arithmétiques.

Poids des métaux constituants		Pertes		Total des pertes de l'alliage.
le plus lourd.	le plus léger.	du plus lourd.	du plus léger.	
(Somme des métaux composant 100 unités pondérales).		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	
0	100	0	50	50
10	90	2	45	47
20	80	4	40	44
30	70	6	35	41
40	60	8	30	38
50	50	10	25	35
60	40	12	20	32
70	30	14	15	29
80	20	16	10	26
90	10	18	5	23
100	0	20	0	20
Les parties recherchées de l'alliage.				Obtenu par observation.

» Figure se rapportant à la table :

AB, CD, poids du métal considéré dans l'air ou poids simple;
AE, perte du métal le plus léger, $\frac{1}{2}$;
FD, perte du métal le plus lourd, $\frac{1}{5}$.

» La diagonale AD indique sur les parallèles transversales, telles que par exemple JN, les proportions en poids des métaux mêlés : elle divise en effet ces lignes par des intersections telles que M, de telle sorte que la partie droite MN sera celle du métal le plus léger : 40, et la partie gauche JM sera celle du métal le plus lourd : 60, etc.

» Soit DG, EH la perte observée de l'alliage; on aura, en menant HG, KL égale à la perte observée, et, en menant la parallèle KJN, on trouvera l'intersection M qui détermine l'alliage comme étant composé de JM du métal le plus lourd et de MN du plus léger, car MN perd $\frac{1}{2}$ (ML) et MJ perd $\frac{1}{5}$ (KM), et la somme KL de ces grandeurs est la perte observée de l'alliage, car le triangle

AED retranche toutes les moitiés et le triangle FAD tous les cinquièmes.

» On pourra choisir à volonté la division par 24, 16, 100, etc. pour les lignes AC, BD qui sont ici divisées par 100 — d'autres fois il sera plus commode de les diviser par 16, 32, 64, etc., — et la division par dizaines a été maintenue pour les lignes transversales AB, CD, AE, FD, KL, etc., puisque, aussi bien, le plus souvent, les pertes sont évaluées en dixièmes, centièmes, etc. »

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Gore (J.-Ellard). — *Astronomical Curiosities. Facts and Fallacies.* In-8° (7,75-5), 380 p. London, Chatto. 6 s.

Reye (Th.). — *Die Geometrie der Lage.* Vorträge. III. Abtlg. 4, umgearb. u. verm. Aufl. Gr. in-8°, VII-253 p. avec 3 planches. Leipzig, A. Kröner. 8 m.; relié, 10 m.

Rudaux (L.). — *How to study the stars. Astronomy with small telescopes and the raked eye, and notes on celestial photography.* In-8° (8,25-5,25), 360 p. London, Unwin. 5 s.

Wohlwill (Emil). — *Galilei u. sein Kampf f. die Copernicanische Lehre.* 1. Bd. Bis zur Verurteilg. der Copernican. Lehre durch die röm. Kongregationen. Gr. in-8°, XX-646 p. Hamburg, L. Voss. 14 m.

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München u. Wien, sowie unter Mitwirkg. zahlreicher Fachgenossen. V. Bd. : *Physik*, in 3 Tln. Red. v. A. Sommerfeld. 3. Tl. 2. Heft. In-8°. Leipzig, B.-G. Teubner. 4 m.

Kelvin (Lord). — *Vorlesungen üb. Molekulardynamik u. die Theorie des Lichts.* Deutsch hrsg. v. B. Weinstein. Gr. in-8°, XVIII-590 p. avec 132 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 18 m.

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BACHMANN (P.). — NIEDERE ZAHLENTHEORIE. Zweiter Teil. *Additive Zahlentheorie.* 1 volume in-8°: x-480 pages. Leipzig, Teubner; 1910.

Tous ceux qui s'intéressent à la théorie des nombres connaissent les Livres de M. Bachmann et sont reconnaissants à l'auteur des services qu'il leur a rendus. Le *Bulletin* (1) a rendu compte, lorsqu'elle a paru, de la première partie de sa *Niedere Zahlentheorie;* celle-ci sera aussi la bienvenue et l'on y trouvera la même abondance de faits mathématiques, de renseignements bibliographiques et historiques. Je me contenterai d'indiquer sommairement les matières traitées par M. Bachmann; cette énumération justifiera et expliquera suffisamment l'expression *Additive Zahlentheorie*, qui sert de sous-titre, et que Kronecker employait volontiers pour désigner la sorte de sujets qu'a développés M. Bachmann.

C'est tout d'abord les nombres polygonaux et figurés, les sommes des puissances semblables des nombres naturels, les nombres de Bernoulli et d'Euler, et la suite des belles propriétés arithmétiques des nombres de Bernoulli, qu'on doit à Kummer, à von Standt et à Clausen, à M. Lipschitz, à Stern et à Hermite. On s'occupe ensuite des suites récurrentes, de ces *parenthèses de Gauss* qui interviennent dans la théorie des fractions continues, des suites de Farey, de ces suites que Lucas désignait comme *fonctions numériques simplement périodiques* et qui jouissent de propriétés intéressantes relatives à la divisibilité, du théorème de Lucas sur les nombres premiers de la forme

$$2^{2^p}+1,$$

des nombres parfaits, des nombres de Mersenne, de la décompo-

(1) T. XXVII, 1903, p. 55.

sition d'un nombre en parties, sous certaines conditions, ou de la résolution, en nombres entiers non négatifs, d'équations indéterminées du type

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = s;$$

du lien de ces questions avec le développement de certains produits infinis (Euler), des recherches de Sylvester et de Cayley sur ce sujet, du *Pentagonalzahlensatz* de Legendre-Euler qu'exprime l'égalité

$$\prod_{h=1}^{n}(1 - x^h) = \sum_{n=-\infty}^{n=-\infty} (-1)^n x^{\frac{3n^2-n}{2}},$$

et des recherches, concernant ce théorème, de MM. Franklin, Th. Vahlen, Daublebsky von Sterneck. Les problèmes relatifs à la décomposition d'un nombre en parties s'étendent à la décomposition de deux ou plusieurs nombres (bipartition, etc.). Une autre extension consiste dans l'étude des sommes formées avec des éléments pris dans un ensemble donné de nombres naturels et qui sont congrues à un nombre donné suivant un module donné. Le nombre de ces sommes a été déterminé par Stern dans divers cas particuliers intéressants. M. D. von Sterneck a repris récemment l'étude de cette question.

M. Bachmann traite ensuite de diverses fonctions numériques, en particulier de celles qui représentent la somme des diviseurs d'un nombre ou des puissances semblables de ces diviseurs; de propositions concernant ces fonctions qui ont leur origine dans la théorie des fonctions elliptiques, des théorèmes d'Halphen et de M. Glaisher sur la décomposition d'un nombre en quatre ou en deux carrés.

Un Chapitre est consacré à la décomposition d'un nombre en carrés, en cubes, en nombes polygonaux, à sa représentation par certaines formes ; comme l'auteur ne développe que des méthodes élémentaires, il n'a pu que signaler la démonstration récente du théorème de Waring par M. Hilbert.

La démonstration par Dirichlet du théorème de Jacobi sur le nombre de décompositions d'un nombre en une somme de quatre carrés sert de transition à l'étude de quelques-uns des théorèmes que Liouville a donnés dans ses dix-huit articles *Sur quelques*

formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; M. Bachmann rappelle à propos la façon dont Liouville a voulu caractériser sa méthode sans la dévoiler :

« ... En effet mes formules se rattachent aussi à la théorie des fonctions elliptiques, seulement elles contiennent plutôt cette théorie qu'elles n'en dépendent.... Elles donnent naissance à des équations entre des séries qui contiennent comme cas particulier celles de la théorie des fonctions elliptiques. Cette théorie... se trouve donc ici remplacée pour moi par des formules appartenant à l'algèbre la plus élémentaire, obtenues au moyen de certaines identités des plus simples.... »

Enfin, le Livre de M. Bachmann se termine par un Chapitre sur le théorème de Fermat. On y trouvera diverses propositions sur les triangles et les quadrilatères à éléments rationnels, la méthode de Fermat pour prouver que l'aire d'un triangle rectangle à côtés entiers ne peut être un carré parfait, la démonstration de l'impossibilité de l'équation $x^n + y^n + z^n = 0$, en nombres entiers, pour $n = 3$ (Euler et Legendre) pour $n = 5$ et $n = 7$ (Dirichlet, Lamé, Lebesgue), des indications sur les résultats obtenus par Kummer par la considération des corps algébriques, enfin quelques propositions concernant le cas où p est un nombre premier quelconque, qu'on doit à Legendre, Abel, Sophie Germain et à M. E. Wendt.

J. T.

DZIOBEK (O.). — VORLESUNGEN ÜBER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG. 1 vol. in-8°; VII-648 pages. Leipzig, Teubner, 1910.

Ces leçons de Calcul différentiel et intégral contiennent, avec un peu plus de développements et quelques compléments, ce qu'on enseigne en France sur ce sujet, dans les classes de Mathématiques spéciales et dans les cours de Mathématiques générales : elles s'adressent surtout à un public de futurs techniciens, et l'on sent bien, en les parcourant, que l'auteur à l'habitude de ce public, dont il connaît les besoins. Les explications sont claires, illustrées d'un très grand nombre de figures, les sujets bien choisis, bien disposés et limités judicieusement.

Outre les exemples traités dans le texte, l'auteur indique un assez grand nombre d'exercices.

Il a eu soin d'insister sur les applications numériques. Son Livre peut donc rendre d'excellents services, non seulement à ceux pour lesquels il semble avoir été spécialement écrit, mais encore d'une façon générale, aux étudiants en Mathématiques, puisque, aussi bien, ceux qui étudient les Mathématiques pour les savoir ne doivent assurément pas laisser de côté les Chapitres qui sont utiles aux techniciens.

Bien quelle n'intéresse sans doute pas ces derniers, je me permettrai une légère critique sur un point très particulier. Il est fort naturel, dans un Livre tel que celui de M. Dziobek, de ne pas soulever la question de savoir si le rapport de l'accroissement de la variable tend, lorsque celui-ci tend vers zéro, uniformément ou non vers la dérivée. Mais il convient alors d'éviter soigneusement les démonstrations et les énoncés qui ne peuvent être précisés sans cette distinction et qui, sans elle, risquent d'être mal compris.

J. T.

POINCARÉ (H.). — SECHS VORTRÄGE ÜBER AUSGEWÄHLTE GEGENSTÄNDE AUS DER REINEN MATHEMATIK UND MATHEMATISCHEN PHYSIK. 1 vol. in-8°, 60 pages. Leipzig et Berlin, B.-G. Teubner, 1910.

Ce petit Livre contient six conférences faites à Göttingen, sur l'invitation de la commission du prix Wolfskehl, devant un auditoire de professeurs et d'étudiants, par l'illustre mathématicien français. Sous sa forme concise, c'est une importante contribution à diverses questions d'Analyse pure, de Physique mathématique, d'Astronomie théorique, enfin de Philosophie mathématique.

L'origine même de ce Livre explique pourquoi l'auteur, qui disposait d'un temps très court pour chaque conférence, s'est contenté d'esquisser à grands traits les démonstrations, d'indiquer rapidement les résultats essentiels; mais le Livre, malgré la brièveté avec laquelle les sujets sont traités, est cependant très clairement écrit et l'on saisit nettement les principes qui ont servi de guides, les méthodes générales qui sont appliquées.

1. La première conférence [1] se rapporte à la théorie générale de l'équation de Fredholm. M. Poincaré y démontre d'abord d'une manière extrêmement élégante certaines formules trouvées par Fredholm dans son Mémoire des *Acta* et donne de ces formules quelques applications. Dans le cas où le noyau de l'équation intégrale peut devenir infini, tandis que les noyaux itérés à partir d'un certain rang restent finis, on sait que la méthode de Fredholm s'applique encore, convenablement modifiée, la résolvante de l'équation, fonction méromorphe du paramètre, étant donnée par le quotient de deux fonctions entières qui peuvent avoir un diviseur commun; M. Poincaré indique comment il est possible d'obtenir une forme fractionnaire irréductible et ceci en prenant la formule ordinaire du cas général mais en supprimant dans le développement des déterminants des termes convenablement choisis. Il indique, en outre, l'application de la même méthode pour certains cas où tous les noyaux itérés peuvent devenir infinis. La dernière partie de la conférence traite de quelques équations de première espèce, pour lesquelles le noyau dépend linéairement d'un paramètre et qui, par le théorème de Fourier, se ramènent à des équations de deuxième espèce.

2. La seconde conférence donne une application de la théorie des équations intégrales aux mouvements de la mer. En négligeant [2] le potentiel dépendant de l'attraction des masses liquides on obtient une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre avec des conditions aux limites différentes, suivant que le bord de la mer est un mur vertical ou quelconque. L'équation intégrale qui, par l'intermédiaire de la fonction de Green, résout le problème, a un noyau infini, de telle sorte que la méthode de Fredholm n'est plus applicable. M. Poincaré indique un procédé pour lever les difficultés qui se présentent; on évite les singularités en passant dans le domaine complexe par le moyen de la valeur principale de Cauchy pour des intégrales à deux variables, valeur principale considérée comme la moyenne arithmétique des valeurs

---

[1] Cf. *Acta mathematica*, t. XXXIII, p. 57-86.

[2] A la fin de la conférence, il est rapidement indiqué comment il est possible d'en tenir compte; on obtient deux équations intégrales simultanées.

prises le long de chemins curvilignes convenablement choisis. La méthode des résidus ramène l'équation à une équation intégrale où le noyau n'est plus infini (cas du mur vertical) ou devient infini (cas général) mais de manière à permettre l'application des méthodes ordinaires.

3. La troisième conférence [1] traite des ondes hertziennes et plus spécialement des phénomènes merveilleux qui se présentent en télégraphie sans fil. Que la rotondité de la Terre qui s'oppose à la propagation des ondes lumineuses ne gêne en rien, au contraire, les ondes hertziennes, c'est ce qu'on explique en invoquant la différence des longueurs d'onde. Mais l'explication est plus précise qu'on obtient en étudiant les équations différentielles du phénomène. M. Poincaré montre d'abord comment la plupart des problèmes (réception et production des ondes électriques, etc.) se ramènent à une équation intégrale ou dans le cas général à deux équations à deux inconnues. Le problème de la diffraction est ensuite traité avec tous ses détails et des résultats pratiques sont obtenus par l'emploi judicieux de formules approchées.

4. Dans la quatrième conférence [2] il s'agit de la réduction des intégrales abéliennes et de la théorie des fonctions fuchsiennes. Le cas traité est celui où le système S des fonctions à p variables correspond à une courbe algébrique C de genre p; le système réduit S' à q variables correspondant à une courbe algébrique C' de genre q; entre les deux courbes C et C' existe une correspondance algébrique, correspondance points par points ou système de points par système de points et c'est le premier de ces deux cas (C est une courbe multiple de C') qui est complètement étudié. Deux nombres caractéristiques sont définis et leur identité prouvée par deux démonstrations; puis M. Poincaré indique les rapports entre la théorie de la réduction et la théorie des fonctions automorphes. Les groupes et les domaines fondamentaux de cette dernière théorie donnent occasion d'énoncer de beaux et importants théorèmes sur la Géométrie non euclidienne des polygones dont

(1) Cf. *Palermo Rendiconti*, 1er sem. 1910, p. 169-259 et aussi *Comptes rendus*, 1909.
(2) Cf. *Palermo Rendiconti*, 2e sem. 1909, p. 281-336.

les côtés sont des arcs de cercle, de même que sur la Géométrie des courbes algébriques.

5. La cinquième conférence ([1]) est relative à la notion de nombre transfini; et tout d'abord il est question de l'apparent paradoxe que cette notion même contient; c'est la célèbre antinomie de Richard opposée à la démonstration de Cantor que le continu n'est point dénombrable; M. Poincaré montre que la contradiction n'est qu'apparente en étudiant ce que prouvent exactement les démonstrations. Il est alors amené à parler des définitions prédicatives, s'explique sur une objection de Zermelo relative à la non-prédicativité de certaines définitions admises pourtant dans des démonstrations mathématiques (démonstration de Cauchy-Weierstrass pour l'existence d'une racine d'une équation algébrique), montre qu'on peut modifier le raisonnement pour éviter le cercle vicieux et qu'on est en droit d'exiger de toute démonstration rigoureuse, qu'elle contienne uniquement des définitions prédicatives. La fin de la conférence effleure seulement certains sujets difficiles (existence du second nombre transfini, problème du continu, preuve que le continu peut être bien ordonné) et M. Poincaré se borne à quelques indications rapides.

6. Les cinq conférences qui précèdent étaient réservées à un public de spécialistes déjà au courant des questions traitées; sur la demande de la commission, l'illustre savant a bien voulu parler pour un public plus nombreux de la Mécanique nouvelle et dans une jolie conférence en français (les cinq premières avaient été faites en allemand) il a montré ce qu'il fallait abandonner des hypothèses de l'ancienne Mécanique pour satisfaire aux exigences de la Physique moderne; le principe de relativité subsiste encore mais il faut supposer que l'inertie d'un corps mobile grandit avec sa vitesse, cette vitesse restant inférieure à celle de la lumière; la notion de temps local s'introduit, en outre, et aussi celle si surprenante, qui va contre nos habitudes actuelles, de la contraction dans le sens du mouvement. Cette nouvelle Mécanique se rattache d'ailleurs à une conception nouvelle de la matière : « Le

([1]) Cf. *Acta mathematica*, t. XXXII, p. 195-200.

physicien bâtit le monde avec des électrons, particules électrisées réunies en univers véritables dans lesquels des milliers de planètes gravitent autour de soleils minuscules », et l'on peut expliquer ainsi les merveilleuses découvertes de la Physique moderne. L'Astronomie, naturellement, devient un peu plus compliquée, mais il se trouve que la Mécanique nouvelle lui rend encore des services et, par exemple, si elle n'explique pas complètement les anomalies de Mercure, elle corrige tout au moins un peu l'écart entre la théorie classique et l'observation. Et d'ailleurs la Mécanique classique reste malgré tout la Mécanique des vitesses très petites relativement à celle de la lumière, la Mécanique donc de notre vie pratique et de notre technique terrestre et, mettant en garde contre le dédain immérité qu'on pourrait avoir pour elle, M. Poincaré conclut en disant : « Je crois bien cependant que cette Mécanique dédaignée sera aussi nécessaire que maintenant et que celui qui ne la connaîtra pas à fond ne pourra comprendre la Mécanique nouvelle ».

J. Marty.

KOWALEWSKI (G.). — Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen. Ein Lehr- und Uebungsbuch für Studirende zur Einführung in die Infinitesimalrechnung.

M. Kowalewski a observé l'attrait qu'exerçaient sur les étudiants les problèmes qui ont un caractère historique « ... l'intérêt se ranime, lorsque je dis à mes auditeurs que Leibniz a construit la courbe logarithmique, qu'il a intégré les fonctions rationnelles, qu'il a été amené au problème de la tractrice par le médecin français Perrault.... » Je crois que l'observation de M. Kowalewski est parfaitement juste : les noms illustres réveillent l'attention et celle-ci se soutient d'ordinaire, tant par l'intérêt propre des questions traitées par ceux qui portaient ces noms, que par la curiosité qui s'attache aux méthodes des inventeurs. Plus d'une fois, d'ailleurs, il est arrivé que ces méthodes étaient les plus naturelles et les plus simples; on se demande pourquoi elles ont disparu de l'enseignement.

Le Livre de M. Kowalewski n'est point un Traité historique;

non, c'est bien, comme il le dit, un Livre de lecture et un Livre d'exercices; ce n'est pas un recueil de morceaux détachés; c'est un Livre où l'on peut apprendre les éléments de l'Analyse infinitésimale; il est dominé par l'ordre logique, non par l'ordre historique; seulement, à propos des diverses théories et des propositions fondamentales, M. Kowalewski rappelle, quand il y a lieu, les noms des inventeurs, leurs méthodes, leurs points de vue et cela, à ce qui m'a paru, avec un tact parfait, sans aucun étalage d'érudition, en choisissant toujours ce qui est vraiment intéressant et instructif. Son Livre, qui s'adresse à des commençants, me paraît très digne d'être recommandé; en France, il rendrait les meilleurs services aux bons élèves de la classe de Mathématiques spéciales; mais comment serait accueilli le professeur qui conseillerait à ses élèves de laisser là, pour l'étudier à loisir, les feuilles où sont colligées les questions posées par MM. les examinateurs?

J. T.

GUIMARÃES (R.), Capitaine du Génie. — LES MATHÉMATIQUES EN PORTUGAL. 2e édition, soigneusement revue et très considérablement augmentée. 1 vol. in-8° de 655 pages. Coïmbre, 1909.

TEIXEIRA (F. GOMES), Directeur de l'École Polytechnique de Porto. OBRAS SOBRE MATHEMATICA. 5 vol. grand in-4°. Coïmbre, 1904 à 1909.

En dressant le bilan mathématique de son pays, le capitaine du Génie portugais R. Guimarães a fait œuvre pie au point de vue scientifique.

Développement d'un Catalogue systématique des ouvrages de Mathématiques pures et appliquées, publiées par les auteurs portugais au cours du XIXe siècle, que le capitaine Guimarães avait dressé à l'occasion de l'Exposition universelle de 1900, le Volume qu'il nous présente aujourd'hui constitue, de fait, une œuvre nouvelle. Non seulement, en effet, il embrasse maintenant tout l'ensemble de la littérature mathématique portugaise, dont les origines remontent au XIVe siècle, mais il s'ouvre par un aperçu historique fort intéressant qui nous fait assister, dans le même intervalle, aux progrès des études mathématiques en Portugal. Ce

aperçu, d'une centaine de pages, est suivi du Catalogue, établi, comme le précédent, d'après l'Index et avec les notations du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques* dont, en ce qui concerne la partie astronomique, les subdivisions ont été complétées au moyen d'emprunts faits à la bibliographie de MM. Houzeau et Lancaster. Ce Catalogue, dressé avec infiniment de conscience et de soin, s'étend maintenant sur 550 pages environ. Le seul reproche que nous serions tenté de lui faire serait précisément d'être trop consciencieux, en ce sens que l'auteur ne s'est permis aucune exclusion, admettant sur sa liste quelques écrits d'une faiblesse par trop évidente, qu'il ne se fait, au reste, pas faute de souligner.

Ce qui résulte le plus évidemment de l'étude historique de M. Guimarâes, c'est que les Portugais qui, depuis tant de siècles, se sont acquis une réputation mondiale comme intrépides navigateurs et explorateurs, émules ou continuateurs des Vasco de Gama et des Magellan, ont apprécié surtout les Sciences mathématiques au point de vue de leurs applications à la Géographie et à la Navigation, et les ont principalement étudiées dans celles de leurs parties qui confinent à ces applications.

Parmi tous les noms que l'auteur rappelle à cet égard, il en est un qui brille d'un éclat particulier, celui de Pedro Nunes, célèbre dans toute l'Europe du XVIe siècle, auquel sont attachés nombre de progrès réalisés dans les Sciences nautiques et dans la Cosmographie, et notamment la première ébauche de la théorie des routes loxodromiques. Il est juste de reconnaître que Pedro Nunes a également contribué, de manière très efficace, à l'avancement des parties purement théoriques de la Science, notamment par la publication de son *Livro de Algebra en Arithmetica y Geometrica* (1532), qui contient des vues originales sur l'application de la première de ces sciences aux deux autres. On ne doit pas oublier non plus, que Nunes fut le premier inventeur de l'ingénieux dispositif qui, réinventé, depuis lors, par le français Pierre Vernier, a reçu chez nous le nom de celui-ci, mais qui, hors de nos frontières, est fréquemment désigné par la forme latinisée du nom du savant portugais, *nonius*.

Il faut arriver à la période contemporaine pour assister au plein épanouissement des études de Mathématiques pures, en Portugal.

L'un des plus actifs et distingués ouvriers de cette évolution scientifique, celui dont le nom est entouré, en dehors de son pays, de la notoriété la plus étendue, est M. F. Gomes Teixeira, directeur de l'École Polytechnique de Porto. Le gouvernement portugais, par une initiative qui l'honore grandement, a décidé de réunir tous les travaux de ce distingué géomètre dans une Publication d'ensemble, dont cinq Volumes ont déjà paru.

M. Gomes Teixeira, qui a souvent écrit dans notre langue, ce qui a contribué à nous rendre ses travaux plus familiers, a touché, avec un talent soutenu, aux sujets les plus divers. Ce sont, toutefois, ses recherches très approfondies sur les séries qui ont principalement fondé, parmi nous, sa réputation.

Les deux premiers Volumes de l'Ouvrage en question renferment les Mémoires originaux du savant professeur portugais, alors que le troisième Volume reproduit son excellent *Curso de Analyse infinitesimal*.

Les Volumes IV et V, entièrement rédigés en français, constituent un Ouvrage à part, du plus haut intérêt, entrepris par l'auteur pour répondre à une question mise au concours par l'Académie des Sciences de Madrid (qui lui a d'ailleurs attribué le prix en 1899), question qu'avait déjà soulevée une Communication de M. Haton de la Goupillière, à l'*Intermédiaire des Mathématiciens* et qui consistait à écrire une monographie générale de toutes les courbes spéciales notables. Par le fait, c'est un véritable Traité général de toutes les courbes planes et gauches remarquables (autres que les coniques) qu'a composé M. Gomes Teixeira, avec infiniment de science et d'érudition.

Le Tome IV est consacré aux cubiques, aux quartiques et à quelques courbes algébriques remarquables, d'ordre supérieur; le Tome V, aux courbes transcendantes planes classiques, notamment aux spirales et aux cycloïdes, et à diverses classes de courbes gauches. Non content d'avoir accumulé, à propos de ces diverses catégories de courbes, une foule de curieuses propriétés, recueillies aux sources les plus diverses, M. Teixeira les relie par une chaîne de démonstrations qui lui sont propres pour la plupart, de sorte que son travail n'a pas seulement la valeur d'un excellent recueil où les professeurs pourront, en quelque sorte, puiser indéfiniment d'intéressants exercices à l'usage des étudiants, mais

encore un véritable Traité d'application de la Géométrie analytique à l'étude des courbes spéciales.

L'ensemble de l'œuvre de M. Teixeira fait honneur à l'École mathématique portugaise moderne, et son ampleur justifie le parti auquel, dans son Ouvrage précédemment cité, s'est arrêté M. Guimarães en ne citant, parmi tous les mathématiciens actuellement vivants dans son pays, que le seul nom du savant directeur de l'École Polytechnique de Porto.

M. O.

THE NEW HAVEN COLLOQUIUM. — LECTURES DELIVERED BEFORE MEMBERS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY IN CONNECTION WITH THE SUMMER MEETING, HELD SEPTEMBER 5th TO 8th, 1906, UNDER THE AUSPICES OF YALE UNIVERSITY BY *Eliakim Hastings Moore*, *Ernest Julius Wilcynski*, *Max Mason*. 1 vol. in-8, x-222 pages. New Haven, Yale University Press, 1910.

Le Mémoire de M. Moore, par où s'ouvre ce Recueil, est intitulé *Introduction à une forme d'analyse générale ;* il se tient dans ces régions élevées et abstraites, où les Mathématiques se confondent presque avec la Logique, tant les concepts y sont généraux et tant les raisonnements, qui se déroulent au moyen d'un ingénieux appareil de symboles et d'abréviations, sont indépendants de tout contenu concret attribué à ces concepts et présentés de manière à n'utiliser certainement rien autre chose que les définitions mêmes. L'auteur parvient ainsi, plus d'une fois, à dégager ce qu'il y a d'identique dans des théories où les analogies apparaissent clairement à l'observateur.

M. Wilcynski s'occupe de cette géométrie projective différentielle, fondée essentiellement sur la théorie des équations différentielles linéaires, sur laquelle il a publié un beau Livre (1).

M. Mason, enfin, traite de différents problèmes concernant la solution des équations différentielles déterminées par des conditions aux limites. On y remarquera la façon vraiment simple dont

---

(1) *Projective differential Geometry of curves and ruled surfaces* (Voir *Bulletin*, t. XXXI, 1907, p. 148).

l'auteur a su développer plusieurs de ces problèmes en prenant pour point de départ une méthode qu'on peut faire remonter à Liouville ([1]) et qui fournit la solution de l'équation fonctionnelle

$$f = g + \mathrm{S}f,$$

où f est la fonction inconnue, où g est une fonction continue dans le domaine considéré, où S est un opérateur linéaire, c'est-à-dire tel qu'on ait

$$\mathrm{S}(u + v) = \mathrm{S}u + \mathrm{S}v$$

et tel que la série

$$g + \mathrm{S}g + \mathrm{S}^2 g + \ldots$$

soit convergente; sa somme SG jouissant de la propriété

$$\mathrm{SG} = \mathrm{S}g + \mathrm{S}^2 g + \mathrm{S}^3 g + \ldots.$$

M. Mason rattache en particulier à cette solution la méthode de Riemann pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu + f,$$

la méthode de Neumann pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

enfin la détermination de la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = cu + f,$$

qui prend une valeur prescrite $g(s)$ sur la frontière d'un domaine donné.

J. T.

([1]) Compte rendu du livre de M. Bôcher, *An introduction to the study of integral equations* (Voir *Bulletin*, t. XXXIII, 1909, p. 71).

LŒWY (ALFRED). — VERSICHERUNGS-MATHEMATIK. Zweite, umgearbeitete Auflage. 1 vol. in-18, 175 pages. Leipzig, Göschen, 1900.

On trouvera dans ce petit Volume, traitées d'une façon claire et systématique, en partant des plus simples, les questions relatives aux rentes viagères et aux assurances sur la vie.

Il pourra renseigner les praticiens, d'une part et, d'autre part, tous ceux qui désirent se rendre compte de la façon dont se résolvent les problèmes de cette sorte; ceux-là devraient être très nombreux dans un temps où les institutions de prévoyance se développent et se développeront de plus en plus vite; ils devraient comprendre tous ceux qui prétendent exercer quelque influence politique. Mais combien sont-ils, parmi les gens qui sont partisans, ou adversaires, de l'assurance obligatoire, ou du monopole de l'État et qui n'ont aucune idée précise de ce qu'est une assurance sur la vie? Combien faudrait-il d'éditions au Livre de M. Lœwy s'ils voulaient s'instruire? Peut-être excusent-ils à leurs propres yeux cette paresse intellectuelle, dont se double d'habitude la fermeté de leurs opinions, en se disant qu'il s'agit là de questions abstruses, qu'on ne peut aborder sans connaissances mathématiques très élevées. Il suffit, pour s'assurer du contraire, de jeter les yeux sur le petit Livre que nous annonçons.

J. T.

VECCHIETTI (E.). — L'INFINITO SAGGIO DI PSICOLOGIA DELLE MATEMATICA. 1 vol. in-8, XV-181 pages. Roma-Milano, Albrighi, Segati e C., 1908.

Il ne m'appartient assurément pas de porter un jugement sur la valeur philosophique du Livre de M. Vecchietti et de la doctrine d'après laquelle l'*infini*, aussi impossible à concevoir qu'à imaginer, se réduirait à ce sentiment de la persistance de notre être, qui accompagne tout acte de notre pensée, à la confiance que nous avons de pouvoir répéter cet acte. Je ne pense pas qu'on puisse pousser plus loin le *finitisme*. A quoi l'*infiniste* répondra peut-être que l'infini nous baigne et nous pénètre si bien qu'il est, en

effet, inséparable de toute pensée. Et ainsi de suite, indéfiniment. Quoi qu'il en soit, il y a d'autant plus de plaisir à lire ce Livre de M. Vecchietti, que l'auteur va, de son mieux, au fond de sa pensée. Et puis, il ne s'astreint pas à suivre la mode; il ne conteste assurément pas les grands services que les logiciens (ceux de son pays, en particulier) ont rendu aux Mathématiques et à l'exposition des Mathématiques; mais il ne veut pas du tout que les concepts mathématiques soient vides de tout contenu, et que les Mathématiques se réduisent à une pure logique, qui n'est rien par elle-même et ne vaut que par les applications qu'on peut en faire.

J. T.

MÉLANGES.

REMARQUES SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION $\Delta u = 0$;

PAR M. MICHEL PLANCHEREL.

Soit D un domaine limité par une courbe fermée C, sans points multiples, composée d'un nombre fini d'arcs réguliers de courbes analytiques. Si l'on se donne sur C une fonction continue $u(s)$ de l'arc s de la courbe, le problème de la recherche d'une solution $u(x, y)$ de l'équation $\Delta u = 0$, continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres en tout point intérieur de D et prenant sur le contour C, sauf au plus en un *nombre fini* de points, les valeurs données $u(s)$, n'admet pas une solution unique si l'on n'astreint $u(x, y)$ à aucune condition supplémentaire.

M. Picard a donné de ce fait un exemple très simple (*Traité d'Analyse*, t. II, p. 49). Il prend pour le contour C la circonférence définie par l'équation

$$a(x^2 + y^2) + x = 0;$$

$u(x, y)$ étant une fonction harmonique à l'intérieur de ce cercle et prenant sur le contour des valeurs continues, la fonction $u(x,y) + U(x, y)$, où

$$U(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + a.$$

représente une nouvelle fonction harmonique prenant sur le contour les mêmes valeurs que la première, sauf à l'origine, et satisfaisant à toutes les conditions que nous avons exigées.

Pour obtenir une solution unique, on assujétit généralement la fonction cherchée à une nouvelle condition, à savoir de rester *bornée à l'intérieur* du domaine D. Cette condition restrictive est très naturelle lorsque la fonction $u(s)$ donnée sur le contour est elle-même bornée; elle n'a évidemment plus de sens lorsque $u(s)$ n'est pas bornée. Je me propose d'indiquer ici une condition restrictive différente, qui ne me paraît pas avoir été déjà indiquée, et qui est suffisante pour assurer l'unicité de la solution dans des cas beaucoup plus étendus.

A étant un point intérieur quelconque du domaine D; a, b, ses coordonnées, soient $G(x, y;\ a, b)$ la fonction de Green du domaine D relativement au point A et (C_λ) la famille de courbes définies par l'équation

$$G(x, y; a, b) = \lambda \qquad (0 \geqq \lambda > -\infty).$$

Les courbes C_λ sont des courbes fermées concentriques, ne se coupant pas elles-mêmes et entourant toutes le point A. On a

$$C_0 = C.$$

Supposons maintenant donnée sur C une fonction $u(s)$ assujétie à la seule condition d'être sommable sur C. Nous allons montrer qu'il existe à l'intérieur du domaine D une et une seule solution $u(x, y)$ de l'équation $\Delta u = 0$, donnée par la formule

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial G(x, y; s)}{\partial n} u(s)\, ds, \tag{1}$$

telle que :

1° $u(x, y)$ et ses dérivées des deux premiers ordres soient continues en tout point intérieur du domaine;

2° $u(x, y)$ tende presque partout (c'est-à-dire sauf au plus pour

un ensemble de mesure nulle en s) vers $u(s)$, lorsque le point (x, y) tend vers le point s du contour en restant sur une trajectoire orthogonale des courbes C_λ;

3° La relation suivante soit vérifiée

(2) $$\underset{\lambda=0}{\mathrm{L}} \int_{C_\lambda} |u(x, y)|\, ds_\lambda = \int_C |u(s)|\, ds.$$

La fonction $u(x, y)$, définie par la formule (1), vérifie bien l'équation $\Delta u = 0$ et satisfait à la condition 1°. Pour montrer que les conditions 2° et 3° sont bien remplies, on pourrait faire sur la formule (1) des recherches analogues à celles de M. Fatou sur l'intégrale de Poisson (*Acta mathematica*, t. XXX). Il est plus simple de remarquer que le contour C pouvant être représenté d'une manière conforme sur un cercle, les théorèmes de M. Fatou relatifs à l'intégrale de Poisson s'étendent immédiatement à la formule (1). Il nous reste donc à montrer encore que toute solution $v(x, y)$ remplissant les conditions 1°, 2°, 3° est identique à $u(x, y)$. Soient $u_\lambda(s_\lambda)$, $v_\lambda(s_\lambda)$ les valeurs prises par ces fonctions sur la courbe C_λ. Nous aurons, pour tout point (x, y) intérieur à C_λ,

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_\lambda} \frac{\partial G(x, y; s_\lambda)}{\partial n_\lambda} u_\lambda(s_\lambda)\, ds_\lambda,$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_\lambda} \frac{\partial G(x, y; s_\lambda)}{\partial n_\lambda} v_\lambda(s_\lambda)\, ds_\lambda;$$

donc,

$$u(x, y) - v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_\lambda} \frac{\partial G(x, y; s_\lambda)}{\partial n_\lambda} (u_\lambda - v_\lambda)\, ds_\lambda.$$

Le premier membre de cette relation est indépendant du contour C_λ. Si donc nous faisons tendre λ vers zéro, il viendra encore

$$u(x, y) - v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \underset{\lambda=0}{\mathrm{L}} \int_{C_\lambda} \frac{\partial G(x, y; s_\lambda)}{\partial n_\lambda} (u_\lambda - v_\lambda)\, ds_\lambda.$$

La fonction $\frac{\partial G(x, y; s_\lambda)}{\partial n_\lambda}$, restant bornée et tendant vers $\frac{\partial G(x, y; s)}{\partial n}$ sauf en un nombre fini de points, il existe une constante positive M telle que

$$\left| \underset{\lambda=0}{\mathrm{L}} \frac{1}{2\pi} \int_{C_\lambda} \frac{\partial G(x, y; s_\lambda)}{\partial n_\lambda} (u_\lambda - v_\lambda)\, ds_\lambda \right| \leq \mathrm{M} \underset{\lambda=0}{\mathrm{L}} \int_{C_\lambda} |u_\lambda - v_\lambda|\, ds_\lambda = 0.$$

d'après les hypothèses 2° et 3°. On a donc bien

$$v(x, y) = u(x, y).$$

C. Q. F. D.

On vérifie aisément sur l'exemple de M. Picard que la fonction $U(x, y)$ ne vérifie pas la condition 3°.

Remarquons encore que la condition 3° ne pourrait pas être remplacée par la condition moins restrictive

$$L \int_{C_\lambda} u(x, y)\, ds_\lambda = \int_C u(s)\, ds.$$

L'exemple suivant

$$u(x, y) = y \frac{x^2 + y^2 - 1}{[(x-1)^2 + y^2]^2},$$

relatif au contour

$$x^2 + y^2 = 1,$$

se montre immédiatement. Je dois ce dernier exemple à l'obligeance de M. Marcel Riesz.

SUR LES SURFACES MOULURES APPLICABLES SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION ;

Par M. J. HAAG.

Dans une Note du mois de novembre dernier, nous avons affirmé (p. 273) que les seules surfaces moulures applicables sur une surface de révolution étaient les développables obtenues en prenant une droite pour profil.

Or, M. Raffy en a signalé d'autres dans le *Bulletin de la Société mathématique* (t. XIX, 1891, p. 34). Il a montré qu'en dehors des développables précédentes se trouvaient les surfaces d'élément linéaire

$$(1) \qquad ds^2 = du^2 - \left(e^{ak} - \frac{b}{v}\right)^2 dv^2 \qquad (a, b = \text{const.}).$$

Il a indiqué dans un autre article (p. 55) une autre propriété caractéristique de ces surfaces, qui avaient d'ailleurs été rencon-

trées par M. Dini (*Giornale de Matematica*, 1865, p. 65), lequel en a donné différentes propriétés, avec un mode de génération.

Nous allons revenir rapidement sur cette question par la méthode générale indiquée dans notre précédente Note, afin de réparer l'erreur que nous venons de signaler et aussi afin de montrer la simplicité relative avec laquelle notre méthode conduit au résultat.

Nous devons satisfaire aux équations suivantes :

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial v} + x\,\mathrm{U}' = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial v} + (\mathrm{U} - \mathrm{V})\dfrac{dy}{\partial u} - y\,\mathrm{U}' = 0. \end{cases}$$

De la première et de la seconde nous tirons successivement

$$(3)\qquad x = \mathrm{V}'_1, \qquad y = \mathrm{U}_1 - \mathrm{U}'\mathrm{V}_1.$$

Portant dans la troisième, nous avons l'équation suivante :

$$\mathrm{V}''_1 + (\mathrm{U} - \mathrm{V})(\mathrm{U}'_1 - \mathrm{U}''\mathrm{V}_1) - \mathrm{U}'(\mathrm{U}_1 - \mathrm{U}'\mathrm{V}_1) = 0$$

ou

$$(4)\qquad (\mathrm{U}\mathrm{U}'_1 - \mathrm{U}'\mathrm{U}_1) - \mathrm{V}\mathrm{U}'_1 + \mathrm{V}_1(\mathrm{U}'^2 - \mathrm{U}\mathrm{U}'') + \mathrm{V}\mathrm{V}_1\mathrm{U}'' + \mathrm{V}''_1 = 0.$$

Différentions par rapport à u et à v :

$$(5)\qquad -\mathrm{V}'\mathrm{U}''_1 + \mathrm{V}'_1(\mathrm{U}'\mathrm{U}'' - \mathrm{U}\mathrm{U}''') + (\mathrm{V}\mathrm{V}'_1 + \mathrm{V}'\mathrm{V}_1)\mathrm{U}''' = 0.$$

Divisons par V'_1, qui n'est nul que si la surface est de résolution, et dérivons par rapport à v :

$$(6)\qquad \left(\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}'_1}\right)'\mathrm{U}''_1 = \left[\mathrm{V}' + \left(\frac{\mathrm{V}'\mathrm{V}_1}{\mathrm{V}'_1}\right)'\right]\mathrm{U}'''.$$

D'où deux cas à distinguer :

Premier cas : $\left(\dfrac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}'_1}\right)' = 0$. — On en tire, en remarquant que V ne peut être constant (si l'on écarte les surfaces de révolution), et qu'on peut ajouter une même constante arbitraire à U et à V,

$$\mathrm{V}_1 = a\mathrm{V} \qquad (a \neq 0).$$

En portant dans (5), on en déduit

$$U''' = 0, \qquad U_1'' = a U' U''.$$

Si U était du second degré en u, U_1 serait du troisième degré, et l'on voit de suite qu'on aurait dans (4) un terme en u^4, provenant de $(UU_1' - U'U_1)$, qui ne pourrait disparaître. Si U est du premier degré, on tombe sur les développables à profil rectiligne. Donc *ce premier cas ne peut rien donner*.

Deuxième cas : $\left(\frac{V'}{V_1'}\right)' \neq 0$. — De l'équation (6) on tire alors

$$U_1'' = a U''',$$

d'où

$$U_1 = aU' + bu + c.$$

Alors, si dans la valeur de y on change V_1 en $V_1 + a$, on voit que U_1 diminue de aU'. On peut donc prendre

$$U_1 = au + b.$$

L'équation (5) donne alors, en remarquant que V_1' ne peut être nul,

$$U'U'' - UU''' = cU''' \qquad (a = \text{const.}).$$

En ajoutant $(-c)$ à U et V, on peut supposer

$$U'U'' - UU''' = 0,$$

d'où

$$U'' - m^2 U = 0 \qquad (m = \text{const.}).$$

Cette équation possède deux types différents de solutions :

$$U = A\cos(imu + u_0) \qquad (A \text{ et } u_0 = \text{const.})$$

et

$$U = e^{mu + u_0}.$$

Le premier type se ramène, par homothétie et changements de variables évidents sur u et v, à

$$U = \cos u.$$

En portant cette valeur, ainsi que celle de U_1, dans (4), on constate tout de suite que cette équation ne peut être vérifiée identiquement si $VV_1 \neq 0$.

Il ne nous reste donc que le second type (qui est celui que nous avions primitivement oublié), lequel peut se mettre sous la forme

$$U = e^{u}.$$

L'équation (4) devient

$$e^{u}[a(1 + au - b) + VV_1] + (V_1'' - aV) = 0.$$

Le terme en ue^{u} exige d'abord que a soit nul.

Il ne nous reste plus alors à vérifier que

$$V_1'' = 0, \qquad VV_1 = b.$$

D'où, en choisissant convenablement v et négligeant une homothétie sur x et y,

$$V_1 = v, \qquad V = \frac{b}{v}.$$

On retrouve bien l'élément linéaire (1). Quant à x et à y, ils ont les valeurs suivantes :

$$x = 1, \qquad y = b + ve^{u}.$$

On peut remarquer que la constante de Clairaut est indépendante de v; donc *les lignes* (v) *proviennent par déformation de géodésiques égales de la surface de révolution.*

On retrouve ainsi un résultat de M. Dini. Au reste, on vérifiera facilement que l'élément linéaire (1) peut se mettre sous la forme

$$ds^2 = du^2 + f^2(u - av)\,dv^2.$$

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. – SUR UNE DÉMONSTRATION DE JOSEPH BERTRAND;

Par M. J. HAAG.

Joseph Bertrand a fait paraître autrefois, dans les *Comptes rendus* (t. CXXI, p. 921), une démonstration géométrique du théorème suivant :

Les sphères et les plans sont les seules surfaces qui puissent,

dans toutes les translations possibles, engendrer une famille de Lamé.

Cette proposition est exacte, car elle a été établie depuis, au moyen de méthodes différentes, par divers géomètres; mais *la démonstration de J. Bertrand n'est pas rigoureuse.*

Voici la faute de raisonnement commise par l'illustre géomètre. Il considère un point A quelconque de la surface (S) et la normale AN en A à cette surface. Puis il suppose qu'on imprime à (S) une translation parallèle à AN et remarque que la droite AM sera dans ces conditions une trajectoire orthogonale de la famille de surfaces ainsi obtenue. Il en conclut que *cette droite sera l'intersection de deux surfaces appartenant aux deux autres familles qui complètent le système triple, surfaces qui*, dit-il, *seront des cylindres engendrés par la translation des deux lignes de courbure de* (S) *qui passent en* A. Or, c'est cette conclusion qui est erronée. Il résulte en effet de notre Note du 3 août 1908 que si u et v sont les variables canoniques, paramètres des lignes de courbure de (S), toute surface (S_1) de la seconde famille peut être construite de la manière suivante : on fera subir à la ligne de paramètre u une translation parallèle à AN et d'amplitude $\rho_1 - u$, ρ_1 étant le paramètre de (S_1). Quand u varie, on obtient un ensemble de courbes qui constitue la surface (S_1). Comme toutes les lignes (u) de (S) ne peuvent s'appuyer sur AN, quel que soit le point A, il en résulte que AN *ne fait partie d'aucune surface de la seconde famille.* [Ceci serait en défaut si la surface était une surface moulure de noyau parallèle à AN; mais il est évident que ceci ne peut avoir lieu pour tous les points A de (S), sauf si celle-ci est une sphère.]

Cette droite est cependant bien une trajectoire orthogonale des surfaces (S). Mais c'est une *trajectoire singulière*, enveloppe des trajectoires ordinaires qu'on déduit par translation de la ligne de seconde courbure issue de A de la surface (S_1) qui passe par ce point.

D'une façon générale, étant donné un système triple orthogonal quelconque, les trajectoires des surfaces (ρ) par exemple forment une congruence. Or, on peut distribuer ces courbes en une infinité de familles à un paramètre admettant chacune une enveloppe E

(*voir* par exemple Darboux, *Théorie des surfaces*, t. II, p. 6). (Les différentes courbes E engendrent, comme on sait, les nappes de la surface focale de la congruence.) Chacune des courbes E est évidemment une trajectoire orthogonale des surfaces (ρ); mais c'est une *trajectoire singulière* qui ne fait partie d'aucune surface du système triple orthogonal. *Elle correspond en somme à une solution singulière du système d'équations différentielles qui définit les trajectoires des surfaces* (ρ). On a un exemple simple de ces trajectoires singulières dans les arêtes de rebroussement des développables engendrées par des normales à une même surface.

Nous avons tenu à mettre en évidence la faute commise par J. Bertrand, parce qu'en faisant des raisonnements de ce genre on peut être conduit à des résultats inexacts.

C'est ainsi que M. Carrus, dans un Mémoire publié assez récemment dans le *Journal de l'École Polytechnique* (2e série, 12e cahier, p. 67 et suiv.) a été conduit à énoncer des propositions erronées. Il a affirmé, entre autres choses, que les seules surfaces à lignes de courbure planes dans un système qui puissent engendrer une famille de Lamé dans une translation étaient les périsphères de M. L. Lévy. Or, ceci est en contradiction manifeste avec les résultats de notre Note du 21 mars dernier.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Abhandlungen über den mathematische Unterricht in Deutschland. Veranlasst durch die internationale mathemat. Unterrichtskommission. Hrsg. v. F. Klein. I. Bd. In-8°. Leipzig, B.-G. Teubner. [1. Heft. Lietzmann (Walth.), *Stoff u. Methode im mathematischen Unterricht der nord-deutschen höheren Schulen.* Auf Grund der vorhandenen Lehrbücher. Mit e. Einführungswort v. *F. Klein.* XII-102 p. 2 m.]

Bôcher (Maxime). — *Einführung in die höhere Algebra.* Deutsch v. *Hans Beck.* Mit e. Geleitwort v. *E. Study.* Gr. in-8°, XII-348 p. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 7 m.

Bornemann (Geo.). — *Stochiometrie. Grundzüge der Lehre v. den chem. Berechngn.* Mit 59 durchgerechn. Beispielen u. 265 Aufgaben. In-8°, VIII-192 p. avec 1 planche. Leipzig, S. Hirzel. Relié, 4 m.

Dette (W.). — *Analytische Geometrie der Kegelschnitte.* Gr. in-8°, VI-232 p. avec 45 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 4 m. 40.

Eisenhart (Luther-Pfahler). — *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces.* IX-474 p., diagrs. Boston, Ginn. 4 d. 50.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, édit. franç., publ. d'après l'éd. all. sous la direction de *Jules Molk*. T. I, vol. I, fasc. IV : *Théorie des ensembles*, d'après Ol. Schoenflies, par R. Baire. *Sur les groupes finis discontinus*, d'après H. Burckhardt, par H. Vogt. In-8°, 128 p. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr.

Fine (H.-B.) and Thompson (H.-D.). — *Coordinate Geometry.* In-8°. London, Macmillan. 6 s. 6 d.

Gans (Rich.). — *Einführung in die Vektoranalysis m. Anwendungen auf die mathematische Physik.* 2. Aufl. Gr. in-8°, X-126 p. avec 35 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 3 m. 60.

Gauss (F.-G.). — *Die Teilung der Grundstücke insbesondere unter Zugrundelegg. rechtwinkliger Koordinaten.* Nebst vierstell. logarithm. u. trigonometr. Tafeln, e. Quadrattaf., sowie e. Multiplikations- u. Divisionstaf. 5. Aufl. 2. Tle. In-8°, 195-80 p. avec fig. Berlin, R. v. Decker. Relié, 7 m. 60.

Hale (G.-E.). — *The study of stellar evolution.* 2nd impress. In-8° (9-6), 248 p., 104 pl. London, Wesley. 16 s. 6 d.

Howe (Herbert-Alonzo). — *Elements of descriptive Astronomy* : a text book. XII-342 p., il., col., pls., maps. New-York, Silver, Burdett et Co. 1 d. 25.

Lindemann (Ferd.). — *Ueber den sogenannten letzten Fermat'schen Satz.* Gr. in-8°, V-82 p. Leipzig, Veit et Co. 3 m. 50.

Lowell (Percival). — *Mars et ses canaux, ses conditions de vie.* Traduit de l'anglais par *Marcel Moye*. In-8°, 368 p. avec 64 fig. Paris, *Mercure de France*. 5 fr.

Rouse (Ball-W.). — *Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes*, 2e éd., trad. par *J. Fritz-Patrick*, 3e partie. 370 p. Paris, A. Hermann. 5 fr.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LIND (B.). — ÜBER DAS LETZTE FERMAT'SCHE THEOREM (*Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, begründet von Moritz Cantor). Une brochure in-8, 65 pages. Leipzig, Teubner, 1910.

Depuis que l'ouverture d'un concours retentissant a donné un regain d'actualité au dernier théorème de Fermat sur l'équation $x^n + y^n = z^n$, on a vu et l'on doit s'attendre à voir encore le nombre des Mémoires consacrés à cette célèbre question subir une augmentation peu en rapport, il faut le craindre, avec l'avantage que la Science sera à même d'en retirer.

Faut-il ajouter que parmi leurs auteurs, un bon nombre — si l'on doit en juger par l'exemple du passé — n'ont vraisemblablement qu'une idée bien confuse de la nature de la question et de ses difficultés? C'est sur ces points que M. Benno Lind entreprend de les éclairer. Il rend ainsi service à tout le monde; non seulement à ceux qui abordent le problème sans préparation suffisante et qu'il rappellera, espérons-le, à une sage modestie, mais aussi à ceux qui peuvent l'étudier utilement et qu'il arme d'une manière solide en les documentant sur les résultats déjà obtenus.

Même en faisant abstraction des travaux fondamentaux par lesquels Kummer a révolutionné cette théorie, ces résultats, depuis les formules par lesquelles Abel représente les solutions de l'équation supposée possible, jusqu'aux travaux de M. Wæferich et aux compléments qui leur sont apportés par M. Lind, constituent déjà un effort considérable et à parcourir leur liste, telle que la dresse M. Lind, on est presque étonné de ne pas y trouver les éléments d'une solution véritable de la question.

Quant à la théorie de Kummer, l'auteur en dit quelques mots à la fin de son exposé historique. Il n'aurait certes pu en donner même une idée sommaire sans ajouter à sa brochure une autre de longueur au moins égale. Peut-être aurait-il pu s'étendre encore

un peu plus sur ce qui est devenu aujourd'hui le centre même du sujet.

Chemin faisant, il n'oublie pas de parler de quelques-unes des nombreuses démonstrations erronées qui ont été présentées et au besoin de les réfuter. Ayons la charité de ne pas insister sur ce musée des horreurs.

Non moins utile aux travailleurs sera la liste bibliographique annexée à son travail et où les différents Mémoires parus sur la question sont classés par ordre alphabétique.

J. H.

MANNOURY (G.). — Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik. Un vol. in-8, 276 p. Harlem, P. Visser Azn, 1909.

Ce Livre résume un cours que M. Mannoury fait à l'Université d'Amsterdam depuis 1906. Il est divisé en deux parties : les fondements de l'Arithmétique et les fondements de la Géométrie : on remarquera, d'une part, l'importance philosophique que l'auteur attribue à la Géométrographie et, d'autre part, la place qu'il donne à la Logique mathématique : celle-ci constitue le premier Chapitre des fondements de la Géométrie. Pour ce qui est de l'Arithmétique, on traite successivement de l'unité et de la multiplicité, du nombre, du fini et de l'infini, de l'extension de la notion du nombre, des nombres irrationnels, de la mesure des grandeurs. L'auteur est assurément aussi averti que subtil : son Livre m'a paru fort intéressant et instructif.

J. T.

DECOURDEMANCHE (J.-A.). — Traité pratique des poids et des mesures des peuples anciens et des Arabes. Un vol. in-8, 144 p. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

L'*Essai sur les systèmes métriques et monétaires des anciens peuples,* de Vasquez Queipo, est le dernier Volume d'ensemble publié sur la métrologie ancienne et celle des Arabes. Il comporte

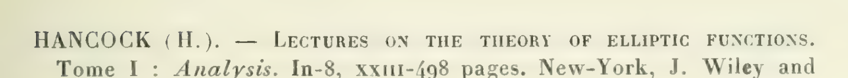
deux Volumes in-4°; il est rare et coûteux. Le petit Volume, facile à étudier et à consulter, que publie M. Decourdemanche, rendra les meilleurs services.

« Toutes les mesures anciennes, tous les poids anciens, sont en relation directe avec les poids de trois talents : le babylonien, l'assyrien et l'égyptien. » En raison des rapports simples de ces talents, il suffit de connaître la valeur exacte d'un élément quelconque (poids ou mesure) pour être en état d'en déduire la valeur de tous les autres éléments.

L'auteur a adopté 17^g pour la valeur du tétradrachme antique, d'où résultent pour le talent égyptien, le talent babylonien et le talent assyrien des poids de 42500^g, 32640^g, 29376^g et, pour le pied assyrien, une longueur égale à $0^m,308$. Les colonnes extérieures du Parthénon ont, en pieds assyriens, une longueur égale à $33\frac{1}{3}$, ce qui correspond bien à la longueur mesurée, soit $10^m,285$.

Ce point de départ bien établi, les équivalences que donnent les métrologues grecs de l'École d'Alexandrie, les mathématiciens arabes, les données relatives aux poids insérées dans les traductions arabes de Galien et dans les Ouvrages médicaux musulmans permettent de construire les Tableaux, en mesures métriques, des divers poids ou mesures utilisés tant par les Anciens que par les Arabes.

J. T.



HANCOCK (H.). — LECTURES ON THE THEORY OF ELLIPTIC FUNCTIONS. Tome I : *Analysis*. In-8, XXIII-498 pages. New-York, J. Wiley and Sons, 1910.

Hermite a montré que si l'équation

$$f\left(z, \frac{dz}{du}\right) = 0, \tag{I}$$

où le premier membre est un polynome en z et $\frac{dz}{du}$, admet une intégrale qui soit une fonction analytique uniforme de u, les deux variables z et $\frac{dz}{du}$ peuvent s'exprimer en fonction rationnelle d'une

variable t dans le cas où l'intégrale est soit une fonction rationnelle de u, soit une fonction simplement périodique, et que lorsque l'intégrale est une fonction doublement périodique de u, les deux variables z et $\frac{dz}{du}$ peuvent s'exprimer par des formules qui ne contiennent pas d'autre irrationalité qu'un radical carré portant sur un polynome du quatrième degré.

Weierstrass a établi que les trois catégories de fonctions dont on vient de parler, à savoir : les fonctions rationnelles de u, les fonctions rationnelles de $e^{\frac{\pi u}{\omega}}$ (fonctions simplement périodiques), les fonctions rationnelles de pu et de $p'u$ (fonctions doublement périodiques), ont toutes un théorème d'addition algébrique. Les deux premières catégories de fonctions peuvent être regardées comme des cas limites de la troisième.

M. Méray a montré que, entre une fonction doublement périodique et sa dérivée première, il existe une relation algébrique du type (I), à laquelle on donnera, dans ce qui suit, le nom d'*équation éliminante*. Il en est, d'ailleurs, de même pour les deux premières catégories de fonctions.

L'existence d'une relation algébrique entre $\varphi(u+v)$, $\varphi(u)$ et $\varphi(v)$ ne suffit pas pour que $\varphi(u)$ ait un théorème d'addition algébrique; un pareil théorème implique, en outre, l'existence d'une équation éliminante; d'où le caractère fondamental de cette équation.

Ces importantes notions sont développées dans les Chapitres II et III du Traité de M. Hancock. L'auteur y tire le plus grand parti de ce fait que le prolongement d'une fonction analytique n'altère pas ses propriétés caractéristiques. Les notions préliminaires sur la convergence des séries et des produits infinis, l'étude des fonctions rationnelles et circulaires, la définition des fonctions analytiques, avaient été traitées dans le Chapitre I. Dans le Chapitre II, on considère les propriétés caractéristiques des fonctions analytiques uniformes qui ont un théorème d'addition algébrique; application est faite aux fonctions rationnelles et exponentielles; on étudie enfin les fonctions simplement périodiques.

Dans le Chapitre IV, l'auteur établit l'existence de fonctions qui admettent deux périodes et discute la nature de ces périodes;

il montre qu'une fonction analytique uniforme ne peut avoir plus de deux périodes.

La construction des fonctions doublement périodiques est l'objet du Chapitre V. Hermite a réalisé un grand progrès dans cette théorie en construisant d'une façon simple les fonctions doublement périodiques d'ordre quelconque au moyen de ces fonctions intermédiaires, dont les fonctions $\mathfrak{S}$ de Jacobi constituent un cas particulier. M. Hancock montrera ultérieurement que les autres méthodes développées dans le Chapitre XX pour représenter une fonction doublement périodique dépendent toutes des méthodes exposées dans le Chapitre V.

Après avoir établi diverses propriétés caractéristiques des fonctions périodiques; après avoir prouvé, en particulier, que la fonction elliptique la plus générale s'exprime algébriquement au moyen d'une fonction elliptique de second ordre, il montre comment l'équation éliminante associée à une telle fonction peut être simplifiée : cette équation est ramenée à être du second degré en $\frac{dz}{du}$, les coefficients étant au plus du quatrième degré en z. En la résolvant, on reconnaît que u est une intégrale de la forme

$$u = \int^z \frac{dz}{\frac{1}{2}g(z) \pm \sqrt{R(z)}}.$$

La surface de Riemann correspondante est introduite dans le Chapitre VI; on y montre comment toute fonction uniforme d'un point sur cette surface satisfait à une équation du second degré à coefficients rationnels; on y traite de l'intégration et de la théorie des résidus; on y étend les méthodes qu'on doit à Hermite, pour le plan complexe.

On revient ensuite (Chapitre VII) à l'intégrale déduite de l'équation éliminante pour traiter cette question : sous quelles conditions la limite supérieure z de l'intégrale est-elle une fonction uniforme de u? Le problème de l'inversion, auquel on est ainsi amené, est traité d'une façon vraiment simple au moyen de la surface de Riemann : on montre que z peut être exprimé par le quotient de deux fonctions $\mathfrak{S}$. En vertu d'un théorème dû à Briot et Bouquet, la fonction elliptique la plus générale peut être exprimée

en fonction rationnelle de z et de $s = \sqrt{a_0 z^4 + a_1 z^3 + \ldots}$; il en résulte que toute fonction analytique uniforme qui a un théorème d'addition algébrique est une fonction rationnelle de u, une fonction rationnelle de $e^{\frac{\pi u}{\omega}}$ ou une fonction rationnelle de pu, $p'u$. En d'autres termes, toute fonction analytique uniforme transcendante qui a un théorème d'addition algébrique est simplement ou doublement périodique. La classe des fonctions elliptiques embrasse les fonctions rationnelles, les fonctions simplement périodiques, les fonctions doublement périodiques. Toutes ces fonctions ont un théorème d'addition algébrique; elles sont les seules, parmi les fonctions uniformes, à jouir de cette propriété.

Dans le Chapitre VIII, on traite des intégrales des fonctions elliptiques générales, ou, si l'on veut, des intégrales qui portent sur une fonction rationnelle de z et de s. Elles sont ramenées aux trois formes canoniques de Legendre, connues sous le nom d'*intégrales de première*, *de deuxième et de troisième espèce*. Ce même Chapitre contient une étude très soignée des invariants et covariants d'une forme quartique binaire et, en particulier, la démonstration de la relation d'Hermite, entre les invariants et les covariants fondamentaux. On est ainsi conduit à la forme normale de Weierstrass et à la transformation qui permet de passer de la forme de Weierstrass à celle de Legendre. Le Chapitre IX est consacré aux modules de périodicité et aux périodes des fonctions elliptiques, pour les formes normales de Legendre et de Weierstrass, avec les notations de Jacobi et de Weierstrass. On y montre comment se fait la représentation conforme de la surface de Riemann sur le parallélogramme des périodes.

Dans le Chapitre X, M. Hancock traite des fonctions $\mathfrak{S}$, de leurs développements en séries trigonométriques et en produits infinis, du théorème fondamental de Jacobi, relatif à l'addition de ces fonctions. Il passe ensuite (Ch. XI) aux fonctions sn, cn, dn, dont les propriétés fondamentales résultent immédiatement des propriétés des fonctions $\mathfrak{S}$; il traite de la transformation imaginaire de Jacobi, de la transformation de Landen, des développements tant en séries entières en u qu'en séries trigonométriques, par des méthodes dues à Hermite ou à Briot et Bouquet.

Le Chapitre XII est consacré aux fonctions doublement pério-

diques de seconde espèce (Hermite). On y montre comment une telle fonction, à multiplicateurs donnés, peut s'exprimer au moyen d'une fonction fondamentale, dont on étudie la construction. Le cas exceptionnel (Mittag-Leffler) est traité avec soin. Application est faite, d'une part, au théorème d'addition des fonctions sn, d'autre part, aux formules données par Jacobi pour le mouvement de rotation.

Dans le Chapitre suivant (XIII), M. Hancock traite des intégrales elliptiques de deuxième espèce. Il montre comment on peut former une intégrale fondamentale qui devient algébriquement infinie en un point de la surface de Riemann et seulement en un point, et comment on peut remplacer une intégrale qui devient algébriquement infinie en un point donné de la surface de Riemann; il étudie les intégrales de Legendre et Jacobi; il montre, au moyen de la surface de Riemann, comment on détermine les modules de périodicité et établit la formule de Legendre; il introduit la fonction Z de Jacobi, montre ses relations avec les fonctions $\mathfrak{S}$ et les fonctions de Weierstrass, donne son développement en série procédant suivant les puissances de l'argument.

Nous arrivons à la théorie de Weierstrass (Chap. XIV). La relation entre pu et $\operatorname{sn} u$ a déjà été établie au Chapitre VIII. Il est maintenant facile d'exprimer les autres fonctions et quantités qui entrent dans la théorie de Weierstrass au moyen de celles qui constituent les éléments de la théorie de Jacobi, les fonctions σ au moyen des fonctions $\mathfrak{S}$, la fonction $\zeta = \frac{\sigma'}{\sigma}$ au moyen de la fonction Z de Jacobi, etc.

Les formules fondamentales de la théorie de Weierstrass sont développées au Chapitre XV; l'auteur part de cette série et de ce produit infini qui mettent en évidence les pôles de la fonction p, les zéros de la fonction σ; il établit la convergence de ces expressions et ne manque pas de rappeler les anciennes recherches d'Eisenstein. Il donne les séries qui procèdent suivant les puissances de l'argument et dont les coefficients sont des fonctions des invariants, les séries et les produits dont les termes ou les facteurs sont des fonctions simplement périodiques; il exprime enfin les fonctions elliptiques de Weierstrass comme quotient des fonctions σ.

Le Chapitre XVI traite des théorèmes d'addition. Ce théorème

pour les fonctions de Jacobi est d'abord déduit directement du théorème d'addition pour les fonctions $\mathfrak{I}$. Pour les fonctions de Weierstrass, il résulte immédiatement de l'expression de la différence entre deux fonctions $\wp$ au moyen des fonctions σ. Après avoir rappelé les méthodes d'Euler, de Lagrange et de M. Darboux, l'auteur montre comment les formules de la théorie de Weierstrass peuvent se déduire directement de celles de la théorie de Jacobi. Les formules pour l'addition d'une demi-période ou d'un quart de période fournissent une vérification.

Dans le Chapitre XVII, on montre comment, en partant de leurs propriétés caractéristiques, il est possible de parvenir aux fonctions σ et, en même temps, de mettre en évidence leurs relations avec les fonctions $\mathfrak{I}$; on donne ensuite les formules relatives à l'addition d'une demi-période ou d'un quart de période, tant pour les fonctions σ que pour les fonctions de Jacobi, regardées comme quotients de fonctions σ; on établit les formules d'addition, ainsi qu'une formule de récurrence qui permet de développer les fonctions σ en séries procédant suivant les puissances de l'argument et dont les coefficients dépendent des invariants.

C'est dans le Chapitre XVIII qu'on trouvera les valeurs des fonctions $\mathfrak{I}$ et σ pour l'argument égal à o ou à un quart de période, exprimées, ainsi que divers autres transcendantes, au moyen de q, tant par des séries que par des produits infinis; on en déduit des formules pour les modules, les racines quatrièmes des modules, les modules de périodicité, etc. Les points d'embranchement, les racines quatrièmes des différences entre les affixes de ces points dans la théorie de Weierstrass, sont exprimées au moyen de certaines fonctions $\mathfrak{I}$. On a ainsi les relations entre les constantes des théories de Jacobi et de Weierstrass. Les fonctions $\mathfrak{I}$ sont ainsi exprimées au moyen des transcendantes de Weierstrass, et les fonctions σ au moyen des transcendantes de Jacobi.

M. Hancock construit ensuite (Chap. XIX) l'intégrale de troisième espèce sous sa forme la plus simple, c'est-à-dire une intégrale qui devient infinie logarithmiquement en deux points de la surface de Riemann, et la surface simplement connexe correspondante. Il en déduit les modules de périodicité. Adoptant ensuite les notations de Jacobi, il montre comment l'intégrale de troisième espèce s'exprime au moyen des fonctions $\mathfrak{I}$, et cette forme même

permet de voir comment le paramètre et l'argument peuvent être échangés. Il introduit aussi la fonction Ω et en établit le théorème d'addition. Les résultats correspondants sont aussi obtenus avec la notation de Weierstrass.

Le Chapitre XX est consacré aux diverses représentations analytiques des fonctions doublement périodiques d'ordre quelconque et de leurs intégrales.

Pour les premières, on donne cinq modes de représentation :

1° La formule d'Hermite, établie déjà au Chapitre V, où la fonction est décomposée en éléments simples. Cette formule est, d'ailleurs, donnée tant avec la notation de Jacobi qu'avec celle de Weierstrass, et l'on fait ressortir combien elle est adaptée à l'intégration ;

2° La formule de Liouville où, avec la notation de Weierstrass, une fonction doublement périodique est exprimée rationnellement au moyen de pu et de $p'u$;

3° Représentation par un quotient de produits de fonctions σ ou $\mathfrak{S}$;

4° Représentation par une série dont les termes sont des fractions rationnelles ;

5° Représentation par une série dont les termes sont des fonctions rationnelles ou des fonctions exponentielles.

En même temps, on montre que toute intégrale elliptique peut s'exprimer au moyen d'une intégrale elliptique de première espèce, d'une intégrale elliptique de deuxième espèce, d'un nombre fini d'intégrales elliptiques de troisième espèce, d'une fonction rationnelle de pu et de $p'u$. On montre aussi comment les modules de périodicité peuvent être déterminés dans le cas général.

L'objet du dernier Chapitre (XXI) est la détermination de toutes les fonctions analytiques qui ont un théorème d'addition algébrique. Au Chapitre II, le problème avait été restreint aux fonctions uniformes. Quand on supprime cette condition, la fonction cherchée est racine d'une équation algébrique dont les coefficients s'expriment rationnellement au moyen d'une fonction analytique uniforme, laquelle a un théorème d'addition algébrique.

Dans le Tableau de formules, qui contient une quarantaine de

pages, les formules de Jacobi et celles de Weierstrass sont juxtaposées.

En introduisant l'équation éliminante, en étudiant au moyen de la surface de Riemann les fonctions qui ont un théorème d'addition algébrique, M. Hancock a voulu constituer une théorie vraiment compréhensive, embrassant comme cas particulier les deux grandes théories de Jacobi et de Weierstrass. Les formules correspondantes dans ces deux théories sont souvent développées d'une façon parallèle, de manière à bien mettre leurs liaisons en évidence.

Il convient de signaler le soin avec lequel M. Hancock fait ressortir l'importance de l'œuvre d'Hermite [1] et l'influence même que cette œuvre a exercé sur la composition de son Livre.

BOHR (H.). — BIDRAG TIL DE DIRICHLET'SKE RÄKKERS THEORI. AFHANDLING FOR DEN FILOSOFISKE DOKTORGRAD [2]. In-8. IX-136 pages. Köbenhavn, G.-E.-C. Gad; 1910.

Les séries de Dirichlet servent à définir des fonctions qui n'ont pas, en général, de frontières naturelles aux limites des domaines de convergence des séries. L'auteur a essayé d'y remédier par un autre usage des mêmes séries, en se contentant de leur summabilité, définie par Cesàro dans son célèbre Mémoire, inséré au présent *Bulletin* en 1890, sur la multiplication des séries. Il y a réussi : l'introduction de la summabilité lui a permis d'étendre le domaine où les séries de Dirichlet définissent les fonctions jusqu'à des limites marquées par des propriétés analytiques des fonctions elles-mêmes.

---

(1) Pendant une période assez longue, Hermite a fait chaque année quelques leçons à la Sorbonne sur les fonctions elliptiques. Il apportait, à faire ressortir les mérites des autres et à se taire sur lui-même, un scrupule presque excessif. C'est précisément parce qu'il l'enseignait que beaucoup de ses auditeurs ont longtemps ignoré, par exemple, que la formule de décomposition en éléments simples lui était due.

J. T.

(2) *Contribution à la théorie des séries de Dirichlet* (Thèse de doctorat).

La première Section contient un exposé très clair de la théorie de la convergence des séries de Dirichlet. L'auteur y démontre les critères dus à Scheibner, Dedekind, Jensen, Cahen, Landau, Schnee, Perron, Hadamard, et illustre par de nouveaux exemples l'existence des différentes catégories de ces séries. Ici et dans la Section suivante il fait usage d'un théorème de la théorie des fonctions que M. E. Lindelöf a établi dans le présent *Bulletin* en 1908.

L'exposé de la théorie de la convergence est essentiel pour l'économie du Mémoire à cause de son parallélisme avec la théorie suivante de la summabilité, ou plutôt parce que celle-ci en est une généralisation directe.

L'auteur s'en occupe dans la seconde Section qui commence par une orientation sur son but et sur les voies qui l'y ont conduit.

Le paragraphe 1 de cette Section contient des théorèmes généraux sur des séries summables dans le sens de Cesàro. En particulier, la circonstance qu'il faut appliquer ici ces séries à représenter des fonctions analytiques dans des domaines à deux dimensions a demandé une généralisation du théorème fondamental de Weierstrass sur les séries convergentes.

Dans le paragraphe 2, l'auteur trouve la nature des domaines où une série de Dirichlet est summable respectivement du 1er, 2e, ..., $r^{\text{ième}}$ ordre et démontre que dans ces domaines, qui sont des semi-plans déterminés par les perpendiculaires à l'axe réel $\sigma = \lambda_1$, $\sigma = \lambda_2$, ..., $\sigma = \lambda_r$, la valeur de summabilité représente une fonction analytique et partout régulière, qui pour $\lambda_0 > \sigma > \lambda_r$ est une continuation de celle qu'on obtient, pour $\sigma > \lambda_0$, par une sommation ordinaire.

Après des applications à des types particuliers des séries (§ 3), l'auteur exprime (§ 4) λ_r au moyen des coefficients et applique les résultats à documenter l'existence de séries dont les propriétés de summabilité sont particulièrement simples, et qui lui seront utiles dans les recherches suivantes.

Dans le paragraphe 5, il résout le problème sur la distribution des abscisses (λ_r); de summabilit et, dans le paragraphe 6, il montre comment la série se comporte dans le voisinage de points de la limite $\sigma = \lambda_r$; dans le paragraphe 7, comment elle se comporte pour des valeurs infinies de l'ordonnée τ.

Ainsi l'auteur a préparé la solution (§ 8) de ce qu'il appelle *le problème de summabilité* relatif aux séries de Dirichlet. Les propriétés analytiques de la fonction étant données, il faut en déduire la détermination de la limite $\sigma = \Lambda$ du semi-plan dans lequel la série peut être summable (d'un ordre encore inconnu). Cela dépend de la régularité ou singularité et de l'ordre infinitésimal de la fonction aux points $\tau = \infty$. L'auteur distingue à cet égard entre trois cas, dont il prouve ensuite l'existence. Il finit par établir un théorème général sur la multiplication des séries de Dirichlet.

H. Z.

EMDEN (Dr R.), Privat-docent für Physik und Meteorologie an der kgl. Techn. Hochschule in München. — GASKUGELN, ANWENDUNGEN ÜBER MECHANISCHEN WÄRMETHEORIE AUF KOSMOLOGISCHE UND METEOROLOGISCHE PROBLEME. Mit 24 Figuren, 12 Diagrammen und 5 Tafeln im Text. Teubner, 1907.

M. Emden a coordonné dans ce Livre une partie des Leçons qu'il a faites à Munich de 1901 à 1904 sur les applications de la Thermodynamique à la Météorologie et à diverses questions de Cosmogonie. Tout ce qui concerne la circulation générale de l'atmosphère est réservé pour un autre Volume. Tout le Volume est écrit avec le souci de rendre faciles les applications précises de la théorie; on trouve dans chaque Chapitre des Tables numériques détaillées, souvent résumées sous forme de diagrammes cotés. Toute la théorie est applicable aux masses formées de gaz parfaits pesants, à tous les degrés de condensation, soit en masses sphériques comme le Soleil, soit en nébuleuses.

L'intermédiaire utilisé pour tous les calculs est ce que l'auteur appelle la *transformation polytrope;* c'est une transformation réversible à *chaleur spécifique* γ *constante*,

$$Q = \gamma(T_2 - T_1).$$

Suivant la valeur attribuée à la chaleur spécifique, on obtient comme cas particuliers les transformations à pression constante ($\gamma = c_p$), à volume constant ($\gamma = c_v$), adiabatiques ($\gamma = 0$), isothermes ($\gamma = \pm\infty$) et une infinité d'autres.

Les problèmes d'équilibre des masses gazeuses sont générale-

ment traités en supposant que la masse entière est soumise à une même transformation polytrope dans toute sa profondeur, et les Tableaux numériques sont établis de manière à pouvoir construire les solutions relatives à toute loi de variation de la chaleur spécifique en profondeur arbitrairement choisie.

On jugera de l'importance des questions ainsi abordées d'après la Table des matières.

M. B.

MÉLANGES.

SUR LES QUARTIQUES PLANES PARALLÈLES

PAR B. HOSTINSKY.

En désignant par k une constante quelconque et par t un paramètre variable, on démontre aisément que les équations suivantes

$$(1) \qquad X = \frac{16t^3 + 12kt^2 - 3k}{3(4t^2+1)}, \qquad Y = \frac{8t^4 - 6t^2 - 12kt}{3(4t^2+1)}$$

définissent (en coordonnées rectangulaires X, Y) une courbe unicursale du quatrième degré à 3 points de rebroussement (qui sont tous réels, si k est réel).

En faisant varier k, on obtient une famille de courbes *parallèles*. De plus, on peut démontrer : *Il n'y a qu'un seul système de quartiques parallèles;* il est représenté par les équations (1).

Le centre de courbure (x, y) correspondant à un point (t) de la courbe (1) est déterminé par les formules suivantes :

$$(2) \qquad x = t - \frac{4}{3}t^3, \qquad y = 2t^2.$$

La développée commune des courbes (1) est donc une cubique unicursale.

Représentons chaque cercle de rayon (r) et de centre (x, y) par le point (x, y, ir) de l'espace. La série de cercles osculateurs appartenant à une courbe (C) du système (1) sera représentée ainsi par les points d'une cubique gauche minima (Γ); les tangentes de (Γ) vont rencontrer le plan (x, y) aux points de la courbe (C).

Les courbes (Γ), étudiées par Lie, sont situées sur certaines surfaces minima du second degré considérées par Poisson. Par

exemple, le cylindre imaginaire

$$2y = (x + iz)^2$$

contient une infinité de courbes (Γ) (les génératrices du cylindre sont isotropes).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

KOMMERELL (V.) u. KOMMERELL (K.). — *Allgemeine Theorie der Raumkurven u. Flächen*. I. Bd. 2. Aufl. VIII-172 p. avec 19 fig. (*Sammlung Schubert*. Neue Aufl.). In-8°. Leipzig, G.-J. Göschen. Relié, 4 m. 80.

THIELE (T.-N.). — *Interpolationsrechnung*. In-8°, XII-175 p. B.-G. Teubner. 10 m.

WELLISCH (Siegm.). — *Theorie u. Praxis der Ausgleichungsrechnung*. I. Bd. Elemente der Ausgleichungsrechnung. In-8°, XI-276 p. avec un portrait de K.-F. Gauss. Wien, C. Fromme. 10 m.

OSTWALD (W.). — *L'énergie*, trad. de l'all. par *E. Philippi*. X-240 p. Paris, F. Alcan. 3 fr. 50.

— *Die Entwicklungsgeschichte der Elektrochemie*. 210 p. avec 5 fig. Leipzig, J.-A. Barth. Relié, 5 m. 60.

BOULANGER (J.) et FERRIÉ (G.). — *La télégraphie sans fil et les ondes électriques*. 7e édition, augmentée et mise à jour. Petit in-8°, XVI-471 p. avec 255 fig. dans le texte. Nancy, Berger-Levrault et Cie. 10 fr.

ANDRÉ (Désiré). — *Des notations mathématiques. Énumération, choix et usage*. In-8° (25-16), XVIII-501 p. Paris, Gauthier-Villars. 16 fr.

BLUMENTHAL (O.). — *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini*. In-8° (23-16), VII-150 p. avec 6 fig. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr. 50.

BOLZA (Osk.). — *Vorlesungen üb. Variationsrechnung*. Umgearb. u. stark verm. deutsche Ausg. der *Lectures on the calculus of variations*, desselben Verf. 3 Lfg. Gr. in-8°, IX p. 541-705 avec 117 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 5 m. Complet, 19 m. Relié, 20 m.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de

Munich et de Vienne, avec la collaboration de nombreux savants. Édition française. Rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de *Jules Molk*. Tome I (1er vol.). Arithmétique. Rédigé dans l'édition allemande sous la direction de François Meyer. Fasc. IV. In-8°, 489-616 p. Paris, Gauthier-Villars. Leipzig, B.-G. Teubner. 4 m.

— La même. Tome I (4e vol.). Calcul des probabilités. Théorie des erreurs. Applications diverses. Rédigé dans l'édition allemande sous la direction de François Meyer. Fasc. III. In-8°, 321-480 p. Paris, Gauthier-Villars. Leipzig, B.-G. Teubner. 5 m.

FABRY (E.). — *Problèmes et exercices de mathématiques générales, énoncés et solutions.* In-8°, 420 p. Paris, A. Hermann. 10 fr.

FOUËT (Edouard-A.). — *Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.* T. III : *Les fonctions algébriques, les séries simples et multiples, les intégrales.* 2e édit. In-8°, XI-112 p. avec 25 fig. Paris, Gauthier-Villars. 9 fr.

HADAMARD (J.). — *Leçons sur le calcul des variations.* T. I : *La variation première et les conditions du premier ordre. Les conditions de l'extremum libre.* In-8°, VII-496 p. Paris, A. Hermann. 18 fr.

JADANZA (Nicodemo). — *Trattato di Geometria pratica.* In-8°, 800 p. Torino, E. Avalle. 20 l.

KIEPERT (Ludw.). — *Grundriss der Differential- u. Integral-Rechnung.* I. Tl. : *Differential-Rechnung.* 11. unveränd. Aufl. des gleichnam. Leitfadens v. *Max Stegemann.* Gr. in-8°, XX-818 p. avec 181 fig. Hannover, Helwing. 12 m. 50; relié, 13 m. 50.

KILLING (W.) u. HOVESTADT (H.). — *Handbuch des mathematischen Unterrichts.* I. Bd. Gr. in-8°, VIII-456 p. avec 32 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 10 m.

LANDAU (Edm.). — *Handbuch der Lehre v. der Verteilung der Primzahlen.* Gr. in-8°. Leipzig, B.-G. Teubner. 34 m.; relié, 36 m. 1er vol. : XVIII-564 p., 20 m.; relié, 21 m. 2e vol. : IX et 565-961 p., 14 m.; relié, 15 m.

RIQUIER (Charles). — *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles.* In-8°, XXIII-590 p. Paris, Gauthier-Villars. 20 fr.

SERRET (J.-A.). — *Cours d'Algèbre supérieure.* 6e édit. 2 vol. in-8°, XXIII-14 p. Paris, Gauthier-Villars. 25 fr.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BLUMENTHAL (O.). — PRINCIPES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE INFINI. (*Collection de monographies sur la théorie des fonctions*, publiée sous la direction de M. Émile Borel.) Paris, Gauthier-Villars; 1910.

Ce remarquable Ouvrage a pour objet la théorie la plus générale des fonctions entières de genre infini, théorie dont les premières bases ont été posées par M. Borel dans son Mémoire, aujourd'hui classique, *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX, 1897).

On sait qu'une fonction entière $f(z)$, de genre fini, est caractérisée par sa *croissance*, croissance comparable à celle d'une exponentielle $e^{|z|^\rho}$. Si $f(z)$, au contraire, est de genre ou d'ordre infini, cette fonction croît sur certains chemins plus vite que toute exponentielle $e^{|z|^\rho}$. Il se peut que la croissance de $f(z)$ puisse encore être définie au moyen d'une fonction formée d'exponentielles superposées; ainsi le plus grand module de $f(z)$ pour $|z| = r$ peut être comparable à

$$(1) \qquad e^r \quad \text{ou} \quad e^{e^r}, \quad \ldots;$$

la fonction est alors, d'après la terminologie que M. Blumenthal emprunte à M. Maillet, une fonction de *genre* ou *d'ordre infini non transfini*. Il peut arriver, au contraire, que $f(z)$ [ou, plus exactement, son *module maximum*, c'est-à-dire le plus grand module de f pour $|z| = r$] croisse plus vite que toutes les exponentielles (1) : la fonction est alors d'ordre transfini ; elle est, suivant la définition de M. Borel, *à croissance très rapide*.

Ce sont les fonctions d'ordre transfini qui occupent M. Blumenthal, mais les fonctions d'ordre transfini les plus générales. Or, pour étudier ces fonctions d'une manière complète et rigoureuse, il ne suffit pas (M. Blumenthal le montre) de considérer les fonctions à croissance très rapide de M. Borel. En effet, la définition de M. Borel exclut le cas où la fonction $f(z)$ serait

à *croissance très irrégulière*, cas que M. Blumenthal caractérise comme il suit : « On peut, dit-il, former une fonction qui, sur une infinité de cercles r_1, r_2, ..., est à croissance très rapide, tandis que, sur une infinité de cercles intermédiaires r'_1, r'_2, ..., sa valeur absolue reste inférieure à e^r. » L'existence de telles fonctions introduit, on le devine, de graves difficultés dans l'étude de la croissance des fonctions entières.

La méthode suivie par M. Blumenthal pour mener à bien cette étude repose sur la comparaison des fonctions entières les plus générales avec des fonctions construites artificiellement et dont la croissance est relativement régulière (fonctions qui ne croissent jamais exceptionnellement vite). Ces fonctions, appelées *fonctions-types*, sont définies comme il suit (Chap. II) :

Soit ε un infiniment petit, fonction de la variable réelle x, qui tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$. M. Blumenthal appelle *fonction-type adjointe à* ε toute fonction $T_\varepsilon(x)$ qui satisfait constamment à la *condition de la croissance typique*

$$(I) \qquad T_\varepsilon(x') = T_\varepsilon(x)^{1+\varepsilon}, \qquad x' = x^{1+\frac{1}{T_\varepsilon(x)^{\varepsilon}}}.$$

Cela posé, $\varpi(x)$ étant une fonction continue croissante, une fonction-type $T_\varepsilon(x)$ adjointe à ε sera, en outre, *adjointe à* $\varpi(x)$ si elle satisfait aux deux conditions suivantes : *pour* toutes *les valeurs de* x,

$$(II) \qquad T_\varepsilon(x) \geq \varpi(x);$$

pour au moins une suite de valeurs de x *tendant vers l'infini*,

$$(III) \qquad T_\varepsilon(x) \leq \varpi(x)^{1+\delta},$$

δ *étant un infiniment petit convenablement choisi.*

Il importe de remarquer que le choix de l'infiniment petit ε n'est pas indépendant de la fonction $\varpi(x)$. M. Blumenthal doit donc, pour justifier les définitions qui précèdent, établir la proposition suivante :

Étant donnée une fonction continue croissante quelconque, $\varpi(x)$, *on peut imposer à* ε *des conditions de décroissance telles qu'il existe des fonctions-types adjointes à* $\varpi(x)$ *et à* ε.

Cette proposition, établie dans le Chapitre II, est reprise et complétée dans une Note placée à la fin du Volume (Note I).

Le théorème fondamental, que nous venons d'énoncer pour la fonction $\varpi(x)$, subsistera si nous remplaçons cette fonction croissante par une suite de points : Étant donnés dans le plan des (x, ϖ) une suite infinie de points à abscisses et ordonnées finies,

$$P_1 = (x_1, \varpi_1), \qquad P_2 = (x_2, \varpi_2), \qquad \ldots \qquad \text{avec} \qquad \lim_{n=\infty} x_n = \lim_{n=\infty} \varpi_n = \infty,$$

que nous supposerons rangés d'après l'ordre de grandeur de leurs abscisses, et, s'il y en a d'égales, d'après les ordonnées, on peut construire une fonction-type $T_\varepsilon(x)$ telle que

$$\text{(II}') \qquad T_\varepsilon(x_n) \geqq \varpi_n \qquad \textit{pour toutes les valeurs de } n,$$

$$\text{(III}') \qquad T_\varepsilon(x_n) \leqq \varpi_n^{1+\delta} \qquad \textit{pour une infinité de valeurs de } n.$$

M. Blumenthal réussit, d'autre part, à préciser l'énoncé de son théorème en évaluant l'ordre de grandeur de la somme des intervalles exceptionnels où la fonction $\varpi(x)$ n'est *pas* comparable à la fonction-type adjointe. Soit, par exemple, $\varpi_R(x)$ une fonction telle que, pour toutes les valeurs suffisamment grandes de x, $\varpi_R(x) \geqq e^x$: il existe alors des fonctions-types $T_\varepsilon(x)$ adjointes à $\varpi_R(x)$ qui coïncident avec $\varpi_R(x)$ partout, sauf dans des intervalles d'étendue totale finie (p. 37).

La notion de fonction-type est utilisée par M. Blumenthal, pour l'étude du problème fondamental de la théorie des fonctions entières : comparaison entre le *module maximum* [pour $|z| = r$], $M(r)$, de la fonction entière $f(z)$, et la *densité des zéros* de cette fonction.

Pour faire cette comparaison, nous définirons d'abord *l'ordre* et *l'exposant* de la fonction entière (Chap. III et Chap. IV).

Posons

$$M(r) = e^{\nu(r)};$$

puis, choisissant un infiniment petit convenable ε, envisageons l'ensemble des fonctions-types asymptotiques adjointes à $\nu(r)$ et à ε : chacune de ces fonctions sera appelée *un ordre* de la fonction $f(z)$ adjoint à ε, et désignée par $\mu^{(\varepsilon)}(r)$; pour tout ordre

$\mu(r)$ on a les relations caractéristiques :

$$\mathrm{M}(r) < e^{r^{\mu(r)}}, \qquad \text{pour toutes les grandes valeurs de } r,$$

$$\mathrm{M}(r) > e^{r^{\mu(r)^{1-\delta}}}, \qquad \text{pour des valeurs infiniment grandes de } r;$$

si l'on veut distinguer $\mu(r)$ de $\nu(r)$, on dira que $\mu(r)$ est *un ordre net* de $f(z)$, tandis que $\nu(r)$ en est *l'ordre brut*.

Considérons maintenant la suite des points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ rangés d'après l'ordre de grandeur de leurs modules $r_1, r_2, \ldots$. Pour chaque n formons le nombre positif σ_n défini par

$$r_n^{\sigma_n} = n, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \sigma_n = \frac{\log n}{\log r_n}.$$

Nous supposons que les nombres σ_n ne restent pas tous au-dessous d'une limite fixe (cas des fonctions entières de genre fini). Marquons alors, dans un plan rapporté aux axes rectangulaires r, σ, les points (r_n, σ_n) : nous pouvons construire des fonctions-types asymptotiques adjointes à cet ensemble et à des infiniment petits convenablement choisis ε : nous désignerons ces fonctions par $\rho(r)$ et les appellerons des *exposants* de la suite (α_n) : elles jouissent des deux propriétés caractéristiques suivantes [je pose $\rho_n = \rho(r_n)$] :

1° La série $\sum \dfrac{1}{r_n^{\rho_n^{1+\varepsilon'}}}$ est convergente,

2° La série $\sum \dfrac{1}{r_n^{\rho_n^{1-\varepsilon'}}}$ est divergente,

pour un infiniment petit ε' convenablement choisi. Pour distinguer les nombres ρ_n des nombres σ_n, on dira que $\rho(r)$ est un *exposant net*, tandis que la suite (σ_n) est l'*exposant brut*.

Les définitions qui précèdent permettent à M. Blumenthal d'étendre aux fonctions entières les plus générales les théorèmes fondamentaux qui ont été établis, au cours des vingt dernières années, dans le cas des fonctions de genre fini.

Nous avons d'abord le théorème suivant (Chap. III) : *Le nombre n des zéros de $f(z)$ situés à l'intérieur, ou sur la périphérie d'un cercle de rayon suffisamment grand r, ne peut dépasser une limite supérieure fournie par les ordres de la fonction :* $n < r^{\mu(r)^{1+\delta}}$. Ainsi l'exposant est limité par l'ordre.

Cherchons, réciproquement, à limiter l'ordre par l'exposant. Il

faudra, pour cela, que nous établissions une distinction entre les *fonctions entières complètes* (quelconques) et les *produits canoniques de facteurs primaires* qui sont, parmi les fonctions admettant un ensemble donné de zéros, celles que nous *convenons de regarder comme les plus simples.*

C'est l'ordre du seul produit canonique qui pourra être limité en fonction de l'exposant, et non pas, bien entendu, l'ordre d'une fonction entière complète quelconque (produit d'un produit canonique par une exponentielle $e^{H(z)}$, où H est une fonction entière arbitraire).

Voici, pour la définition des produits canoniques, la convention adoptée par M. Blumenthal (p. 53-54):

Posons

$$\Pi(z) = \prod_{1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right),$$

où E_p est le facteur primaire [1]

$$E_p(u) = (1-u)e^{u+\frac{1}{2}u^2+\ldots+\frac{1}{p}u^p};$$

il s'agit de déterminer les entiers p_n correspondant à la suite des points (α_n).

Or soit $\rho(r)$ un exposant adjoint à la suite (α_n) et à l'infiniment petit ε; nous pouvons choisir ε de manière que ρ^ε *soit une fonction non décroissante et tendant vers l'infini;* si nous formons alors le nouvel exposant $\rho'(r) \equiv \rho(r)^{1+2\varepsilon}$, ρ' sera une fonction non décroissante. Désignant maintenant par $[\rho'_n]$ l'entier compris entre $\rho'_n - 1$ et ρ'_n, *nous obtiendrons le produit canonique correspondant à l'exposant $\rho(r)$ en posant $p_n = [\rho'_n]$ pour $r_n > 1$ et $p_n = 0$ pour $r_n \leq 1$.*

L'ordre du produit canonique ainsi défini jouit de propriétés toutes semblables à celles qui caractérisent les fonctions de genre fini:

---

[1] M. Blumenthal s'appuie sur la proposition suivante qu'il établit dans une Note (Note II à la fin du Volume) et qui précise fort utilement un théorème classique: *Pour toutes les valeurs de u et pour tous les entiers p, on a l'inégalité*

$$|E_p(u)| \leq e^{|u|^{p+1}}.$$

A. *Le produit canonique est, pour toutes les valeurs suffisamment grandes de r, plus petit que* $e^{r^{\rho(r)^{1+\delta}}}$ (ordre limité par l'exposant).

B. *Pour des valeurs infiniment grandes de r, le produit canonique est, sur tout le cercle r, plus grand que* $e^{-r^{\rho(r)^{1+\delta}}}$.

Ces théorèmes, avec diverses propositions les complétant, sont démontrés au Chapitre IV.

*
* *

Nous venons de résumer les principes de la méthode de M. Blumenthal. Cette méthode côtoie celles de plusieurs auteurs, mais elle a une précision et une sûreté qui faisaient défaut jusqu'à ces dernières années à la théorie des fonctions d'ordre infini. M. Blumenthal en tire nombre de propositions intéressantes [1] que nous ne pouvons songer à rapporter ici. Signalons seulement deux remarquables variantes du théorème de M. Picard, qu'on trouvera au Chapitre VII.

Considérons les points où la fonction entière $f(z)$ prend une valeur quelconque a, et envisageons la distribution de ces points que nous appellerons *distribution* $[a]$:

I. *Soient* $\mu(r)$ *un ordre de la fonction*, $\rho(r)$ *une fonction-type telle qu'on ait* constamment [2], *à partir d'une valeur* r_0 *de* r,

$$\rho(r) < \mu(r)^{1-\alpha},$$

α *étant une constante. Il existe au plus une valeur unique* a *dont la distribution admet un exposant* $\leqq \rho(r)$. — Cette proposition est appelée par M. Blumenthal : *petit théorème de M. Picard*.

II. *Tout exposant commun* ρ_{a_1, a_2} *de deux distributions quel-*

(1) Un bon nombre de ces propositions figurent déjà dans le Mémoire de M. Borel cité plus haut (*Acta mathematica*, t. XI, Chap. V).

(2) Si la distribution $[a]$ n'est pas *constamment* infra-normale, rien ne nous permet d'affirmer, dans l'état actuel de nos connaissances, que toutes les autres distributions soient normales (p. 114 et suiv.).

conques $[a_1]$ *et* $[a_2]$ *satisfait à l'inégalité*

$$\mu_0(r) < \rho_{a_1 a_2}(r)^{1+\delta},$$

μ_0 *désignant l'ordre minimum de la fonction*. C'est là le *grand théorème de M. Picard.*

Nous avons vu qu'en deux endroits les principes sur lesquels repose la théorie de M. Blumenthal se présentent comme arbitraires et se trouvent seulement justifiés par les résultats auxquels ils conduisent : je veux parler de la définition des fonctions-types adjointes, et du choix des degrés p_n figurant dans le produit canonique, choix qui résulte de la définition de l'exposant (net). Les conventions adoptées par M. Blumenthal sont-elles les plus avantageuses, ou y aurait-il lieu, au contraire, de les modifier, pour préciser les théorèmes déjà établis ou pour en démontrer de nouveaux? La question est délicate, et l'on ne s'étonnera pas que M. Blumenthal ne puisse y apporter, dans son Chapitre V, une réponse tout à fait définitive. Quelles surprises nous réservent, en particulier, les recherches de M. Denjoy sur le choix de l'exposant? M. Blumenthal, qui écrit avant l'impression de la thèse de M. Denjoy, ne se prononce pas encore sur ce point. Mais il montre que ses définitions satisfont pleinement à la condition essentielle qui était pour lui requise : elles permettent, en effet, d'établir une correspondance étroite entre le théorème A (ordre du produit canonique limité par l'exposant) et la proposition inverse (exposant limité par l'ordre); elles nous rapprochent, en d'autres termes, autant qu'on pouvait l'espérer, de l'énoncé intuitif : *l'ordre d'un produit canonique est égal à l'exposant de la suite de ses zéros*. Ainsi, se proposant de combler le fossé qui séparait les fonctions entières d'ordre fini des fonctions d'ordre infini, M. Blumenthal a pleinement atteint son but.

P. BOUTROUX.

H. BOUASSE, professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse. COURS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE ET EXPÉRIMENTALE, SPÉCIALEMENT ÉCRIT POUR LES PHYSICIENS ET LES INGÉNIEURS, CONFORME AU PROGRAMME DU CERTIFICAT DE MÉCANIQUE RATIONNELLE. Un vol. grand in-8, 692 pages. Paris, librairie Ch. Delagrave, 1910. Prix, 20 fr.

I.

Léonard de Vinci a écrit quelque part : « La Mécanique est le paradis des Mathématiques ; c'est par elle, en effet, qu'on atteint le fruit mathématique. »

Réduites à elles-mêmes, les Mathématiques ne portent pas de fruit ; vigoureuses et élégantes malgré leur croissante complication, les diverses branches de la Science des nombres peuvent bien produire des fleurs dont la beauté ravit ceux qui sont capables de les contempler en leur plein épanouissement ; mais ces fleurs demeurent stériles ; pour qu'en elles le fruit se noue, il faut qu'elles éprouvent le fécondant contact de l'expérience.

« Les Mathématiques, a dit très justement M. Bouasse (1), sont non pas une science comme les autres, mais l'ensemble des formes abstraites de raisonnement nécessitées par les autres. »

Une forme de raisonnement ne devient un raisonnement que si on lui fournit une matière ; l'ensemble des procédés de déduction que les Mathématiques traduisent en un langage précis ne nous fait, par lui-même, rien connaître ; il n'accroît nos connaissances que si l'on applique ces procédés de déduction à des principes venus d'ailleurs, à des propositions reconnues vraies par l'expérience ; ces propositions issues de l'expérience, d'autre part, demeureraient stériles si la déduction ne les obligeait à produire toutes les vérités dont elles sont grosses ; et la déduction n'atteint sa parfaite rigueur et sa pleine puissance que là où elle peut revêtir la forme mathématique.

Pas de science réelle et vivante, donc, si l'on n'y trouve, intimement unies entre elles, la matière fournie par l'expérience et la

(1) H. BOUASSE, *Développement historique des théories de la Physique* (*Scienza*, t. VII, 1910, p. 281).

forme imposée par les Mathématiques; pas de connaissance parfaitement organisée qui ne résulte du contact et de la compénétration de la Mathématique et de la Physique.

Or, ce contact, c'est par la Mécanique qu'il doit nécessairement s'établir.

Cette affirmation n'eût rencontré aucun contradicteur autorisé depuis le milieu du XVIIe siècle jusqu'aux dernières années du XIXe siècle; mécanistes comme Descartes et Huygens ou dynamistes comme Newton et Laplace, tous les physiciens s'accordaient en leur foi à un même dogme; pour tous il n'y avait, il ne pouvait y avoir d'autres changements dans le monde des corps que des changements de lieu dans l'espace; sous les qualités variées dont la matière se montre teinte à nos yeux, on ne trouvait que diverses figures et divers mouvements locaux; ainsi la science du changement de lieu dans l'espace, la science du mouvement local, la Mécanique, gisait au fondement même de la Physique; ou, pour mieux dire, la Physique n'était qu'une science provisoire dont la raison d'être se trouvait dans l'imperfection de nos connaissances; lorsque celles-ci seraient suffisamment avancées, la Physique disparaîtrait pour faire place à une Mécanique universelle dont Laplace annonçait le prochain avènement, à une Mécanique où des règles semblables détermineraient les trajectoires des astres dans les cieux et des derniers atomes au sein des corps.

Cette grandiose vision n'était-elle qu'un beau rêve? Beaucoup sont, aujourd'hui, tentés de le croire. Les plus grands génies ont consacré toutes les puissances de leur raison à tenter cette réduction de la Physique entière à la Mécanique; leurs efforts avaient semblé, tout d'abord, couronnés par le succès; mais, bientôt, les essais les mieux conduits d'explication mécanique ont vu se dresser devant eux des objections qu'ils étaient impuissants à renverser; d'autres essais ont été tentés par d'autres voies; d'autres obstacles leur ont barré le passage; les théories mécaniques ont eu beau accroître sans cesse leur puissance et leur souplesse, fût-ce au prix d'une complication toujours grandissante, elles n'ont abouti qu'à mieux reconnaître à quel point la difficulté du problème à résoudre surpassait la force de pénétration des solutions proposées. Il s'est trouvé alors des gens (et nous en sommes) pour douter que le problème fût vraiment susceptible de solution. L'af-

firmation que tout, dans le monde des corps, se peut réduire à la figure et au mouvement est purement gratuite ; on ne voit vraiment pas quelle absurdité viendrait infliger un démenti à celui qui la voudrait rejeter. Pendant longtemps, certains ont pu se demander si cette affirmation n'était pas la condition qui, seule, permet d'appliquer les Mathématiques à la Physique, si la construction d'une Physique mathématique ne deviendrait pas impossible à qui ne croirait pas que la Physique se réduit à la Mécanique ; nul ne peut aujourd'hui se laisser arrêter par ce doute ni méconnaître que l'on peut construire une Physique mathématique où l'on traite de certains changements sans les réduire au mouvement local. Pourquoi s'acharnerait-on, dès lors, à poursuivre cette réduction d'une désespérante difficulté, dont aucune promesse autorisée ne nous affirme qu'elle soit possible ? La place est si bien gardée, qu'elle a défié, jusqu'ici, les plus violents assauts ; savons-nous si elle n'est pas vraiment imprenable ? Ne nous attardons donc pas davantage à en tenir le siège ; la campagne est libre ; lançons-y à marches forcées notre armée d'invasion.

Ceux qui raisonnent ainsi ne regardent plus la Mécanique comme la science idéale en laquelle la Physique tout entière viendra se résoudre au jour où la Physique atteindra sa perfection. Outre la Mécanique, science du seul mouvement local, ils conçoivent une Physique proprement dite, science plus complexe que la Mécanique, où l'on traite non seulement du mouvement local, mais encore d'autres transformations qui ne se réduisent pas au changement de lieu. Pour eux, la Physique, prise en son entière généralité, devient la théorie mathématique des modifications de toute espèce dont les corps sont susceptibles, et la Mécanique n'est plus qu'un chapitre particulier de cette Énergétique.

Ce chapitre particulier n'en demeure pas moins l'introduction nécessaire à la Physique ; c'est par là que la Mathématique doit passer pour venir au contact des données de l'observation ; il est la porte du paradis mathématique, de ce paradis où la main de l'homme pourra cueillir le fruit de la science physique. Et si la Mécanique est l'introduction de la Physique, elle le doit à cela seul qu'elle est le Chapitre le plus simple de la Physique et que notre esprit, lorsqu'il veut mettre de l'ordre et de la clarté dans une science, doit procéder du simple au composé.

Il n'existe, à proprement parler, dans le monde des corps, aucun phénomène où le mouvement local se trouve dissocié des autres transformations, des variations de la température, des changements d'état physique ou chimique, des modifications électriques ou magnétiques. Jamais, peut-on dire, nous n'observons quelqu'une de ces transformations qu'un certain mouvement local ne l'accompagne. Par suite de la vaporisation de l'eau et de la condensation de la vapeur, les locomotives entraînent les trains rapides et les navires traversent les océans. Les réactions chimiques explosives lancent les projectiles et font reculer les canons; elles font rouler les voitures automobiles et voler les aéroplanes. Les courants électriques, les aimantations et les désaimantations qu'ils produisent font tourner les machines dynamo-électriques avec une prodigieuse vitesse.

Nulle part, non plus, nous n'observons le mouvement local pur de tout autre changement physique ou chimique. Les astres du système solaire ne sont pas simplement des solides géométriques qui se promènent dans l'espace; ce sont des corps physiques qui s'échauffent ou se refroidissent, qui se dilatent ou se contractent, où l'eau des mers s'évapore, où les nuages se condensent en pluie, où se produisent des réactions chimiques, des perturbations électriques et magnétiques de toute sorte. Lorsque le son se propage dans l'air, la vibration de chaque partie du fluide s'accompagne de condensations et de dilatations, d'élévations et d'abaissements de la température.

Point donc de problème énoncé par l'observation d'où l'étude du mouvement local soit entièrement exclue; mais point de problème, non plus, qui relève de la seule étude du mouvement local; toute question de Physique sera mécanique par quelque côté; mais aucune question, semble-t-il, ne pourra être regardée comme exclusivement mécanique, en sorte qu'on pourrait croire que la Mécanique pure est impossible.

Si le mouvement local ne se produit jamais sans que quelque changement physique ne l'accompagne, il est cependant des cas où ce mouvement local est seul à nous intéresser. Il est une foule de questions dont la réponse requiert seulement que nous sachions comment se déplacent les astres du système solaire, et non point que nous puissions décrire les phénomènes physiques et chimiques

dont chacun d'eux est le siège; pour résoudre ces questions, notre entendement pourra, au système solaire réel, substituer un système solaire fictif que formeront des corps solides, de figure invariable, incapables d'éprouver d'autres changements que des déplacements. Il est des cas où les variations de densité et de température d'un système vibrant ont une influence tout à fait négligeable sur les oscillations que nous nous proposons d'analyser; nous pourrons alors remplacer l'instrument où ces effets se produisent par un instrument idéal que n'affectera plus aucun changement de de densité ni de température. Ainsi peut-on construire des théories purement mécaniques, une Mécanique céleste, une Mécanique des mouvements vibratoires; les problèmes auxquels ces théories s'appliquent ont été extraits par voie de simplification des problèmes que l'observation conduit à énoncer; la solution de ces problèmes ne laisse pas de présenter, en bien des cas, une très grande et très directe utilité.

Par des simplifications toutes semblables, on pourra, de problèmes réels où le mouvement local est invariablement lié à quelque changement d'état ou de qualité, tirer des problèmes idéaux où ces derniers changements seront seuls étudiés, purs de tout mélange avec des déplacements.

Ainsi, lorsqu'un morceau de fer ou de cuivre s'échauffe ou se refroidit, des dilatations ou des contractions changent la position que chacune des parties du métal occupe dans l'espace; la variation qualitative de la température entraîne des mouvements locaux. En bien des cas, cependant, les changements que, d'un instant à l'autre, la température éprouve en chaque masse élémentaire présenteront pour nous un grand intérêt, tandis que nous nous soucierons fort peu des très petits déplacements de cette masse. Au morceau de cuivre contractible et dilatable sur lequel porte l'observation, nous pourrons alors substituer par la pensée un solide rigoureusement indéformable et immobile; à l'imitation de Fourier, nous construirons une théorie de la conductibilité de la chaleur qui sera pure de tout lien avec la Mécanique.

Ces problèmes artificiellement simplifiés, problèmes de Mécanique pure ou problèmes de Physique pure, ont donc pour nous, dans un grand nombre de cas, un intérêt immédiat; non pas qu'en les résolvant nous répondions à toutes les questions qui se

posent à propos du problème réel, toujours infiniment complexe, mais parce qu'en les résolvant nous répondons à celles de ces questions qui nous paraissent les plus importantes.

Ces problèmes de Mécanique pure ou de Physique pure ont encore une utilité d'un autre genre, médiate celle-là, mais qui, pour plusieurs d'entre eux, surpasse de beaucoup leur utilité immédiate.

Parce qu'ils ont été rendus très simples, ils ont pu être abordés de bonne heure, et l'analyse qui en a été faite a pu être suivie très loin. Lorsque, plus tard, l'esprit humain s'est trouvé aux prises avec des problèmes beaucoup plus complexes, où l'on ne pouvait négliger ni les changements physiques devant les mouvements locaux, ni les mouvements locaux devant les changements physiques, il a profité, pour en tenter la solution, de l'expérience acquise en des circonstances moins compliquées ; il s'est laissé guider par les méthodes qui avaient permis de répondre aux questions simples ; ces méthodes, il s'est efforcé de les généraliser, de les combiner entre elles ou de créer des procédés nouveaux qui leur fussent analogues ; c'est à ce travail d'imitation qu'il a eu perpétuellement recours pour construire les théories de la Physique.

La théorie purement mécanique des mouvements vibratoires, dont l'Acoustique est le prolongement immédiat, n'a pas cessé, depuis le temps d'Huygens et de Malebranche, d'être la source d'analogies où tous les physiciens ont puisé pour concevoir et développer les théories de l'Optique. C'est à l'imitation de la Mécanique céleste que se sont organisées, d'abord, les théories des forces électrostatiques, magnétiques, électrodynamiques, électromagnétiques ; ces théories se sont complétées en s'unissant à l'étude de la propagation de l'électricité au sein des conducteurs ; mais cette étude avait été calquée par Ohm sur celle que Fourier avait faite de la propagation de la chaleur ; et Fourier, à son tour, devait beaucoup à l'Hydrodynamique d'Euler ; par son développement même, d'ailleurs, cette doctrine de l'électricité est allée rejoindre l'Optique, conformant dès lors certaines de ses parties à la Mécanique des mouvements vibratoires.

La Mécanique sert donc de deux manières :

Elle sert d'une manière directe au physicien et à l'ingénieur en donnant réponse à des questions où le mouvement local joue

un rôle à ce point prépondérant que les autres transformations y peuvent être négligées.

Elle est utile d'une manière indirecte au physicien parce qu'elle lui fournit l'ensemble des types idéaux qui lui serviront, par voie d'analogie, de généralisation, de combinaison, à imaginer ses propres théories.

Le but de la Mécanique ayant été défini avec précision, il n'est pas malaisé d'indiquer les règles principales qui doivent diriger l'enseignement de cette science; il est clair, en effet, qu'une doctrine sera bien ou mal enseignée selon que celui qui l'expose tendra sans cesse vers ce qui est l'objet propre de cette doctrine ou qu'il perdra habituellement de vue cet objet.

Le professeur de Mécanique devra donc consacrer tous ses efforts à la solution de deux sortes de problèmes : des problèmes qui sont directement utiles parce qu'on y analyse des mouvements locaux qui jouent un rôle important dans les machines industrielles ou dans les appareils de Physique; des problèmes qui sont indirectement utiles, parce qu'ils sont les modèles qu'imitent les grandes théories de la Physique. Selon que son intention, d'ailleurs, sera de former des ingénieurs ou de préparer des physiciens, il devra, en ses leçons, attribuer la place prépondérante soit à l'une, soit à l'autre catégorie de problèmes.

II.

Ces règles sont-elles celles que suit, dans les Universités françaises, l'enseignement de la Mécanique?

L'esprit même de cet enseignement paraît avoir été très anciennement faussé par une fâcheuse classification des sciences.

Les règlements qui, pendant quatre-vingts ans, ont régi la licence ès sciences, ceux qui sont encore en vigueur pour l'agrégation et le doctorat ont établi une ligne de démarcation entre les Sciences mathématiques et les Sciences physiques.

En dépit de ce qu'une telle démarcation a toujours d'artificiel, partant de faux par quelque endroit, il était, semble-t-il, deux manières sensées de tracer cette frontière.

On pouvait réunir sous le nom de Sciences mathématiques non seulement celles qui étudient et perfectionnent l'instrument

mathématique, mais aussi toutes celles qui usent de cet instrument pour coordonner en théories les lois issues de l'expérience ; la Physique eût alors pris place parmi les Sciences mathématiques, auprès de la Mécanique et de l'Astronomie, puisque la construction de théories mathématiques où se rangent les lois du son, de la chaleur, de la lumière, de l'électricité et du magnétisme est son objet propre. Au delà de la frontière qui borne les Sciences mathématiques se fussent trouvées les Sciences de la nature, dont la fonction essentielle n'est plus de coordonner, à l'aide de la déduction mathématique, une foule de propositions en théories, mais bien, par la comparaison révélatrice des analogies, de classer une foule d'êtres en familles naturelles ; et la Chimie se fût alors très logiquement placée au voisinage de la Botanique et de la Zoologie. Cette façon de partager le domaine des Sciences, moins par leurs objets que par les facultés intellectuelles auxquelles elles font le plus fréquent appel, est celle qui a été adoptée en la constitution de l'Académie des Sciences, où la Section de Physique générale appartient aux Sciences mathématiques.

On pouvait définir autrement les Sciences mathématiques; on pouvait réserver ce nom aux doctrines purement abstraites des nombres et des figures ; elles ne demandent à l'expérience que des renseignements que tout homme possède, que l'usage quotidien, courant, nullement scientifique des sens suffit à lui fournir. Hors de ce domaine restreint des Sciences purement mathématiques, se fût étendue l'immense contrée des sciences qui se constituent à l'aide d'expériences plus raffinées et plus compliquées que la perception vulgaire, qui accroissent à l'aide d'instruments la puissance et la précision de nos sens; parmi ces Sciences expérimentales, on eût trouvé l'Astronomie et la Mécanique en même temps que la Physique. C'est cette division qui est, je crois, adoptée par les Universités allemandes ; c'est grâce à elle que les *Vorlesungen über die mathematische Physik* de Kirchhoff débutent par un Volume consacré à la Mécanique.

La distinction entre les Sciences mathématiques et les Sciences physiques ne se fit, dans les Facultés des Sciences, ni par l'un ni par l'autre de ces deux procédés ; la Mécanique et l'Astronomie furent mises au nombre des Sciences mathématiques, tandis que la Physique se trouvait indissolublement liée à la Chimie.

Simple mesure administrative, pensera-t-on, d'objet tout pratique; règlement d'examen qui n'avait point l'intention d'influer sur l'organisatiation même de la Science. Mais dans un pays comme le nôtre, si méticuleusement administré, si étroitement réglementé, qui pourrait limiter la portée d'une mesure de ce genre? La façon qu'ont des hommes de comprendre et d'accomplir une besogne qui leur est confiée dépend de la tournure de leur esprit; cette tournure d'esprit résulte de l'éducation qu'ils ont reçue, des enseignements qu'ils ont entendus; cette éducation, ces enseignements étaient étroitement définis par la nature du diplôme que ces hommes ont dû obtenir, par le programme de l'examen qu'ils ont dû subir; et ainsi un règlement d'examen, selon qu'il est judicieux ou peu sensé, peut avoir les conséquences, heureuses ou malheureuses, les plus graves et les plus éloignées.

Suivons les conséquences de la coupure qui fut pratiquée entre la Mécanique et la Physique.

III.

Les savants auxquels fut confié, dans les Facultés, l'enseignement de la Mécanique étaient, pour la plupart, munis de l'agrégation de Mathématiques; toujours et nécessairement, ils avaient pris le doctorat ès sciences mathématiques; c'étaient donc des hommes qui, dès leur jeunesse, s'étaient montrés particulièrement doués pour la contemplation et l'analyse des idées abstraites; qui, par une longue et laborieuse éducation, avaient exalté en leur raison la faculté de combiner les constructions de la Géométrie et les algorithmes de l'Algèbre.

Au moment de professer la Mécanique, ils ont cherché à revêtir cette science de la forme qui leur semblait la plus parfaite, à la rendre donc aussi semblable que possible aux doctrines qu'ils avaient appris dès longtemps à regarder comme absolument belles, à la Géométrie et à l'Algèbre.

Imitant ce que le géomètre avait fait depuis des millénaires, ils ont voulu ne faire à l'expérience que des emprunts aussi peu nombreux que possible, et ils ont voulu que ces emprunts fussent faits aux observations les plus courantes et les plus obvies; ils ont pris ainsi, pour fondements de la doctrine qu'ils allaient

exposer, un ensemble, aussi restreint qu'il se pût faire, de postulats sur les masses et les mouvements ; puis, sur ces fondements, tout semblables d'aspect aux axiomes de la Géométrie, ils ont, par la déduction mathématique, élevé un monument vaste et régulier. Pour mieux marquer que l'expérience n'avait pris, à l'érection de ce monument, qu'une part infime, que la raison raisonnante pouvait se vanter de l'avoir presque en entier construit par ses propres forces, on a donné à ce bel édifice mathématique le nom de Mécanique *rationnelle*. Le jour où, à côté de la chaire de Mécanique rationnelle, la Sorbonne créa une chaire de Mécanique physique et expérimentale, elle affirma, semble-t-il, avec une particulière netteté, que l'essence de la Mécanique rationnelle était de n'être d'aucune manière ni physique ni expérimentale.

Traitée par des hommes qu'avait formés la plus pure éducation mathématique, par des hommes qui n'eussent su rien écrire qui ne fût très rigoureux, très clair, très ordonné, très élégant, la Mécanique rationnelle a produit des chefs-d'œuvre; parmi les Livres et les Mémoires qui lui sont consacrés, abondent les écrits admirables. Mais ce qu'on admire, en ces œuvres, c'est l'art de combiner les constructions géométriques et les symboles algébriques. Cet art qui, en Mécanique, ne devait être qu'un moyen, qui devait servir à résoudre des problèmes utiles à l'ingénieur, à construire des théories propres à guider le physicien, cet art s'est posé comme une fin qui eût en elle-même sa propre valeur. Les lignes géométriques ne se sont plus enchevêtrées, les équations différentielles ne se sont plus intégrées afin que le mécanicien sût répondre à une question formulée par l'expérience; c'est le problème qui a été artificieusement choisi afin que le géomètre nous pût montrer la pénétrante clarté de son intuition et l'algébriste sa dextérité à manier le Calcul intégral. Séparée par une frontière malencontreuse de la Physique qui pouvait seule lui poser des questions utiles et des problèmes féconds, rendue stérile par le décret qui l'a rattachée au domaine des Mathématiques pures, la Mécanique rationnelle n'est plus qu'une sorte de terrain de manœuvre où s'exécutent d'habiles exercices d'Analyse et de Géométrie.

Exercices d'Analyse et de Géométrie, tel est bien le titre qu'il conviendrait de donner aux épreuves subies, sous le nom

d'examens de Mécanique, par les étudiants de nos Facultés. « Le mathématicien de métier, écrit M. H. Bouasse [1], ne s'occupe guère de l'application, et les cas particuliers lui répugnent. Malgré ses efforts, un problème de Mécanique devient vite entre ses mains un sujet de spéculations mathématiques. J'admire que les candidats à l'Agrégation de Mathématiques résolvent les merveilleux rébus offerts à leur sagacité. Généralement un gyroscope se promène sur un hyperboloïde, qui glisse sur un tore, lequel est astreint à rouler et à pirouetter sur un hélicoïde; ... l'énoncé remplit une page de papier ministre. Ces jeunes gens résolvent le problème en 7 heures, comme qui plaisante. Je n'ignore cependant pas qu'en les plaçant devant une machine d'Atwood, on les embarrasserait fort. »

IV.

Nous avons vu ce qu'a fait de la Mécanique l'opération qui l'a détachée de la Physique pour la souder aux Mathématiques abstraites. Voyons ce que cette même opération devait faire de la Physique.

La forme que la Physique allait revêtir était, pour ainsi dire, déterminée d'avance par l'étroite parenté qui était assignée à cette science avec la Chimie, c'est-à-dire avec une science naturelle, la plus simple et la plus avancée des Sciences naturelles.

C'est parmi les mêmes hommes qu'allaient se recruter les futurs professeurs de Physique et de Chimie; non point donc parmi ceux qui se complaisent aux idées très abstraites et aux raisonnements très rigoureux, mais bien parmi ceux chez qui la finesse d'observation est très aiguisée, voire parmi ceux qui sont doués d'une extrême dextérité manuelle, précieuse à l'expérimentateur; futurs physiciens ou futurs chimistes, ils allaient entendre les mêmes enseignements, s'exercer aux mêmes manipulations, être éprouvés par les mêmes examens; et ce que ces exercices s'attacheraient à développer en eux, ce que ces examens auraient pour objet d'y reconnaître, ce seraient surtout les facultés communes au physicien et au chimiste, l'habileté en l'art expérimental.

De même, alors, que le mécanicien, formé par une discipline

---

(1) H. Bouasse, *Cours de Mécanique rationnelle et expérimentale*, p. 1.

presque exclusivement mathématique, en était venu à regarder la Géométrie et l'Algèbre non point comme des instruments propres à résoudre les questions proprement mécaniques, mais comme les objets mêmes auxquels doit tendre l'étude de la Mécanique, de même le physicien se prit à regarder l'observation et l'expérience non pas comme les ouvrières qui doivent poser les fondations de la Physique, mais comme les architectes qui doivent tracer le plan du monument tout entier.

La Physique, comme la Mécanique, devait résulter de l'intime union d'une forme définie par les Mathématiques avec une matière fournie par l'observation et l'expérience. Les mécaniciens s'étaient appliqués à faire abstraction aussi complète que possible de ce contenu, donné par l'expérience, et ils avaient obtenu cette forme, à peu près vide de toute matière, qu'ils avaient appelée Mécanique rationnelle. Les physiciens, de leur côté, réduisirent autant qu'ils purent le faire le rôle que la forme mathématique était appelée à jouer dans leur science ; leur idéal, de plus en plus ardemment et explicitement souhaité, fut de ne rien considérer sinon les lois que l'induction tire de l'observation ; la matière presque informe constituée par l'ensemble de ces lois leur apparut comme la plus parfaite des Physiques, la Physique purement expérimentale.

Ainsi la simple mesure administrative qui a tracé une ligne de démarcation entre la Mécanique et la Physique, qui a mis la Mécanique au nombre des sciences mathématiques et qui a rejeté la Physique au voisinage de la Chimie, a produit deux sciences également incomplètes, bien qu'elles le soient par deux privations inverses l'une de l'autre ; elle a engendré ces deux monstres complémentaires : la Mécanique rationnelle dégagée de toute Mécanique physique et expérimentale, et la Physique purement expérimentale soigneusement séparée de toute Physique mathématique.

La Mécanique est, par sa nature même, la partie la plus abstraite et la plus simplifiée de la Physique ; pour se constituer donc, la Mécanique rationnelle n'a eu besoin que de pousser à l'excès une abstraction et une simplification qui eussent été légitimes si elles fussent demeurées en deçà de certaines bornes.

Il n'en va pas de même de la Physique expérimentale. Le lan-

gage de l'Algèbre et de la Géométrie est si complètement indispensable à qui prétend énoncer avec clarté et précision les lois physiques issues de l'observation, ces lois tendent si naturellement à se grouper et à s'ordonner en théories mathématiques, que la constitution d'une Physique purement expérimentale semble être une irréalisable gageure; sans cesse la Physique mathématique reparaît en la science au moment même qu'on l'en croit chassée. Ceux donc qui voudraient arracher à la Physique le dernier lambeau de son vêtement d'Algèbre et de Géométrie se voient condamnés au supplice d'un perpétuel recommencement.

Ils ne se découragent pas, cependant; par un travail incessant, ils creusent de plus en plus le fossé que les règlements d'examens ont tracé entre la Physique et les Sciences mathématiques; ils comptent bien qu'ils formeront ainsi des esprits tournés d'une manière invariable vers la science purement expérimentale à laquelle ils tendent. Autrefois, le candidat à l'agrégation de Physique devait être licencié ès sciences mathématiques; lorsque les antiques licences se trouvèrent morcelées en certificats multiples, on continua d'exiger du futur agrégé de Physique qu'il eût pris le certificat de Mécanique rationnelle; aujourd'hui, on a détendu la rigueur de cette exigence; il est, pour celui qui sera appelé à enseigner la Physique dans nos lycées, des moyens de se dispenser du certificat de Mécanique rationnelle; il est, à l'agrégation, des voies d'accès ouvertes à qui n'a point étudié la Mécanique et n'a, des Sciences mathématiques, qu'une connaissance rudimentaire; on peut aspirer à enseigner la Physique, voire dans les chaires les plus élevées, sans avoir une autre formation mathématique que celle dont a besoin le zoologiste ou le botaniste.

On espère qu'on arrivera, de la sorte, à former des physiciens dont l'intelligence sera construite exactement sur le même type que celle du naturaliste; intelligence très habile à observer les moindres détails des réalités concrètes, à comparer entre elles ces réalités, à saisir les analogies qui classeront les êtres en un ordre naturel; mais intelligence hésitante au sein des idées abstraites, trop faible pour enchaîner avec rigueur les mailles d'un raisonnement déductif, gauche dans le maniement de l'instrument mathématique.

Cela suffira-t-il à faire des adeptes convaincus de la Physique purement expérimentale? Pas encore, peut-être.

Lorsqu'il veut mettre en évidence les homologies essentielles qui lui permettent de rassembler en un même groupe des êtres fort dissemblables en apparence, le naturaliste trace une figure abstraite et généralisée, un *schéma*, et il montre comment ce schéma est le plan commun sur lequel tous ces êtres sont construits. Doué de l'esprit de comparaison et du sens des analogies, le physicien voudra, à la façon du naturaliste, rapprocher les unes des autres les lois expérimentales qui sont construites sur un même plan; il voudra, de ces lois, tracer, lui aussi, un schéma; ce jour-là, il reconnaîtra bien vite que ces relations entre grandeurs mesurées, que ces formules ne se laissent pas schématiser par un dessin; que le modèle abstrait et général en lequel on les peut toutes condenser, c'est forcément un ensemble de postulats énoncés en langage mathématique; que, pour les comparer à ce modèle, il ne suffit pas de faire appel au sens de l'analogie, mais qu'il faut recourir au raisonnement déductif; désireux d'imiter le zoologiste ou le botaniste, de construire une classification naturelle, il produira comme malgré lui une théorie mathématique. Cette théorie, d'ailleurs, sera probablement gauche et mal bâtie; inhabile à manier l'instrument géométrique et algébrique qui peut seul construire l'édifice, ignorant de la Mécanique où il eût trouvé des exemples à imiter, notre expérimentateur fera de mauvaise Physique mathématique, mais il fera de la Physique mathématique; jamais, assurément, on n'avait vu surgir autant de théories qu'il en a germé depuis qu'on s'est avisé de rendre la Physique purement expérimentale.

En donnant au physicien une intelligence semblable à celle du naturaliste, on le rendra incapable de construire des théories mathématiques solides, complètes, élégantes: on ne l'empêchera pas de bâtir des théories mathématiques. Il faudra donc aller plus loin; il faudra lui ôter jusqu'à ce goût des comparaisons, jusqu'à ce sens des analogies, par lesquels vivent et se développent la Chimie, la Botanique, la Zoologie. Pour assurer le triomphe de la Physique purement expérimentale, on ne reculera pas devant une pareille tentative; ce qu'on mettra au rang de faculté maîtresse du physicien, ce qu'on développera en lui aux dépens de toutes les

capacités intellectuelles, ce sera l'habileté manuelle. On proclamera donc que les instruments propres à édifier la Physique, ce ne sont point l'Algèbre et la Géométrie, non point même le spectroscope et le thermomètre, mais la lime et le tour; on déclarera que, pour bien se servir d'un galvanomètre, il faut l'avoir construit (comme si les cordonniers étaient les meilleurs marcheurs); on donnera au futur physicien non pas la raison d'un homme de science, mais la dextérité d'un ouvrier d'art; alors pense-t-on, les théories mathématiques seront à jamais chassées de la Physique devenue purement expérimentale. A jamais? Jusqu'au jour où le constructeur d'instruments, las de l'empirisme grossier auquel on aura prétendu le condamner, renversera les barrières qu'on avait voulu élever entre la Physique et les Sciences mathématiques et réinventera la Physique théorique.

V.

En effet, ces efforts acharnés pour constituer une Physique purement expérimentale, ces tentatives sans cesse reprises au sein de l'Université de France, le plus piteux avortement les attend, parce que ces efforts, parce que ces tentatives prétendent s'opposer au mouvement qui porte la Science.

Si l'on eût dit à Poisson, à Ampère ou à Cauchy, si l'on eût dit à Green, à Franz Neumann ou à Gauss qu'on pouvait, qu'on devait construire la Physique en évitant l'emploi de toute doctrine mathématique de quelque difficulté, que le physicien devait s'éloigner de toute théorie fondée sur la Mécanique ou imitée de cette science, ces hommes de génie eussent assurément pris pour fou celui qui leur eût tenu ce langage. Que penseraient-ils donc de ceux qui le répètent aujourd'hui?

Les progrès extraordinaires que la Physique a faits au cours du XIXe siècle se sont tous accomplis dans le sens qu'avaient marqué les travaux des grands géomètres et mécaniciens du commencement de ce siècle. La Science électrique, par exemple, n'a cessé de manifester, par son développement, la fécondité des théories formulées par Poisson et par Ampère; c'est en imitant les méthodes suivies par Ampère que Franz Neumann et Wilhelm Weber ont pu constituer la doctrine des courants d'induction, et

lorsque Maxwell et Helmholtz ont étendu cette doctrine au point qu'elle pût régir la propagation de l'électricité au sein des milieux diélectriques ou conducteurs, les équations obtenues se sont trouvées identiques à celles que les Navier, les Poisson, les Cauchy, les Green avaient écrites pour étudier le mouvement des solides élastiques ou des fluides visqueux; c'est cette analogie d'équations qui a permis à Maxwell de formuler sa grandiose hypothèse sur la nature électromagnétique de la lumière; c'est cette analogie qui a suggéré à Heinrich Hertz l'idée d'étudier la propagation des ondes électriques comme on étudie celle des ondes sonores. La science électrique n'est ainsi qu'un vaste et admirable exemple de ce principe : Tout progrès s'accomplit en Physique par l'effet de la Mécanique ou à l'imitation de la Mécanique.

Une école de physiciens rejetterait la seconde partie de ce principe ou ne consentirait à en user que d'une manière provisoire; purement mécanistes, ces physiciens entendent que tous les phénomènes de la Physique se réduisent un jour à la figure et au mouvement. Au moment où la théorie mécanique de la chaleur fut créée, ces physiciens avaient cherché à expliquer selon leurs principes les effets que les variations de température et de pression produisent en une masse gazeuse; depuis quelques années, le champ ouvert à leurs recherches s'est singulièrement étendu; non seulement ils ont abordé l'étude des dissolutions et des mélanges liquides, mais ils ont entrepris de rendre compte des phénomènes compliqués que l'électricité engendre au sein des gaz. Ceux-là n'ont garde de dédaigner la Mécanique; Boltzmann et Gibbs leur ont montré quelle Dynamique savante et délicate il convenait d'employer pour résoudre même les problèmes les plus simples de Mécanique statistique; et les tentatives de Weber, de Riemann et de Clausius sont là pour le dire quelles difficultés les attendent au moment où ils voudront traiter avec précision de la convection électrique.

A côté de l'École mécaniste s'ouvre l'École énergétiste; l'idéal des adeptes de cette École n'est plus de réduire toute la Physique à la Mécanique; il est de réunir toutes les branches particulières de la Physique, y compris la Mécanique, en un tronc unique; et cette doctrine énergétique, appelée à donner ses lois à la Physique

tout entière, ils l'imaginent comme une extension, comme une généralisation de la Mécanique; pas plus que les mécanistes assurément, les énergétistes ne sauraient faire fi de cette Mécanique qu'ils veulent agrandir jusqu'à ce qu'ils y puissent loger la science de tous les changements qui se passent dans le monde des corps bruts.

L'œuvre la plus importante qu'ait accomplie l'École énergétiste, c'est, sans doute, la construction d'une doctrine mathématique, imitée de la Mécanique, où se classent les lois qui président à l'accomplissement des réactions chimiques. Bien loin donc, au gré des énergétistes, que le physicien se puisse contenter du sens de l'observation et de la comparaison qu'emploient le chimiste et le naturaliste, il faut désormais que le chimiste s'exerce au maniement de l'instrument mathématique, qu'il acquière des connaissances de Mécanique, afin qu'il puisse tirer profit des enseignements de la Mécanique chimique.

L'étude des progrès que la Physique n'a cessé de faire depuis cent vingt ans met ainsi hors de doute cette vérité : Il n'y a aucune ligne de démarcation entre la Mécanique et la Physique; ces deux sciences n'en font qu'une, et cette théorie unique de tous les mouvements, de tous les changements du monde inorganique, vit et se développe par l'union intime de la matière expérimentale et de la forme mathématique. Pendant ce temps, l'Université de France s'attarde à enseigner une Mécanique rationnelle dégagée de l'expérience; elle s'épuise en vains efforts pour constituer une Physique purement expérimentale débarrassée de l'appareil mathématique.

VI.

Que le lecteur médite maintenant le titre mis par M. H. Bouasse en tête de l'Ouvrage qu'il vient de publier : *Cours de Mécanique rationnelle et expérimentale*, *spécialement écrit pour les physiciens et les ingénieurs*, *conforme au programme du certificat de Mécanique rationnelle*. Il apercevra tout aussitôt la profondeur de la révolution qu'annonce un semblable titre; mais il découvrira en même temps la fécondité de la réforme qui nous est ici promise.

Le Livre tient-il toutes les promesses que le titre fait briller à nos yeux? C'est ce que nous allons examiner.

M. Bouasse nous annonce que la Mécanique dont il va développer l'exposé est, à la fois, rationnelle et expérimentale. Qu'est-ce à dire? La Mécanique sera rationnelle si elle pose comme hypothèses un petit nombre de prémisses non démontrées et si elle en tire, par voie de déduction mathématique, toutes les conclusions qu'elle énoncera par la suite. La Mécanique sera expérimentale si elle n'attribue à ses hypothèses premières aucune évidence immédiate, aucune certitude affirmée par une science antérieure, certitude que le raisonnement déductif transporterait graduellement jusqu'aux ultimes corollaires; si elle regarde ces corollaires comme n'étant, par eux-mêmes et *a priori*, ni vrais ni faux; si elle les tient seulement pour des propositions destinées à fournir une représentation abstraite, simplifiée, approchée des lois expérimentales du mouvement; si donc elle déclare un ensemble de telles conséquences bon ou mauvais selon qu'il figure bien ou mal, avec une approximation suffisante ou avec d'intolérables inexactitudes, l'ensemble des vérités d'observation dont il doit être l'image. A la fois rationnelle et expérimentale, construite selon la méthode qui sert à bâtir toute théorie physique, la Mécanique aura vraiment alors pris la place qu'elle doit occuper en l'édifice de la Physique mathématique.

C'est bien ainsi que M. Bouasse entend développer la Mécanique. Lisons, par exemple, ces quelques lignes, écrites (¹) tout aussitôt après les énoncés des trois principes de la Dynamique :

« *Toute démonstration* a priori *de ces propositions est un non-sens*. Nous devons les développer par voie déductive et comparer leurs conséquences avec les faits. La Dynamique n'est donc plus qu'une question de calculs, qu'un recueil d'exemples fondés sur des hypothèses particulières. La comparaison de la théorie et des phénomènes se fait par les méthodes ordinaires de la Physique expérimentale. »

Le mathématicien, donc, qui prétend exposer une Mécanique purement rationnelle et M. Bouasse pourront bien, à l'aide de calculs identiques, tirer des principes de la Dynamique la solution

(¹) H. Bouasse, *Op. laud.*, p. 285.

d'un même problème; devant la formule finale qu'ils auront tous deux obtenue, leur attitude sera toute différente. Le mathématicien croit qu'il use d'une méthode analogue à celle du géomètre; il pense que les principes auxquels il a rivé la première maille de sa déduction ont la certitude d'axiomes; pourvu que son raisonnement soit d'une impeccable rigueur, il affirmera que la proposition obtenue est VRAIE. M. Bouasse attendra, pour juger cette proposition, qu'elle ait été soumise au contrôle de l'expérience; et lorsqu'elle aura subi l'épreuve avec succès, il la déclarera non pas vraie, mais UTILE. Au moment donc que le mathématicien se reposera avec l'illusion que la Mécanique a terminé sa tâche, M. Bouasse dressera et réglera appareils et instruments, afin de comparer les mouvements abstraits annoncés par la formule aux mouvements concrets que l'expérimentateur peut produire et observer. La description de ces appareils et de ces instruments, les instructions relatives à leur mode d'emploi tiennent une place considérable dans le *Cours de Mécanique rationnelle et expérimentale;* en vain chercherait-on quoi que ce soit d'analogue dans la plupart des traités de Mécanique rationnelle.

La vérification à laquelle doit être soumise une formule de Mécanique avant qu'on la puisse déclarer *utile* doit être une vérification quantitative; les lettres qui figurent en cette formule représentent diverses grandeurs; il s'agit de déterminer les valeurs numériques prises par ces grandeurs dans le cas concret qu'on réalise, et de s'assurer que ces valeurs numériques vérifient la formule avec une exactitude suffisante. Dès lors, point de comparaison possible entre les propositions de la Mécanique et les faits, si l'on ne dispose de méthodes propres à mesurer les diverses sortes de grandeurs dont traitent la Statique et la Dynamique, les temps, les longueurs, les angles, les masses, les moments d'inertie, les forces, les couples. A la description de ces méthodes, M. Bouasse consacre de nombreux articles, qu'illustrent des figures d'appareils, où abondent les renseignements touchant les précautions qu'exige le maniement de ces instruments. Voilà, certes, une innovation, et qui surprendra peut-être bon nombre de lecteurs des Traités de Mécanique rationnelle.

Les auteurs de ces Traités, en effet, imitent, la plupart du temps, la manière de procéder de l'algébriste. Lorsque l'algé-

briste traite quelque problème ressortissant à sa science, il représente par des lettres toutes les quantités qui figurent en ce problème, et, suivant les règles fixes de ses algorithmes, il combine ces lettres jusqu'à ce que l'assemblage obtenu satisfasse aux conditions qui ont été imposées. Il sait que la solution trouvée serait dénuée de sens, si l'on ne concevait les lettres qui y figurent comme représentant des nombres ; que, pour appliquer cette solution à un cas particulier quelconque, il faudra y substituer aux lettres les nombres qui caractérisent ce cas particulier; mais par quel procédé ces nombres seront-ils obtenus, il n'en a cure; c'est affaire à celui qui voudra user de l'instrument, très général en ses emplois possibles, qu'il a forgé. De la même façon, mais à moins bon droit, agit celui qui s'adonne à la Mécanique purement rationnelle ; il développe une analyse où figurent une masse m, un moment d'inertie I, les composantes X, Y, Z d'une force; mais, en tel cas particulier et concret, comment connaîtra-t-on les valeurs numériques qu'il faut substituer aux lettres m, I, X, Y, Z? C'est une question qu'il dédaigne d'examiner ; or, faute de la résoudre, il ne fait pas œuvre de mécanicien, mais seulement d'algébriste.

Vérification expérimentale d'un grand nombre de propositions de Statique et de Dynamique, description des appareils qui permettent de mesurer les diverses grandeurs dont traitent ces sciences, ce sont besognes dont l'accomplissement donne au Livre de M. Bouasse l'aspect d'un Traité de Physique et permet à l'auteur de déclarer qu'il a exposé un cours de Mécanique à la fois rationnelle et expérimentale.

VII.

Ce cours est *spécialement écrit pour les physiciens et les ingénieurs*. Les ingénieurs, tout d'abord, trouveront-ils profit à le lire? Pour répondre à une telle question, nous n'avons guère autorité; il nous semble, cependant, que d'utiles enseignements s'offrent, en ce Livre, à celui qui veut appliquer les lois de la Mécanique aux problèmes posés par l'industrie.

Pour être utile au futur ingénieur, il convient, en premier lieu, d'appliquer autant que possible les théorèmes de la Mécanique à

des exemples tirés des mécanismes et des machines qui se rencontrent dans la pratique industrielle; de fuir ces problèmes artificiellement composés dans le seul but de conduire à telle ou telle équation différentielle d'espèce connue, ces problèmes dont abusent nos leçons et nos examens. Que M. Bouasse se conforme, en ce point, aux désirs de l'ingénieur, cela n'est pas douteux; nous connaissons son horreur des problèmes factices, et, d'autre part, pour constater à quel grand nombre de mécanismes, utilisés dans l'industrie, il applique les lois de la Mécanique, il suffit de parcourir la Table des matières de son Livre.

Mais ce n'est ni la tâche la plus difficile ni la plus essentielle en la rédaction d'un Traité de Mécanique rationnelle destiné à de futurs ingénieurs; un exercice artificiellement imaginé peut être utile lorsque la réalité n'offre point d'exemple propre à mettre simplement et clairement en évidence une vérité importante; et, d'autre part, il ne s'agit pas de décrire au lecteur tous les agencements de mouvements qu'il pourra rencontrer dans la pratique; les enseignements techniques et spécialisés, qu'on n'entend point suppléer, auront à faire cette besogne. Ce qu'il faut avant tout, c'est façonner l'esprit de l'élève ingénieur à la tournure qu'il doit avoir pour s'adapter aux exigences de l'industrie.

Les appareils, les machines dont l'ingénieur aura à utiliser les mouvements sont, en général, d'une extrême complication. Très souvent, il n'est pas possible d'en donner une théorie complète et rigoureuse. Là même où une Géométrie très habile, où une Algèbre très savante ont su composer une semblable théorie, il peut se faire que cette explication minutieusement déduite soit plus nuisible qu'utile à l'industriel.

L'excellent ingénieur, en effet, n'est pas celui qui sait, à l'aide de calculs très compliqués, partant très longs et très laborieux, analyser, dans ses moindres détails et avec une extrême précision, la marche de la machine qu'il emploie; c'est celui qui a, de cette marche, une connaissance synthétique et, pour ainsi dire, intuitive; qui sait, par conséquent, se rendre compte d'une manière très rapide des défauts qui peuvent vicier cette marche, des remèdes qui atténueront ces défauts, des perfectionnements qui les feront disparaître. L'ingénieur aura donc véritablement acquis la forme intellectuelle qui lui convient lorsqu'il usera, pour

résoudre les problèmes de Mécanique, très peu de l'esprit géométrique qui déduit et conclut, et beaucoup de l'esprit de finesse qui voit et devine. Or, il est clair que cette promptitude d'intuition n'est possible qu'à la condition de simplifier à un haut degré les questions posées, de négliger une foule d'éléments de ces questions pour s'attacher seulement à quelques-uns d'entre eux. D'autre part, ce choix entre les éléments qu'on gardera comme prépondérants et ceux qu'on dédaignera comme accessoires suppose une juste appréciation du degré d'approximation qu'il est nécessaire d'atteindre en la solution du problème et du degré de rigueur qu'il serait inutile et puéril de rechercher. Distinguer rapidement l'indispensable justesse de la précision futile, et cela afin de voir simple, partant de voir d'ensemble l'appareil qu'il manie, c'est à quoi il faut surtout habituer le futur ingénieur.

La Mécanique purement rationnelle, dont l'enseignement s'est trop souvent propagé des Facultés jusque dans les écoles techniques, lui donne des habitudes tout opposées; ce n'est pas l'esprit de finesse, c'est l'esprit géométrique qu'elle développe exclusivement en lui; elle l'accoutume à rechercher partout une rigueur dont le géomètre et l'algébriste ne se doivent jamais départir, mais qui, dans le domaine de la Science appliquée, est nuisible ou tout au moins inutile et ridicule.

M. Bouasse nous peint [1], avec la vivacité d'images, mais aussi avec la justesse de coup d'œil dont il est coutumier, l'aspect des Livres composés par les ingénieurs que le goût de la rigueur déplacée a gâtés :

« L'esprit faussé dès l'origine par l'éducation reçue, ayant vu leurs professeurs admirés pour embrouiller les questions les plus simples et cacher l'évidence sous un fatras de théorèmes, ils s'imaginent que c'est là le but suprême. Pour imiter leurs modèles, ils font ce qu'ils peuvent. Restés excellents élèves de Spéciales, ils enfilent donc une série de propositions conduisant à des courbes « genre taupin », qu'ils discutent à l'aide de tableaux bien ordonnés; ils accumulent les expériences « genre examen de » l'École Polytechnique ». Bref, ils grossissent jusqu'à cinq cents pages des Ouvrages qui, excellents, tiendraient en cinquante. »

---

[1] H. BOUASSE, *Op. laud.*, p. 2.

Pour former, donc, des ingénieurs, il leur faut donner un enseignement qui les détourne de la fausse rigueur; mais il est une tentation dont il faut bien se garer et les garer; c'est celle de dédaigner la précision légitime et l'exactitude indispensable. Il faut simplifier les problèmes, mais jusqu'à un certain point seulement; il faut négliger les détails accessoires, mais sans rien sacrifier des principes importants. Il y a, en un tel enseignement, une juste limite à garder, et les mathématiciens qui ont voulu délaisser leur trop minutieuse rigueur pour donner des leçons qui pussent servir à l'industriel ont, bien souvent, poussé la simplification trop loin; à fuir le trop précis, le trop exact, ils se sont précipités dans le vague et dans le faux.

« Depuis quelques années, dit M. Bouasse (¹) il est de bon ton parmi nous d'aimer l'industrie comme on aimait la vie champêtre du temps de Rousseau; et l'on voit des théoriciens du genre le plus abstrait endosser (au figuré) le bourgeron du contremaître et s'efforcer de mettre leur science à la portée du nombre.... Une de leurs marottes consiste à démontrer les propositions les plus difficiles d'une manière élémentaire, c'est-à-dire en se privant de toutes les ressources des Mathématiques. Ils rappellent ces nourrices qui bêtifient pour se faire comprendre. Ils parlent petit nègre, oubliant qu'il est plus facile d'apprendre les Mathématiques que d'apprendre à s'en passer. »

Cette juste limite entre l'excès et le défaut de rigueur mathématique est fort difficile à définir; il faut un sens très juste et très bien équilibré pour la marquer exactement; s'y tenir est, certainement, la principale difficulté de l'art de former les ingénieurs. La sûreté avec laquelle M. Bouasse sait simplifier chacun des problèmes pratiques qu'il traite jusqu'au degré voulu, et jusqu'à ce degré-là seulement, est peut-être la qualité la plus rare dont il fasse preuve en son Ouvrage.

Cette qualité, le soin avec lequel il garde toujours, en chacun de ses raisonnements mathématiques, le contact très intime avec l'expérience, n'a pas peu contribué à la développer et à l'assurer en lui. Nul, mieux que l'expérience, ne sait montrer le ridicule d'une illusoire précision; nul, plus durement qu'elle, ne sait op-

---

(¹) H. BOUASSE, *Op. laud.*, p. 2-3.

poser un démenti aux solutions vagues et erronées. En travaillant toujours d'après nature, en comparant sans cesse son œuvre au modèle, le peintre apprend à ne pas pignocher des pointillés qui n'ajoutent rien à la ressemblance; mais il apprend aussi à ne pas se contenter d'une pochade sans dessin, incapable de rendre le caractère de ce qu'il prétend imiter.

VIII.

Voilà comment, en composant un cours de Mécanique à la fois rationnelle et expérimentale, M. Bouasse a pu justement affirmer qu'il l'avait *spécialement écrit pour les ingénieurs;* mais aux ingénieurs, il adjoint *les physiciens;* en quoi cet Ouvrage peut être utile à ces derniers, nous l'allons examiner.

Et d'abord, apte à enseigner la Mécanique sous la forme que réclame l'ingénieur, le cours de M. Bouasse est, par le fait même, propre à former des physiciens expérimentateurs; les qualités d'esprit qu'il faut posséder pour manier habilement tel instrument de Physique ne diffèrent guère de celles qu'on met en jeu lorsqu'on emploie telle machine; d'année en année, d'ailleurs, on voit croître le nombre des machines proprement industrielles qui se rencontrent habituellement dans les laboratoires de Physique, comme le nombre des instruments de Physique qui servent dans les usines; aujourd'hui, peut-on dire, le laboratoire est une petite usine, et l'usine, bien souvent, est un vaste laboratoire. Après donc ce que nous avons dit des services que la *Mécanique* de M. Bouasse peut rendre aux futurs ingénieurs, il est superflu d'insister sur les services directs qu'elle peut rendre à ceux qui souhaitent de se livrer à la Physique expérimentale.

Mais la Mécanique, avons-nous dit, n'a pas seulement pour le physicien une utilité directe; elle a encore une utilité indirecte, et qui n'est pas la moindre; elle lui enseigne l'art de construire des théories physiques.

C'est surtout en étudiant les mouvements des milieux continus, qu'ils soient fluides ou élastiques, que la Mécanique a l'occasion de dresser devant les yeux du physicien d'admirables modèles de théories. Or, cette étude des milieux continus, M. Bouasse ne l'aborde pas au cours des Leçons que nous analysons; il la réserve,

sous le nom de Mécanique physique, pour le premier des Volumes du Traité de Physique qu'il a publié. Les systèmes susceptibles d'être définis à l'aide d'un nombre limité de grandeurs variables, les assemblages de corps solides, par exemple, sont les seuls dont il traite en sa Mécanique rationnelle; en les étudiant, cependant, il va trouver une foule de problèmes qui prépareront l'intelligence de l'élève aux théories diverses de la Physique.

Dès le second Chapitre de l'Ouvrage, l'étude du *Travail des vecteurs* et du *Flux des vecteurs* introduit ces théorèmes et ces formules qu'on retrouve, dès le début, en chaque théorie physique et qui sont, pour le physicien, l'indispensable instrument du labeur quotidien. La Statique fournit à l'auteur l'occasion de présenter les lois mathématiques de l'attraction en raison inverse du carré de la distance, l'une des doctrines les plus belles que la Science ait produites, et l'une des plus utiles aussi, puisqu'elle est la forme où se viennent mouler les théories de l'Électricité et du Magnétisme. Les Chapitres si complets où sont analysés les mouvements oscillatoires, l'amortissement et l'entretien des vibrations, les phénomènes de résonance, sont une très heureuse introduction à ce que le physicien devra dire des petits mouvements des fluides et des corps élastiques, à ce qui formera l'Acoustique et l'Optique.

Non seulement les théories les plus importantes de la Physique trouvent ainsi, au *Cours de Mécanique rationnelle et expérimentale*, une sorte d'esquisse qui en annonce et prépare l'exécution, mais encore ce cours présente au physicien, à propos d'un problème purement mécanique, un exemple très instructif de l'art de construire une théorie. Le problème dont nous voulons parler est celui qui concerne la figure de la Terre. L'analyse qui en est faite nous montre comment, en l'examen d'une question de Mécanique ou de Physique, on est amené à imaginer des hypothèses propres à la résoudre; comment on développe les conséquences logiques de ces hypothèses jusqu'à ce qu'on ait découvert des corollaires susceptibles d'être comparés avec les faits; comment on combine des méthodes expérimentales propres à effectuer cette comparaison; comment enfin les résultats de cette épreuve permettent de juger la théorie. L'élève qui aura étudié dans le Livre de M. Bouasse le problème de la figure de la

Terre pourra s'en aller suivre les leçons d'un physicien; il y entendra parler de propriétés physiques qui n'avaient pas été nommées au cours de Mécanique; mais il verra clairement que les méthodes propres à traiter de ces propriétés nouvelles ne diffèrent pas de celles qui servent à analyser les mouvements purement locaux; il comprendra qu'entre la Mécanique et la Physique, la Logique met une continuité parfaite.

Le sentiment de cette continuité, il n'a guère, aujourd'hui, chance d'en prendre conscience, l'étudiant de nos Facultés qui sort d'un cours de Mécanique purement rationnelle pour suivre un cours de Physique purement expérimentale; entre les deux doctrines qui lui sont exposées, il risque fort de n'apercevoir que disparates et contrastes.

J'avais été chargé, il y a déjà bien longtemps, de préparer à l'agrégation des Sciences physiques les étudiants d'une de nos Facultés; j'avais eu le bonheur de trouver des élèves d'élite; j'aime, en me rappelant leurs noms, à constater que beaucoup d'entre eux sont aujourd'hui assis en des chaires plus élevées que celle d'où je les enseignais alors, à songer que tel a été choisi par la Sorbonne pour inaugurer un enseignement dont l'extrême nouveauté n'est pas la seule difficulté. Or, à ces élèves, je demandais, chaque année, une leçon sur la mesure de l'intensité de la pesanteur, leçon qui ne manquait guère d'être mise au nombre des épreuves du concours; et chaque année, je constatais qu'une science très complète des méthodes propres à mesurer g était accompagnée, en l'esprit des étudiants, d'une ignorance non moins complète de l'usage auquel ces mesures sont destinées; mes candidats à l'agrégation, tous licenciés ès sciences mathématiques, n'avaient point entendu, au cours de Mécanique rationnelle, la moindre leçon sur la Géodésie; à peine leur avait-on enseigné ce que c'est que le poids d'un corps. Que n'avaient-ils pris leur licence en une Faculté où l'enseignement de la Mécanique rationnelle eût suivi le plan que trace M. Bouasse!

IX.

Car M. Bouasse a entendu nous donner le modèle de ce que devrait être, selon lui, l'enseignement de la Mécanique ration-

nelle dans les Facultés des Sciences; et c'est pourquoi le titre de son Livre se termine par ces mots : *Conforme au programme du certificat de Mécanique rationnelle*. Cette dernière indication est-elle juste? Serait-il possible d'adapter les épreuves du certificat de Mécanique rationnelle à un enseignement donné sur le plan du cours que nous venons d'analyser? On le pourrait assurément, sans modifier aucun des règlements en vigueur, mais en changeant profondément l'esprit qui a dirigé jusqu'ici cet examen. C'est ce qu'il nous faut montrer en peu de mots.

Les épreuves à la suite desquelles est conféré le certificat de Mécanique rationnelle sont de trois sortes : une composition écrite, un exercice pratique, des interrogations.

De quelle nature est le sujet de la composition écrite requise en cet examen? Il comprend un ou plusieurs problèmes qui, presque toujours, sont construits sur un même type général : On demande d'étudier le mouvement d'un système tout artificiel soumis à l'action de forces dont, la plupart du temps, la nature n'offre pas d'exemples. La partie proprement mécanique du problème, l'étude du système et des forces, d'où résulte la mise en équations, n'offre, en général, aucune difficulté sérieuse; mais de cette étude découlent presque immédiatement une ou plusieurs équations différentielles, et tout le talent du candidat se marque en l'habilité avec laquelle il intègre ou discute ces équations. Cette épreuve ne mérite donc pas, en réalité, le titre de composition de Mécanique, mais bien celui d'exercice de Calcul intégral.

L'exercice pratique est encore plus mal nommé; il consiste, bien souvent, en l'évaluation de quelque intégrale définie, poussée parfois jusqu'au calcul numérique : telle la détermination du moment d'inertie d'un corps de figure et de densité données; le papier, la plume et l'encre sont, en tous cas, les seuls instruments qu'on y emploie; tout au plus y joint-on une Table de logarithmes.

Il est clair qu'un examen de ce type ne saurait servir de sanction à un cours de Mécanique rationnelle et expérimentale semblable à celui dont M. Bouasse nous présente le modèle.

Si la Mécanique a été enseignée comme M. Bouasse veut qu'on l'enseigne, la composition écrite du certificat de Mécanique

rationnelle ne doit plus être un problème de Calcul intégral. C'est au cours de Calcul différentiel et intégral, non au cours de Mécanique, que l'étudiant doit apprendre à intégrer et à discuter les équations différentielles; c'est le certificat de Calcul différentiel et intégral, non le certificat de Mécanique, qui doit contrôler ses connaissances à ce sujet.

Si donc l'épreuve écrite comporte une question à résoudre, cette question devra être de Mécanique, non de Mathématiques; ce qu'elle contient de difficile ne devra pas se rencontrer en un problème de Calcul intégral, mais ressortir vraiment à la Mécanique; ce n'est pas par la discussion d'une intégrale elliptique ou d'une équation de Riccati qu'on toisera le candidat; on recherchera quelle est son habileté à découvrir les principes de Statique ou de Dynamique qui doivent mettre le problème en équations, à simplifier ces équations en tenant compte des propriétés physiques du système étudié et du degré de précision requis dans le cas considéré; on lui demandera de conduire la solution jusqu'aux corollaires que l'expérience peut contrôler, d'indiquer par quels procédés et avec quelle exactitude ce contrôle se peut faire.

Profondément changé, donc, sera l'esprit même qui dicte le sujet de la composition écrite; plus profondément modifiée sera la nature de l'exercice pratique.

Celui-ci, en effet, devra vraiment mériter son nom; il devra se faire non dans une chambre avec une plume et du papier, mais dans un laboratoire avec des appareils et des instruments; il devra consister à vérifier par l'expérience un des théorèmes qui ont été démontrés dans le cours ou à mesurer effectivement une des grandeurs dont traite la Mécanique; il sera une manipulation toute semblable de forme à celle qui est requise pour l'obtention du certificat de Physique générale.

X.

Or, pour qu'au jour de l'examen le candidat puisse effectuer cette manipulation, il faudra qu'au cours de l'année scolaire il ait accompli, chaque semaine, une manipulation de Mécanique; voilà donc, et de toute nécessité, l'enseignement théorique de

Mécanique rationnelle et expérimentale, qui se donne en des cours et conférences, doublé d'un enseignement pratique qui se doit donner au laboratoire. La création du laboratoire de Mécanique, des manipulations de Mécanique est la réforme la plus profonde qu'exige la réalisation du plan tracé par M. Bouasse; de toutes celles que réclame cette réalisation, elle est la plus essentielle, car, à vrai dire, elle les résume toutes; elle est la condition nécessaire et suffisante pour que la Mécanique cesse d'être reléguée parmi les Sciences mathématiques et qu'elle reprenne son rang de Science physique,

A l'installation du laboratoire de Mécanique, à l'organisation des manipulations de Mécanique, M. Bouasse attache, comme de juste, une extrême importance. Non seulement, d'un bout à l'autre de son Livre, il décrit les instruments et les méthodes par lesquels on peut vérifier expérimentalement bon nombre des théorèmes qu'il démontre, mais il consacre tout un chapitre, le dernier, aux *manipulations*. Il définit d'abord *l'esprit dans lequel doivent être faites les manipulations;* de cette définition, extrayons les lignes suivantes [1], que l'on ne saurait trop méditer :

« Il ne s'agit pas le moins du monde de créer une installation industrielle, et de confondre deux choses aussi dissemblables qu'*expérimental* et *technique*. La technique n'est pas du ressort des Facultés; les professeurs de Faculté ne réussissent guère quand ils s'y essayent; ils se font moquer d'eux par les ingénieurs, et c'est justice.

» Nous ne devons chercher qu'à traduire en expériences les théorèmes de la Mécanique *rationnelle* et à en faire comprendre les énoncés.

» Une manipulation doit impliquer des mesures et des vérifications. Regarder un phénomène n'est pas une manipulation; il faut en varier les circonstances et que les résultats se traduisent par des graphiques et des lois....

» Pour créer un laboratoire d'enseignement de Mécanique, il faut de l'argent, mais peut-être moins qu'on ne l'imagine. Les appareils les plus coûteux sont généralement les plus inutiles.

---

(1) H. Bouasse, *Op. laud.*, p. 646.

Laissons de côté cette prétention à la précision qui ne trompe personne. Rappelons que les résultats *au millième* se comptent en Physique. N'imitons pas ces physiciens qui font étalonner leurs thermomètres, leurs règles... au Bureau central des Poids et Mesures, quand ils pourraient se contenter d'un thermomètre de cinq francs et d'une règle en bois de quarante sous, sans nuire en rien à la précision de leurs expériences. Rappelons que l'industrie nous livre à bon compte des produits remarquables, fabriqués par séries avec des outillages perfectionnés pour lesquels elle ne lésine pas.

» N'ayons pas la superstition des forces énormes. Certains croient que les phénomènes ne sont nets qu'avec des machines de 30 chevaux ou des vitesses de 500 tours à la seconde. Ils prennent des marteaux-pilons pour écraser des mouches.... »

XI.

M. Bouasse, nous n'en pouvons plus douter, nous convie à accomplir, dans l'enseignement de la Mécanique que donnent les Facultés, une révolution très profonde qui serait, en même temps, une réforme très bienfaisante. Cette réforme est-elle réalisable? Là encore, le doute n'est plus permis, puisque M. Bouasse nous a donné un modèle complet du cours à faire et des manipulations à installer. Cette réforme se fera-t-elle? Hélas!

Le mal qu'il s'agit de guérir est difficilement guérissable. Il consiste essentiellement, nous l'avons vu, en une radicale opposition entre le sens dans lequel se sont développées la Mécanique et la Physique, et le sens dans lequel a été dirigé l'enseignement de ces deux Sciences; pendant que la Mécanique et la Physique se compénétraient d'une manière de plus en plus intime, le cours de Mécanique purement rationnelle et le cours de Physique purement expérimentale s'éloignaient l'un de l'autre jusqu'à se perdre complètement de vue.

Or, ce n'est pas là un mal circonscrit, un vice qui soit particulier à la Physique et à la Chimie; la maladie est générale; partout, on en reconnaît les symptômes; partout, on peut constater le même disparate entre la forme à laquelle tend la Science et la forme que s'efforce d'acquérir l'intelligence des savants.

Lorsque la marée descend, au long d'une côte bordée de récifs, on voit d'abord émerger les têtes de quelques roches; ces roches semblent ensuite s'élargir, s'étaler d'une manière graduelle; les chenaux qui les séparent les unes des autres deviennent de plus en plus étroits, de moins en moins profonds; ils se réduisent bientôt à de minces filets d'eau et finissent par disparaître, tandis que les récifs découverts semblent se souder les uns aux autres; une large étendue de terre ferme se montre là où l'on n'apercevait tout d'abord que des écueils isolés.

Une vue toute semblable se déroule sous les yeux de celui qui contemple les progrès de la Science, particulièrement au cours du dernier siècle. Là où les savants qui nous ont précédés de deux ou trois générations n'apercevaient que des sciences disjointes et sans communication les unes avec les autres, nous voyons, nous, les parties d'une même science, si parfaitement unies les unes aux autres que nous ne savons plus, entre elles, tracer aucune ligne de démarcation.

Autrefois distinctes, la Mécanique et la Physique se sont fondues l'une en l'autre; par la découverte de la Mécanique chimique, elles sont venues se souder à la Chimie; par les synthèses, la Chimie organique et la Chimie minérale se sont réunies en une science unique. Géométrique par l'étude des symétries; physique par tout ce qu'elle emprunte aux théories de l'Électricité, du Magnétisme, et surtout à l'Optique; chimique lorsqu'elle veut deviner et reproduire les conditions où se sont formés les minéraux et les roches, la Minéralogie est au fondement même de la Géologie. Grâce à la Paléontologie, qui pourrait dire où finit la Géologie, où commencent la Botanique et la Zoologie? Entre ces deux dernières sciences, qui oserait mettre une séparation depuis que Claude Bernard nous a appris à voir les phénomènes de la vie qui sont communs aux animaux et aux végétaux? Et si la Physiologie se trouve être ainsi unique pour les deux règnes, n'y a-t-il pas, d'ailleurs, par l'intermédiaire de la Chimie biologique, continuité entre la Physiologie et la Chimie organique? Nos ancêtres pouvaient penser que la Science était un archipel dont les îles seraient à jamais séparées par d'infranchissables bras de mer; nous n'y voyons plus qu'un continent d'une parfaite connexité.

Pendant que la Science marchait ainsi de la diversité vers l'unité, l'intelligence des savants subissait une évolution de sens tout opposé ; cette évolution tendait à former des individus de plus en plus spécialisés et de plus en plus disparates.

Assurément, on rencontre encore quelques hommes qui, de la Science, ont parcouru de vastes contrées et qui en ont acquis une connaissance où l'analyse du détail s'harmonise avec la synthèse de l'ensemble. Que l'auteur du *Cours de Mécanique rationnelle et expérimentale* soit un de ces hommes-là, il nous l'a prouvé en rédigeant les six volumes de ce *Cours de Physique* (1) qui rejoint la Mécanique rationnelle par la Mécanique physique, la Mécanique chimique par la Thermodynamique, la Minéralogie par l'Étude des symétries. Mais combien trouverait-on aujourd'hui de gens qui fussent capables d'écrire un Traité aussi étendu? Combien même en trouve-t-on qui soient en état de le lire?

Craignant les lointains voyages et dédaigneux des connaissances géographiques étendues, chacun demeure en son champ dont il étudie la moindre motte de terre avec la vue minutieuse et grossissante d'un myope; aussi finit-il par prendre son lopin pour le monde. Le physicien n'est que physicien, le chimiste ne connaît que la Chimie, et de même en va-t-il du zoologiste, du botaniste et du géologue.

Que dis-je! Le morcellement du sol scientifique est poussé beaucoup plus loin, car chacun s'attache à ne cultiver qu'une infime parcelle, afin de pouvoir, sans grand effort, pousser cette culture jusqu'à la perfection la plus méticuleuse. Il arrive alors qu'on rencontre un physicien qui connaît à fond les aimants et un autre qui n'a pas de pair en l'étude des diélectriques; mais on les embarrasserait également si l'on demandait au premier une leçon sur les diélectriques et au second un cours sur les aimants; tel chimiste est rompu à tous les artifices de la synthèse des sucres, pour qui la synthèse des matières colorantes est un mystère; ce zoologiste n'a point d'égal en l'art de classer les crustacés, mais il confond une fourmi avec un termite; la compétence de ce botaniste

(1) H. Bouasse, *Cours de Physique*, 1re Partie : *Mécanique physique;* 2e Partie : *Thermodynamique*, *Théorie des ions;* 3e Partie : *Électricité et Magnétisme;* 4e Partie : *Optique, instruments;* 5e Partie : *Électroptique;* 6e Partie : *Étude des symétries.*

en la diagnose des mousses est reconnue dans le monde entier; mais qu'il n'aille pas recueillir des champignons, il risquerait fort de s'empoisonner.

La tour de la Science se dresse déjà très haut dans le ciel, et ses lignes laissent deviner une harmonieuse unité; mais, au pied de l'édifice, les ouvriers s'épuisent en une agitation stérile et désordonnée, parce que leurs langues sont confondues; incapables de s'entendre et de concerter leurs efforts, les divers corps de métiers gaspillent l'habileté de leurs compagnons les plus experts en des travaux dont beaucoup demeureront sans emploi; les charpentiers continuent d'équarrir des poutres, les maçons de tailler des pierres et de gâcher du ciment, les menuisiers et les serruriers d'ajuster des pièces de bois ou de fer; mais les charpentiers ne savent ce que porteront leurs fermes et leurs consoles; les maçons ignorent comment leurs matériaux se doivent appareiller avec la charpente; les menuisiers ne se soucient pas des baies auxquelles leurs croisées se doivent ajuster, ni les serruriers des portes et des fenêtres que leurs ferrures doivent garnir; les ouvriers de chaque spécialité travaillent isolément, fiers de la dextérité avec laquelle ils manient leurs outils particuliers, ignorants et dédaigneux de ce que font les ouvriers de la spécialité voisine; et tous, charpentiers, maçons, menuisiers, serruriers, s'imaginent à l'envi qu'ils suffisent, à eux seuls, à l'achèvement de l'édifice; il n'y a plus d'architectes.

Verrons-nous le jour où ces milliers de mains qui exécutent trouveront, pour les guider, quelques intelligences qui comprennent?

Pierre Duhem.

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KILLING (W.) UND HOVESTADT (H.). — HANDBUCH DES MATHEMATISCHEN UNTERRICHTS. Erster Band. 1 vol. in-8, VIII-456 pages.

Une des conséquences qui semblent ressortir des recherches modernes sur les fondements de la Géométrie est que ce genre de spéculations n'appartient point à l'enseignement élémentaire ; cette conclusion m'a toujours paru fort heureuse : si l'on ne peut, dans un pareil enseignement, aller jusqu'au bout, il convient, lorsqu'on enseigne la Géométrie à des enfants, d'abandonner toute prétention à une logique dont la rigueur est illusoire ; il faut se contenter d'éveiller, de développer et de préciser l'intuition, illustrer et éclairer le mieux qu'on peut le trésor des notions et des propositions dont on part et qu'on admet ; une fois ce trésor constitué, il ne sera plus permis de puiser ailleurs pour les démonstrations, et c'est alors que commencera le rôle de la logique déductive.

En jetant les yeux sur le Livre de MM. Killing et Hovestadt, en parcourant la Préface trop légèrement sans doute, en lisant la Table des matières, je n'ai pu me défendre d'un sentiment de défiance et de mauvaise humeur ; n'était le nom des auteurs, je crois bien que j'aurais laissé là leur Livre ; j'aurais eu grand tort, et je me suis convaincu en les lisant qu'ils n'étaient nullement les logiciens intransigeants que je m'étais figuré, qu'ils donnaient des conseils généraux qui sont excellents et des indications particulières qui peuvent être très précieuses pour les maîtres auxquels ils s'adressent. C'est pour les maîtres en effet, comme le titre l'indique, que leur Livre est écrit, non pour les élèves ; ils souhaitent avec raison que les maîtres sachent le fond de la science qu'ils enseignent ; je crois, pour ma part, que celui qui aura le mieux pénétré cette science est celui dont l'enseignement sera le plus sage et le plus prudent ; celui-là seul, d'ailleurs, sera capable de choisir le moment convenable pour faire entrevoir à quelques-uns

de ses élèves les perspectives étranges où la science moderne a jeté une lumière inattendue. MM. Killing et Hovestadt pensent que ces maîtres n'ont pas souvent le loisir et le moyen d'étudier dans les Mémoires originaux ; ils ont voulu leur venir en aide.

La première Partie de leur Livre traite, en deux cents pages environ, des questions fondamentales de la Géométrie : après quelques renseignements historiques sur Euclide, ils développent les cinq groupes d'axiomes de M. Hilbert, donnent quelques indications théoriques, historiques et bibliographiques sur les géométries non euclidiennes; s'arrêtent sur les concepts de *droite* et de *gauche*, tant dans le plan que dans l'espace, ainsi que sur les questions concernant les aires et les volumes des polygones ou des polyèdres.

Un Chapitre est consacré aux éléments impropres et aux éléments imaginaires, que les auteurs conseillent de n'introduire qu'en Géométrie analytique. Un autre Chapitre traite des problèmes de construction.

Quelques remarques générales sur la Logique servent en quelque sorte de transition entre la première et la seconde Partie : les maîtres peuvent en tirer bon parti, non pas, sans doute, pour faire une ou plusieurs leçons sur ce sujet, mais bien pour faire observer à leurs élèves, sur des exemples concrets, les modes de raisonnement qui reviennent le plus fréquemment.

Les derniers Chapitres sont consacrés à passer en revue les diverses parties de l'enseignement géométrique élémentaire; on y trouvera nombre d'excellents conseils. J. T.

FESTSKRIFT TIL H.-G. ZEUTHEN. FRA VENNER OG ELEVER I ANLEDNING AF HANS 70 AARS FÖDSELSDAG 15 FEBRUAR 1909. Un volume in-8 de 156 pages. Köbenhavn, A.-F. Höst et Sön.

Cette Publication contient une épreuve du travail mathématique fait actuellement en Danemark. Toutefois, à cause de l'occasion, les sujets géométriques et historiques y ont obtenu une certaine prévalence.

A.-A. Björnbo traite des *Tables trigonométriques de Al-Chwârizmî*, qu'il communique d'après une traduction en latin, due au bénédictin anglais du XIIe siècle, Athelard de Bath, et conservée en manuscrit à Oxford. De ces Tables, qui sont les plus anciennes Tables trigonométriques arabes qu'on connaisse, l'une, qui donne les *sinus* des arcs dont le nombre de degrés est entier, est, comme le montre M. Björnbo, construit par l'auteur arabe ou un prédécesseur arabe ou indien, immédiatement sur la Table des chordes de Ptolémée. Dans l'autre, M. Björnbo voit une Table des tangentes (cotangentes) *in statu nascendi*. C'est, en effet, une Table des ombres d'une hauteur donnée correspondant aux différentes hauteurs du Soleil; mais, en même temps que l'auteur arabe se sert de cette Table dans l'Astronomie, il renvoie encore à l'usage des Tables des *sinus* pour résoudre les problèmes trigonométriques dont la solution serait donnée immédiatement par la Table des ombres.

S.-A. Christensen fait un aperçu sur l'*étude des éléments d'Euclide en Danemark* et sur l'usage qu'on en a fait dans l'instruction.

C. Crone s'occupe d'*une transformation plane faisant certaines courbes du quatrième ordre et du genre* 3 *correspondre à elles-mêmes*. M. Jules Petersen avait trouvé les conditions auxquelles une courbe k_4 du quatrième ordre doit satisfaire pour rencontrer toutes les droites d'un faisceau en des points qu'on peut déterminer par le compas et la règle. Plus tard, M. Crone a résolu la même question dans le cas où les droites sont tangentes à une conique. A présent, il y substitue les tangentes à une courbe de la troisième classe à une tangente double. A cet effet, il étudie une transformation qui fait se correspondre d'une manière involutoire les points de la même tangente à cette courbe, et les courbes, en particulier celles du quatrième ordre, que cette transformation fait correspondre à elles-mêmes.

Les *Remarques sur la théorie des nombres due à Fermat*

([1]) Écrit solennel à H.-G. Zeuthen. Publié par des amis et des élèves à l'occasion de son 70e anniversaire, le 15 février 1909.

qui font la contribution de J.-P. Gram, sont le fruit d'une étude approfondie de cette théorie, telle qu'on la connaît par le grand nombre de communications éparses dues à Fermat sur les importants résultats qu'il a trouvés, et le petit nombre de communications très sommaires sur les voies qui l'y ont conduit. En profitant encore des dates et des endroits de ces communications, et surtout de la connexion qui existe entre leurs différents sujets, M. Gram cherche à retrouver et la succession chronologique des découvertes et la connexion des idées qui ont guidé Fermat, et les méthodes qui ont pu être à sa disposition personnelle. « On aurait (ainsi M. Gram finit son article) la clef du cours des idées qui ont guidé Fermat, si l'on pouvait reconstruire sa propre démonstration du théorème sur la représentation d'un nombre comme somme de nombres figurés. »

Dans Δεύτεραι φροντίδες, J.-L. Heiberg ajoute, à son édition du travail d'Archimède qu'il avait retrouvé et publié en 1907, quelques remarques et suppléments, résultant d'une nouvelle revision du manuscrit à Constantinople. Un de ces suppléments a constaté la conjecture de M. Heiberg, que la découverte du volume de la sphère est antérieure à celle de la surface.

J. Hjelmslev écrit d'*espaces à un nombre infini de dimensions*. Les postulats au moyen desquels il définit un espace à un nombre quelconque de dimensions sont des généralisations de ceux dont il se sert dans un Mémoire dans les *Mathematische Annalen*, t. LXIV, pour construire une géométrie plane sans faire usage de postulats stéréométriques ou de continuité, et indépendamment de la question du parallélisme. Une géométrie satisfaisant aux postulats généralisés existe. Soit, en effet, M un ensemble donné, U une opération fonctionnelle faisant correspondre aux éléments α, β, ..., $\varkappa$ de M les nombres réels et différents de zéro a, b, ..., k et à tous les autres éléments le nombre zéro. Appelons o l'opération qui fait correspondre zéro à tous les éléments de M, U + V l'opération W qui a la propriété que, pour tout élément x, $U(x) + V(x) = W(x)$, et nU, où n est un nombre réel, l'opération V ayant la propriété que, pour tout élément x, $V(x) = nU(x)$. Alors, ces opérations fonctionnelles

seront les points d'un espace dont le nombre de dimensions aura la même puissance que M. Une droite sera définie par $a\text{U} + (1-a)\text{V}$ où a prend toutes les valeurs réelles, un plan, etc., d'une manière semblable. L'auteur s'occupe ensuite de la géométrie projective de son espace, des collinéations et des conditions nécessaires pour les déterminer. Suggéré par les recherches de Hilbert sur les formes quadratiques à un nombre infini de variables et leurs applications aux équations intégrales, il étudie en particulier l'espace euclidien à un nombre dénombrable de dimensions qui est formé des fonctions réelles et où la distance de deux points $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ est déterminée par

$$r^2 = \int_a^b [\varphi(x) - \psi(x)]^2\, dx.$$

et il remarque qu'un grand nombre des résultats trouvés dans ce domaine par voie analytique s'expliquent géométriquement d'une manière très simple.

J.-L.-W.-V. Jensen donne deux *contributions à la théorie des fractions continues*. La première contient l'expression du numérateur du convergent

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$$

que voici :

$$\frac{1}{3^{n-1}} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}} \left(b_0 - \frac{\lambda_1 a_1}{b_1}\right)\left(b_1 + \frac{\lambda_1 \lambda_2 a_2}{b_2}\right)\cdots$$
$$\times \left(b_{n-2} + \frac{\lambda_{n-2}\lambda_{n-1} a_{n-1}}{b_{n-1}}\right)\left(b_{n-1} + \frac{\lambda_{n-1} a_n}{b_n}\right) b_n,$$

où les λ prennent, indépendamment entre eux, toutes les trois valeurs $1, 1 \pm \frac{1}{2} i\sqrt{6}$.

Dans l'autre, *M. Jensen* parvient aux théorèmes suivants sur la convergence d'une fraction continue dont les numérateurs $a_1, a_2, \ldots$ sont 1, les dénominateurs $b_1, b_2, \ldots$ des nombres complexes. Si $\Sigma|b_\nu|$ est convergent, et si $b_1, b_3, b_5, \ldots$ se trouvent dans un semi-plan ou sur sa droite limite passant par o, tandis que $b_2, b_4, b_6, \ldots$ se trouvent de la même manière dans le semi-plan symétrique au premier par rapport à l'axe réel; si encore, dans le

cas où b_1 se trouve sur sa droite de limite, il existe au moins une valeur de p pour laquelle b_p, b_{p+1} se trouvent du côté intérieur de leurs limites respectives, alors la fraction alternera entre deux valeurs finies.

Si $\Sigma|b_\nu|$ est divergent et b_1, b_3, b_5, ... se trouvent dans un secteur infini au sommet o et à l'angle $\pi - \varepsilon$, où ε a une valeur positive arbitrairement petite, tandis que b_2, b_4, b_6, ... se trouvent dans le secteur symétrique au premier par rapport à l'axe réel ; si encore, dans le cas où $b_1 = 0$, il existe au moins une valeur de p pour laquelle $b_p \neq 0$, $b_{p+1} \neq 0$: alors la fraction continue sera convergente.

C. Juel s'occupe de *problèmes à un nombre infini de solutions*, ou bien de problèmes qui auront une infinité de solutions dans le cas où ils en ont une. La considération générale appliquée par M. Hurwitz à la plupart des problèmes très différents de cette nature ne s'applique pas immédiatement aux polygones de Poncelet dans le cas le plus général, celui où les polygones sont inscrits à une conique et circonscrits à une suite de coniques d'un faisceau auquel aussi la première conique appartient. M. Juel donne une nouvelle démonstration générale du théorème de Poncelet en transformant, au moyen d'opérations stéréométriques, le problème en un problème relatif à une courbe du troisième ordre. Après une nouvelle démonstration d'un théorème stéréométrique analogue dont il s'est occupé autrefois, il démontre enfin le théorème algébrique suivant :

Un système d'équations

$$\rho y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2, \qquad \rho y_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2$$

à des coefficients complexes étant donné, il est, en général, impossible de le transformer, par l'introduction de nouvelles variables cogrédientes, en un autre à coefficients réels ; mais, si ce problème a une solution, il en aura une infinité qui sont essentiellement différentes, c'est-à-dire telles que pour les obtenir il ne suffit pas d'ajouter une transformation réelle. Le théorème analogue a lieu pour n variables.

Dans un Mémoire sur *les équations différentielles du mouve-*

ment relatif, O. Kragh se sert d'un système de coordonnées qui satisfont identiquement aux équations de condition pour réduire les équations du mouvement à la seconde forme de Lagrange. Il réussit aussi à les réduire à la forme de Hamilton au moyen de la transformation de Poisson.

Pour point de départ d'*une démonstration de l'existence des classes de nombres de Cantor*, J. Mollerup prend le lemme suivant : un ensemble dénombrable, étant ordonné d'une manière arbitraire, aura ou un élément dernier ou un sous-ensemble dernier (sans éléments subséquents) du type ω. Il démontre ensuite que les propriétés qui définissent la seconde classe de nombres sont complètes, de sorte que chaque élément ayant ces propriétés se fait construire des éléments donnés (0 et 1), et que par conséquent les propriétés n'admettent pas des éléments idéaux. En effet, la deuxième classe de nombres de Cantor (du type Ω) est formée de la manière suivante : nous prenons du continu un sous-ensemble M du type ω, qui sera suivi d'un nouvel ensemble du même type. Tout l'ensemble est suivi d'un ensemble semblable d'éléments nouveaux; chaque ensemble dénombrable formé de cette manière sera suivi d'un ensemble semblable. Soit maintenant α un élément idéal, c'est-à-dire que α satisfasse aux mêmes lois que les éléments construits, sans pouvoir être construit lui-même. Alors, quant à l'ordonnance, α peut être comparé aux éléments construits, et l'ensemble, M_α, des éléments précédents est dénombrable et peut être ordonné d'après le type ω. En y évitant des éléments idéaux, on aura un sous-ensemble $M_{\chi\alpha}$. Si l'on reprend l'ordre originaire, $M_{\chi\alpha}$ deviendra $M'_{\chi\alpha}$ qui, étant dénombrable, aura ou un dernier élément ou un sous-ensemble dernier du type ω. Selon le principe de formation, $M'_{\chi\alpha}$ sera suivi d'un élément, qui doit être α. Cet élément n'est donc pas idéal.

Maintenant, on établit sans difficulté pour les ensembles du type Ω les mêmes théorèmes qui sont fondamentaux pour ceux du type ω, par exemple le principe de l'induction complète et le théorème correspondant au lemme précédent.

Pour démontrer ensuite l'existence des classes suivantes de nombres de Cantor, il est nécessaire de faire l'hypothèse suivante : étant donné un ensemble bien ordonné d'éléments distincts, il

existe toujours un ensemble semblable d'éléments nouveaux, tous distincts entre eux.

N. Nielsen communique des *contributions à une théorie générale des développements en séries suivant des fonctions sphériques de seconde espèce qui ont été indiqués par Franz Neumann*. Il généralise de la manière suivante le développement que Neumann a donné pour exprimer le produit de deux fonctions sphériques : une fonction $f(x)$, analytique partout au dehors de l'ellipse

$$\frac{\alpha^2}{a-1} + \frac{\beta^2}{a} = 1, \qquad x = \alpha + i\beta$$

et représentée au dehors du cercle $|x| = (a+1)^{\frac{1}{2}}$ par la série

$$f(x) = a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \ldots,$$

est développable en une série de la forme

$$f(x) = \frac{2^{\rho+1} x^{\rho+2\nu}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{n=\infty} (\rho+\nu+n)\, A_n\, Q^{\nu,\rho+n}(x),$$

où $Q^{\nu,\rho}(x)$ désigne la fonction sphérique généralisée définie pour $x > 1$ par

$$Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{2^{2\nu-2}}{x^{\rho+2\nu}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}+n\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\rho+1}{2}+n\right)}{n!\,\Gamma(\nu+\rho+n+1)} \frac{1}{x^{2n}},$$

et les coefficients A sont déterminés par

$$A_n = \sum_{r=0}^{r=\frac{n}{2}} \frac{(-1)^r\,\Gamma(\nu+\rho+n-r)\,2^{n-2r}}{r!\,\Gamma(\rho+2\nu+n-2r)} a_{n-2r}.$$

L'auteur exprime encore une fonction analytique à l'intérieur d'une courbe par une série suivant des fonctions

$$G_n(x) = x^n F(\alpha+n,\ \beta+2n,\ \gamma+2n,\ x).$$

E. Schou prend le point de départ d'une *contribution à la solution du problème d'inversion de Jacobi* dans les *Vorlesun-*

gen über die Theorie der Abelschen Transcendenten de Weierstrass (*Werke*, t. IV) et établit le théorème suivant, exprimé au moyen des notations de cet Ouvrage. *Si*

$$u_\beta = \sum_{\nu=1}^{\rho} \int_{a_0 b_0}^{x_\nu y_\nu} H_\beta(x, y)\,dx, \qquad \beta = 1, 2, \ldots, \rho$$

et si nous posons

$$-\frac{\partial^2 \log \Theta(v_\xi)}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} = p_{\alpha\beta}(v_\xi), \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \rho$$

et

$$\begin{aligned} F(xy, a_\tau b_\tau) = {} & \frac{\partial}{\partial x} H(xy, a_\tau b_\tau)\frac{da_\tau}{d\tau} - \sum_{\alpha=1}^{\rho} H_\alpha(a_\tau b_\tau)\frac{da_\tau}{d\tau} H'_\alpha(xy) \\ & - \sum_{\alpha,\beta}^{1,\rho} H_\alpha(a_\tau b_\tau)\frac{da_\tau}{d\tau} H_\beta(xy)\, p_{\alpha\beta}(u_\xi - \int_{a_0 b_0}^{a_\tau b_\tau} H_\xi(xy)\,dx - w_\xi) \end{aligned}$$

et si nous désignons par $H(xy)$ *une intégrande arbitraire de la première espèce, alors la fonction rationnelle en* (xy)

$$T(xy, a_\tau b_\tau) = \frac{F(xy, a_\tau b_\tau)}{H(xy)}$$

aura des zéros du premier ordre aux points $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$, ..., $(x_\rho\, y_\rho)$ *et n'aura pas d'autres zéros qui soient indépendants de* (a_τ, b_τ).

E. Valentiner discute *la situation des points de rebroussement d'une courbe de sixième ordre*. Cette situation est soumise à des conditions s'il y a plus de six de ces points. Sept points dont les six se trouvent sur une conique sont des points de rebroussement de deux courbes du sixième ordre. Si une telle courbe en a encore un huitième, les huit points de rebroussement se trouveront par couples sur quatre droites d'un faisceau.

C'est en s'occupant des transformations linéaires qui transforment une courbe du troisième ordre en elle-même, que H. Valentiner est conduit à chercher *la détermination des polygones à la fois circonscrits et inscrits à une courbe du troisième ordre*. Les sommets d'un tel polygone sont les points où se con-

fondent tous les points d'intersection avec une autre courbe. Quant aux triangles, l'auteur trouve que par trois points d'inflexion, qui ne sont pas situés sur une droite, on peut faire passer trois coniques dont les autres points d'intersection sont des sommets de triangles circonscrits et inscrits. Une transformation du troisième ordre transformant la courbe en elle-même établira une interversion soit entre les trois triangles qu'on détermine ainsi, soit entre les côtés de chaque triangle. L'auteur en tire une détermination algébrique des triangles. Ensuite, il en trouve une pour les quadrilatères.

MÉLANGES.

SUR LES VALEURS DE LA FONCTION DE GREEN DANS LE VOISINAGE DU CONTOUR;

Par M. Paul LÉVY.

La fonction de Green g_B^A relative à un contour C peut être considérée comme suffisamment connue lorsque la différence

$$h_B^A = \log\frac{1}{r} - g_B^A,$$

r étant la distance des points A et B, est holomorphe. Il n'en est plus de même lorsque A et B tendent vers un même point du contour. Il peut être utile, dans ce cas, d'avoir quelques indications sur l'allure de la fonction g et de ses dérivées.

1. Pour la fonction de Green elle-même, il n'y a pas de difficulté. Appelons H le point du contour le plus rapproché de A, A′ le symétrique de A par rapport à H, r' et d les distances BA′ et AH. Supposons connus deux cercles de rayons R et R′, tangents au

contour C en H, l'un intérieurement, l'autre extérieurement, et tout entiers, l'un intérieur, l'autre extérieur à ce contour. Si R' n'est pas nul et que d soit assez petit, A' est certainement intérieur au contour, même si celui-ci n'est pas convexe. Alors la fonction

$$\log \frac{r'}{r} - g_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}, \tag{1}$$

considérée comme fonction de B, a pour valeurs extrêmes à l'intérieur de C celles de $\log \frac{r'}{r}$ sur C qui sont comprises entre la plus grande et la plus petite valeur de cette fonction sur les cercles considérés. On a ainsi :

$$\log\left(1 + \frac{2d}{2\mathrm{R} - d}\right) > \log \frac{r'}{r} - g_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} > \log\left(1 - \frac{2d}{2\mathrm{R}' + d}\right). \tag{2}$$

Si A tend vers un point P du contour dans le voisinage duquel la courbure soit finie, d tend vers zéro, et, H tendant vers P, on peut trouver une limite inférieure à R et R'. Il résulte alors des inégalités (2) que la différence (1) tend vers zéro, et cela uniformément quel que soit le point B, donc même si ce point tend aussi vers P.

Si P est un point singulier du contour C, mais qu'il existe deux nombres positifs k et k', tels qu'à tout point A voisin de P on puisse faire correspondre un point A', pour lequel $\frac{r'}{r}$ reste compris entre k et k' quand B décrit le contour, alors l'expression (1) reste comprise entre $\log k$ et $\log k'$. Les nombres k et k' existent certainement si P est un point anguleux à tangentes distinctes, ou une pointe dirigée vers l'extérieur.

Les résultats précédents ramènent l'étude de la fonction de Green à celle de $\log \frac{r'}{r}$. On voit ainsi, en appelant δ la plus petite des distances des points A et B au contour C, que la fonction de Green est infinie, finie et différente de zéro, ou très petite en même temps que $\frac{\delta}{r}$. Dans le voisinage d'un point anguleux, la première partie de cet énoncé reste exacte; il en est peut-être de même de la seconde, mais cela ne résulte pas de notre raisonnement.

2. Désignons par $\mathrm{D}_{\mathrm{A}} f$ et $\mathrm{D}'_{\mathrm{A}} f$ des dérivées d'ordres respectifs n

et n' de la fonction f par rapport aux coordonnées du point A. Commençons par démontrer que, si l'un au moins des nombres n et n' n'est pas nul, on a

$$(3) \qquad |\mathrm{D_A\,D'_B}\, g_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}| < \frac{\lambda}{r^{n+n'}}$$

λ étant une constante indépendante des points A et B.

Cela est facile à vérifier dans le cas où C est un cercle. Si nous disons qu'une courbe est continue jusqu'à l'ordre n quand les coordonnées d'un point de la courbe sont des fonctions d'un même paramètre admettant des dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre n, on voit aisément par une transformation conforme que l'inégalité (3) s'applique à un contour quelconque, si l'un au moins des points A et B est assujetti à ne s'approcher que des arcs du contour qui sont continus jusqu'à l'ordre $n + n'$.

Nous pouvons maintenant trouver une limite supérieure de la différence

$$(4) \qquad \mathrm{D_A\,D'_B}\, g'^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}} - \mathrm{D_A\,D'_B}\, g_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}$$

g' étant la fonction de Green relative à une courbe C' qui passe par H et a en ce point un contact d'ordre $n + n' + 1$ avec C (si $n' = 0$ on peut dans tout ce qui suit remplacer $n' + 1$ par n').

Supposons que le contour C se déforme d'une manière continue de manière à venir coïncider avec C'. La différence (4) peut être regardée comme l'intégrale de

$$(5) \qquad \delta\,\mathrm{D_A\,D'_B}\, g_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{d}{dn}(\mathrm{D_A}\, g_{\mathrm{A}}^{\mathrm{M}})\,\frac{d}{dn}(\mathrm{D'_B}\, g_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}})\,\delta n\, ds$$

M désignant un point d'un des contours considérés, s l'arc HM, δn la distance du point M au contour infiniment voisin, et $\frac{d}{dn}$ la dérivée suivant la normale au point M.

On sait qu'on peut obtenir une limite supérieure indépendante de B de la valeur absolue de l'intégrale

$$\int \frac{d}{dn}(\mathrm{D'_B}\, g_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}})\, f(s)\, ds,$$

si l'on connaît une limite supérieure de la valeur absolue de $f(s)$ et

de ses dérivées par rapport à s jusqu'à l'ordre $n' - 1$. Nous sommes donc ramenés à chercher une telle limite pour $\delta n \frac{d}{dn}(D_A g_A^M)$ et ses dérivées par rapport à s jusqu'à l'ordre $n' + 1$.

Supposons que C et C' et tous les contours intermédiaires aient en H un contact d'ordre $n + n' + 1$, c'est-à-dire que δn soit au plus de l'ordre de grandeur de $s^{n+n'+2}$ quand s est très petit. Supposons de plus que $\frac{d^{n'+1}\delta n}{ds^{n'+1}}$ soit au plus de l'ordre de grandeur de s^{n+1}, ce qui d'ailleurs résulte de l'hypothèse précédente si les contours considérés sont continus dans le voisinage de H jusqu'à l'ordre $n + n' + 2$. Alors en tenant compte de l'inégalité (3) en y remplaçant B par M et de ce que $\frac{s}{AM}$ reste certainement fini quand M est quelconque sur C et A voisin de H sur la normale à C en H, on trouve aisément la limite supérieure cherchée pour $\delta n \frac{d}{dn}(D_A g_A^M)$ et ses dérivées, et par suite pour la différence (4), quel que soit le point B.

Dans ce qui précède, A est assujetti à rester sur une même normale au contour. Si A tend d'une manière quelconque vers un point P du contour, H tendra vers P et pour chaque position de H on peut définir une courbe telle que C'. Les résultats précédents subsistent sans modification.

On sait que des transformations conformes permettent de déduire du cercle des courbes pour lesquelles on connaîtra la fonction de Green. Si l'on considère un arc du contour c continu jusqu'à l'ordre $n + n' + 2$, on pourra facilement pour chaque point H de cet arc définir une telle courbe ayant en H un contact d'ordre $n + n' + 1$ avec C. On peut donc former effectivement une fonction représentant $D_A D'_B g_B^A$ avec une erreur finie, quand A reste dans une aire intérieure à C ou dans le voisinage de l'arc considéré, et quand B est quelconque à l'intérieur de C.

Nous pouvons même dans un cas particulier obtenir un résultat plus précis. Supposons que $D_A g_B^A$ soit nul quand A est en H. Dans l'inégalité (3) remplaçons B par M et D par $\frac{d}{dn}$ D, $\frac{d}{dn}$ désignant la dérivée suivant la normale AH, et intégrons l'inégalité ainsi écrite quand A décrit cette normale à partir de H. En observant que, dans ces conditions, AM est au moins de l'ordre de grandeur de s,

nous obtenons

$$\left| D_A D'_M g_M^A \right| < \frac{\lambda d}{s^{n+n'+1}}$$

En raisonnant avec cette inégalité comme nous l'avons fait avec l'inégalité (3), et en supposant que C' ait un contact d'ordre $n + n' + 2$ avec C, nous trouvons que la différence (4) tend vers zéro quand A tend vers H en suivant la normale AH, et cela uniformément, quel que soit le point B.

Si les coordonnées sont des coordonnées curvilignes, il peut arriver que $D_A g_B^A$ représente quand A vient en H une dérivée prise suivant le contour C, et alors s'annule pour tout point H voisin de P. Il n'y a pas de difficulté dans ce cas si A tend vers P d'une manière quelconque. Par les formules de transformation de coordonnées, on peut passer au cas de coordonnées quelconques. On voit ainsi que si D_A est tel que $D_A g_B^A$ s'annule quel que soit B quand A est en P, pour les contours C, C′ et pour les contours intermédiaires, la différence (4) tend vers zéro quand A tend vers P d'une manière quelconque, et cela uniformément, quel que soit le point B.

Les résultats précédents s'étendent, par une méthode analogue, au cas de l'espace, et aussi, avec quelques modifications, à la fonction de Neumann et aux autres fonctions de la Physique mathématique.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Dingeldey (Frdr.). — *Sammlung v. Aufgaben zur Anwendung der Differential- u. Integralrechnung.* I. Tl. *Aufgaben zur Anwendg. der Differentialrechng.* V-202 p. avec 99 fig. Relié. 6 m. [Teubner's (B.-G.), *Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.*]

Jahrbuch d. Mathematik. 38. Bd. J. 1907. 1. u. 2. Heft. Berlin, G. Reimer. 25 m. 30.

Kowalewski (Gerh.). — *Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen.* Ein Lehr- u. Uebungsbuch f. Studierende zur Einführg. in die Infinitesimalrechng. Gr. in-8°, VIII-383 p. avec 127 figures. Leipzig, W. Engelmann. 15 m.; relié, 16 m. 50.

Poincaré (Henri). — 6 *Vorträge üb. ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik u. mathematischen Physik, gehalten zu Göttingen vom* 22-28 April 1909. IV-60 p. avec 6 fig. 1 m. 80; relié, 2 m. 40. (*Mathemathische, Vorlesungen an der Universität Göttingen*). Gr. in-8°. Leipzig, B.-G. Teubner.

Sturm (Rud.). — *Die Lehre v. den geometrischen Verwandtschaften.* 4. Bd. *Die nichtlinearen u. die mehrdeut. Verwandtschaften zweiter u. dritter Stufe.* X-486 p. Relié, 20 m. [Teubner's (B.-G.), *Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.*]

Antomari (X.). — *Cours de Géométrie descriptive* à l'usage des candidats aux grandes écoles. 4e édit. (25-16), 632 p. Paris, Vuibert et Nony. 10 fr.

Atlas lunaire, publié par la Société belge d'Astronomie. Fasc. 9. In-4°. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr.

Atlas photographique de la Lune, 11e fasc. In-folio, avec texte in-4°. Paris, Gauthier-Villars. 30 fr.

Bauer (Gust.). — *Vorlesungen üb. Algebra.* Hrsg. vom mathemat. Verein München. Mit dem Bildnis Gust. Bauers als Titelbild u. 11 Fig. im Text. 2. Aufl. In-8°, VI-366 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 11 m.; relié, 12 m.

Cureau (Ad.). — *Détermination des positions géographiques, manuel d'Astronomie pratique et de Topographie.* In-8°, figures et tables. Paris, A. Challamel. 15 fr.

Dienes. — *Essai sur les singularités des fonctions analytiques.* In-4°, 87 p. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr.

Fourrey (E.). — *Curiosités géométriques.* 2e édit. In-8°, VIII-431 p. Paris, Vuibert et Nony. 5 fr.

Julliot de La Morandière (Léon). — *De la réserve mathématique des primes dans l'assurance.* In-8°. Paris, Larose et Tenin. 10 fr.

Minkowski (Herm.). — *Geometrie der Zahlen.* 2. Lfg. In-8°, VIII et 241-256 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 1 m. Complet, 9 m.; relié, 10 m.

Bernoulli (Jak). — *Ueber unendliche Reihen.* (1689-1704.) Aus dem Lat. übers. u. hrsg. v. G. Kowalewski. 141 p. avec 12 fig. Relié, 2 m. 50. (*Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften.*) In-8°. Leipzig, W. Engelmann.

MAURAIN (Ch.). — *Les états physiques de la matière.* Paris, F. Alcan. 3 fr. 50.

COUTURAT (Louis). — *Internationales mathemat. Lexikon in Ido, Deutsch, Englisch, Französisch u. Italienisch.* In-8°, IV-36 p. Jena, G. Fischer. 1 m. 50.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française. Rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules MOLK. Tome II (3 vol.). Équations différentielles ordinaires. Rédigé dans l'édition allemande sous la direction de *H. Burkhardt* et *W. Wirtinger.* Fasc. I (1-170 p.). Paris, Gauthier-Villars. 7 fr.

WIRTINGER (W.). — *Ueber die konforme Abbildung der Riemann'schen Fläche durch Abel'sche Integrale, besonders bei* $p = 1, 2$. (31-24, 5), 22 p. avec 26 fig. Wien, A. Hölder. 3 m.

SCHUSTER (Arthur). — *An introduction to the theorie of optics.* 2e édition, revue. XV-352 p. avec fig. New-York, Longmans, Green et Cie. 4 dollars.

TURPAIN (Albert). — *Notions fondamentales sur la télégraphie envisagée dans son développement, son état actuel et ses derniers progrès* (du Bréguet au Pollak et Virag et aux téléphotographes). In-8°, 180 p. avec 122 fig. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr.

BARNARD (S.) and CHILD (J.-M.). — *Key to a new Algebra.* Vol. I. In-8°. London, Macmillan et Cie. 6 s. 6 d.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, édition française publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk. Tome II, vol. III, fasc. 1 : *Existence de l'intégrale générale*, par P. Painlevé. *Méthodes d'intégration élémentaires*, par E. Vessiot. In-8°, 170 p. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr.

HORN (J.). — *Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen.* VII-363 p. (*Sammlung Schubert*, I). In-8°. Leipzig, G.-J. Göschen. Relié, 10 m.

SCHUBERT (Herm.). — *Elementare Arithmetik u. Algebra.* 2. Aufl. VI-230 p. (*Sammlung Schubert*, I). In-8°. Leipzig, G.-J. Göschen. Relié, 2 m. 80.

Jules TANNERY.

La plupart de nos lecteurs connaissent déjà le cruel malheur qui vient de nous atteindre. Jules Tannery, notre ami fidèle, notre collaborateur dévoué, nous a été enlevé par un mal subit dans la nuit du jeudi 10 au vendredi 11 novembre dernier. Nous reproduisons plus loin le discours que M. Émile Picard, Président de l'Académie des Sciences, a prononcé le lundi 14 novembre, en ouvrant la Séance de l'Académie; celui que M. Painlevé avait prononcé la veille à la salle des Actes de l'École Normale, devant les élèves de cette École où Jules Tannery nous avait succédé en 1881 comme Maître de Conférences, où il était Directeur des Études scientifiques depuis 1884. D'autres témoignages viendront se joindre à ces premiers témoignages d'affection, de respect, d'admiration et de reconnaissance. Dès à présent, nous tenons à rappeler ce que fut Tannery pour ce journal qui va bientôt finir sa quarantième année d'existence. Après Jules Houël, on peut dire que Tannery en a été le véritable fondateur. Est-il besoin de rappeler ici les travaux de toute nature qu'il y a insérés, ces innombrables articles qui remplissaient quelquefois un numéro tout entier, écrits d'une plume si alerte et dans une langue si excellente, où une bienveillance foncière et inépuisable savait si bien s'allier à l'esprit et à la finesse du sens critique? Comme son frère Paul, auprès de qui il va reposer, Jules Tannery était un lettré et un philosophe en même temps qu'un mathématicien. Nos successeurs ne reverront plus, nous le craignons, des aptitudes si variées, des talents si divers réunis dans la même personne, et à un degré aussi élevé.

G. D.

Discours de M. Émile Picard,
Président de l'Académie des Sciences.

Messieurs,

L'Académie, si éprouvée depuis quelques mois, vient d'être frappée de nouveau. M. Tannery, qui assistait il y a huit jours à notre séance, en apparence plein de santé, est mort presque subitement vendredi matin, à l'âge de soixante-deux ans. Il avait été nommé membre libre de l'Académie en 1907, en remplacement de Brouardel.

C'était une figure singulièrement originale et attachante que celle de Jules Tannery. Entré en 1866 à l'École Normale, il professa quelque temps dans les lycées et débuta dans la Science par quelques travaux intéressants sur les équations différentielles linéaires et sur diverses questions d'Algèbre, mais il résolut vite de se consacrer à la Philosophie scientifique, à la critique et à l'enseignement. C'est de ce côté que le portait son esprit profond et subtil, qui aimait les discussions sur les principes des sciences, et particulièrement sur ceux des Mathématiques. Son enseignement à l'École Normale le força bientôt à réfléchir sur les fondements de l'Analyse mathématique, et c'est de là que sortit son Ouvrage *Introduction à la théorie des fonctions*, dont il nous présentait, il y a trois semaines, la seconde édition en deux volumes, et dont le principal objet est de montrer comment on peut fonder l'Analyse sur la seule idée de nombre entier.

D'autres Ouvrages furent encore publiés par Tannery, comme son grand *Traité sur la théorie des fonctions elliptiques* en collaboration avec M. Molk, ses *Leçons sur l'Analyse et l'Algèbre, l'Arithmétique*, où l'on retrouve le souci d'une minutieuse rigueur.

Mais c'est surtout dans la critique philosophique ou scientifique qu'apparaît pleinement le talent de notre confrère. Il avait débuté de bonne heure dans cette voie par un article sur la *Loi de Fechner*, qui fit jadis quelque bruit parmi les amis de la Psycho-Physique. Il y montrait l'inanité de cette prétendue proportionnalité de la sensation au logarithme de l'excitation, y voyant seulement une définition de la sensation. Citons encore ses articles sur l'*Infini mathématique* qui joue un rôle si important, depuis les travaux

de Georges Cantor, dans les mémoires de certains mathématiciens. Je ne dois pas oublier son magistral travail sur le *Rôle du nombre dans les sciences*, auquel il tenait beaucoup, et où il avait mis le plus de lui-même ; c'est une étude d'un large idéalisme, où il discute les conditions de l'accord entre la théorie et l'expérience, et où il nous parle, je cite ici ses propres expressions, de ces inquiétudes que nous cultivons sous le nom de Philosophie.

Une grande partie du labeur scientifique de Tannery fut consacrée au *Bulletin des Sciences mathématiques*. Les analyses qu'il a faites des Ouvrages et des Mémoires récents sont innombrables et d'une rare pénétration. Elles ne sont pas toutes signées, mais on ne peut s'y tromper, car elles portent sa marque si personnelle. En les réunissant, on aurait un tableau fidèle d'une partie importante du mouvement mathématique dans ces vingt-cinq dernières années.

Dans les écrits de Tannery, la forme n'est pas moins remarquable que le fond. Son style était bien à lui. Quelle finesse et quel esprit, avec çà et là une ironie discrète et des traces d'un scepticisme plus apparent peut-être que réel. C'était vraiment un lettré. Il eût pu jadis entrer dans la Section des Lettres de l'École Normale ; sa carrière n'eût pas été moins brillante.

Est-il besoin ici de parler de l'homme ? Aucun de nous n'oubliera le spirituel causeur, l'aimable confrère dont le commerce avait tant de charme. Nous pensons aussi en ce moment à Mme Tannery, à ses enfants et à sa famille, frappés si brutalement par ce coup inattendu. Qu'ils veuillent bien recevoir l'expression de notre sympathie et de nos profonds regrets.

Discours de M. Painlevé.

MESSIEURS,

L'homme dont il nous faut aujourd'hui nous séparer pour jamais a été pendant plus d'un quart de siècle l'âme vivante de cette École Normale Sciences à laquelle il s'était voué tout entier. Pour toutes les générations de jeunes savants qui se sont succédé dans cette maison, il n'a pas été seulement un maître intellectuel, il a été un guide moral, un confident, un ami. Son esprit était ouvert

à leurs conceptions et à leurs rêves scientifiques, son cœur à leurs tristesses. Et si tous n'ont pas eu la joie, qui fut une des grandes de ma vie, d'entrer avec lui, durant des années, dans une intimité chaque jour plus affectueuse et plus complète, je suis sûr que tous aujourd'hui partagent notre insurmontable émotion : cette nuit-là, où mourut Jules Tannery, chacun d'eux a senti qu'il subissait une perte irréparable et qu'en brisant trop tôt ce merveilleux instrument de pensée, la Nature commettait comme un meurtre incompréhensible.

Et ce qui peut accroître encore notre douleur, c'est de songer que, malgré l'étendue et la profondeur de ses ouvrages, malgré les pages belles et parfaites qu'il nous laisse, ce qu'il y eut de plus rare et de plus précieux dans sa personnalité vivra, certes, en notre souvenir, mais disparaîtra avec ceux qui l'ont connue. Tandis que le poète et l'artiste se réjouissent au soleil dans le monde brillant des formes et des apparences, ce grand méditatif a plongé dans ces régions obscures et mystérieuses où baignent les racines profondes des réalités, où s'entremêlent leurs secrètes correspondances ; il a fait sien cet empire abstrait du nombre, où les choses, dépouillées de couleurs, de reliefs et comme désincarnées, laissent apparaître leurs lois essentielles et immuables. Et c'est parce que ses yeux gardaient en quelque sorte le reflet des spectacles contemplés, qu'il émanait de lui comme un rayonnement. Si pleine d'enseignements et de suggestions que fût sa parole, on sentait que l'*inexprimable* la débordait. Lui aussi, en mourant pouvait mettre un doigt sur sa bouche et dire : « Le reste est silence. »

On a écrit de Littré qu'il fut un saint laïque. Jules Tannery fut un saint intellectuel. Par l'intensité de la méditation, par le scrupule passionné de la pensée, il a atteint jusqu'à la perfection. C'est pourquoi sa vie fut si harmonieuse, son désintéressement si absolu, son cœur si large ; c'est pourquoi, malgré sa tendresse vigilante pour les siens — dont je ne veux rien dire, car il est des sentiments qu'on ne doit même effleurer à certaines heures — il savait garder tant de place aux fils intellectuels que chaque année nouvelle lui amenait ici.

Et comment ne pas rappeler la tranquille intrépidité dont il fit preuve, lui, le philosophe épris de silence, quant les circonstances publiques lui en firent un devoir. Cette triste matinée évoque en

moi invinciblement une autre matinée de novembre 1897, il y a treize ans, quand il m'entretenait pour la première fois de la grande crise morale qui commençait pour notre pays.

Son opinion était faite, et il essaya ce jour-là de me convaincre sans y réussir entièrement. Et je n'ai pas oublié l'angoisse que j'éprouvais en traversant le vestibule familier de l'École, à la pensée que, pour la première fois et dans un tel débat, je n'étais pas immédiatement en communion de conscience avec lui.

Et lorsqu'un peu peu plus tard je lui disais que pour défendre la justice, on doit, s'il le faut, résister à la violence par la violence, de quel accent il répondait : « Non! non! jamais de violence ». Pour lui la Justice devait marcher sereine au travers des épreuves, confiante dans son éternité.

Messieurs, nous accompagnerons tout à l'heure jusqu'à sa dernière demeure la dépouille mortelle de notre maître et de notre ami, mais sa pensée vivra en nous comme une flamme intérieure, et, dans les heures de défaillance, nous évoquerons celui dont toute la vie fut une aspiration vers les vérités idéales et sereines et comme une longue méditation sous les étoiles.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

TANNERY (Jules). — Introduction a la théorie des fonctions d'une variable. Deuxième édition, Tome II, 1 volume grand in-octavo de 477 pages. Paris, Hermann, rue de la Sorbonne.

Le Tome deuxième de la seconde édition porte en sous-titre : *Intégrales définies. Developpements en séries. Langage géométrique. Fonctions de variables imaginaires,* avec une Note de M. Hadamard. Toute la partie qui se rapporte aux fonctions de deux variables réelles et aux fonctions d'une variable imaginaire a été ajoutée dans la seconde édition : je me limiterai au compte rendu de cette partie. Pour donner une idée de l'esprit dans lequel elle est traitée, il me paraît nécessaire d'entrer dans quelques détails sur les analyses approfondies qui sont exposées méthodiquement dans le Chapitre intitulé : *Langage géométrique*.

1. L'étude des fonctions de deux variables est grandement facilitée par l'emploi du langage géométrique et des figures de géométrie plane. Mais il est indispensable d'expliquer ce langage géométrique et de lui donner une signification purement numérique. On reconnait ensuite que, tout en prétendant rester dans le pur nombre, il est permis d'invoquer les théorèmes de la géométrie plane et de s'aider des figures qui leur correspondent.

En partant des résultats les plus simples de la géométrie analytique plane, il n'y a aucune difficulté à définir : points, distances, droites, vecteurs, côté gauche et côté droit d'un vecteur, égalité de deux figures planes, angle de deux vecteurs, orientation de cet angle, intérieur d'un angle, intérieur d'un rectangle, d'un cercle, décomposition d'un rectangle en rectangles partiels.

Un grand nombre de définitions et de propositions relatives aux suites et aux ensembles de points sur un axe s'étendent immédiatement aux suites et aux ensembles de points dans le plan. On définit pour le plan : ensemble borné, écart d'un ensemble, point d'accumulation ; ensemble clos, dérivé, parfait, frontière d'un ensemble. Si, à chaque point d'un ensemble (E), on fait correspondre un nombre, on dit qu'on a défini une fonction dans l'ensemble (E). On étend sans peine à une pareille fonction la notion de continuité, en considérant un point d'accumulation de l'ensemble (E) qui fait partie de l'ensemble (E).

De même, à tout point A d'un ensemble ($\mathcal{A}$), on peut faire correspondre un point B et dire que le point B est une fonction $\varphi(A)$ du point A déterminée dans l'ensemble ($\mathcal{A}$) et la notion de continuité s'étend encore d'elle-même à une pareille fonction ; le cas le plus intéressant est celui où l'ensemble ($\mathcal{A}$) est clos, où les images de deux points distincts sont toujours distinctes et où la fonction $\varphi(\mathcal{A})$ est continue dans l'ensemble ($\mathcal{A}$).

Les formules

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (t_0 \leq t \leq t_1),$$

où $\varphi(t)$, $\psi(t)$ désignent des fonctions continues dans l'intervalle (t_0, t_1), définissent un ensemble parfait de points. Il convient de ne pas employer, sans des restrictions nouvelles, le nom de *courbe* pour désigner un tel ensemble qui peut être d'une nature très compliquée (comme le montrent des exemples indiqués par Peano).

On emploie ici le mot de *lien*. Le lien est simple quand il ne présente pas de point double. Un lien est fermé si son origine coïncide avec son extrémité ; un lien fermé est simple si, exception faite du point qui est à la fois l'origine et l'extrémité, le lien n'a pas de point qui corresponde à deux valeurs distinctes de t de l'intervalle (t_0, t_1).

Soient P un point fixe, M un point variable d'un lien (T) donnés par les valeurs θ et t du paramètre et A un point extérieur au lien, on peut définir l'angle (AP, AM) comme une fonction continue de t s'annulant pour $t = \theta$; on désigne cet angle par la notation $[\theta, t]_A$. Lorsque le lien (T) est fermé, les valeurs extrêmes t_0 et t_1 donnant le même point, le quotient

$$\frac{[t_0, t_1]_A}{2\pi} = n$$

est un entier positif, nul ou négatif : n est *l'ordre* du point A par rapport au lien (T). Si par un point c d'un lien fermé on peut mener une droite que le lien traverse, on peut trouver sur cette droite, aussi près qu'on veut du point c, des points dont les ordres diffèrent d'une unité.

Il importe d'avoir, pour les systèmes à deux variables, une notion qui tienne le même rôle que la notion d'intervalle pour une seule variable. A ce point de vue, on introduit une notion très générale, due à Weierstrass, celle de *continuum*.

Par exemple, l'ensemble des points intérieurs à un triangle, à l'exclusion d'un nombre fini de ces points, est un continuum dont la frontière est constituée par le contour du triangle et par les points exclus. En juxtaposant des continuums ayant pour contour un lien fermé simple, on peut former des continuums dont la considération est importante pour la théorie de certaines fonctions.

M. Jordan a démontré que tout lien fermé simple (T) partage le plan en deux continuums distincts, l'un extérieur à (T), l'autre intérieur. M. Tannery, adoptant une voie suivie par M. Ames, démontre cette proposition en se limitant au cas où le lien fermé simple peut être décomposé en un nombre fini de liens partiels dont chacun est défini par des formules telles que

$$y = f(x) \qquad (x_0 \leq x \leq x_1),$$
$$x = \varphi(y) \qquad (y_0 \leq y \leq y_1),$$

$f(x)$ et $\varphi(y)$ désignant des fonctions continues dans les intervalles correspondants.

D'autres propositions d'*Analysis situs*, d'un usage très fréquent et qui paraissent intuitives sur des figures simples, doivent être démontrées avec rigueur, si l'on se place au point de vue général et arithmétique qui est celui de l'auteur. On en fait une application à la question de reconnaître, au moyen d'un indice, si deux équations en x, y

$$g(x, y) = \alpha, \qquad h(x, y) = \beta$$

ont des solutions dans l'ensemble formé par les points d'un continuum et de sa frontière.

En partant de la notion de lien et en faisant des restrictions qui sont introduites méthodiquement, on arrive à la définition précise d'une *courbe :* on réserve le nom de *courbe* aux liens qui peuvent être décomposés en un nombre fini d'arcs élémentaires

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

répondant aux conditions suivantes : les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ admettent dans l'intervalle (α, β) des dérivées continues $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ et la fonction $\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ est ou croissante, ou décroissante pour toute valeur de t intérieure à l'intervalle (α, β).

Il est facile, après ces précisions, de définir un *domaine* $m + 1$ *fois connexe*.

2. Les propositions d'*Analysis situs* qui précèdent se trouvent généralisées dans une Note de M. Hadamard placée à la fin du Volume et qui a pour titre : *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker;* j'indique brièvement de suite les questions posées et quelques-uns des résultats établis dans cette Note.

Après des généralités sur les variétés et les surfaces dans l'espace à n dimensions, M. Hadamard définit l'*ordre* d'un point par rapport à une surface, au moyen de l'intégrale multiple

$$I = -\underbrace{\int \cdots \int}_{n-1} \frac{1}{r^n} \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} du_1 \ldots du_{n-1}$$

étendue à toute la surface (S) et dans laquelle r désigne la quantité positive

$$r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

pendant que $u_1, \ldots, u_{n-1}$ sont, dans chaque élément, les coordonnées du point paramétrique rangées conformément à l'orientation de l'élément (orientation définie par les signes de certains déterminants) : on démontre qu'on a

$$I = \omega K_n,$$

K_n désignant une constante numérique qui dépend de n seul (par exemple $K_3 = 4\pi$) et ω un entier positif, nul ou négatif; ω s'appelle l'*ordre* de l'origine par rapport à la surface (S). L'ordre d'un point quelconque $(a_1, \ldots, a_n)$ non situé sur (S) s'obtient en remplaçant, dans l'intégrale multiple, $x_1, \ldots, x_n$ par $(x_1 - a_1), \ldots, (x_n - a_n)$.

L'indice d'un système de fonctions $f_1, \ldots, f_n$ de $x_1, \ldots, x_n$ sur (S) est l'ordre de l'origine par rapport à la surface (S) qu'on suppose être le lieu du point dont les coordonnées sont $f_1, \ldots, f_n$.

Si (S) est la frontière d'un volume (V) dans l'espace à n dimensions et si les équations

$$f_1 = 0, \quad \ldots, \quad f_n = 0$$

n'ont aucune solution commune à l'intérieur de (V), l'indice du système de fonctions $f_1, \ldots, f_n$ considéré sur (S) est nul.

A cette considération de l'indice se rattache le théorème de Schœnfliess permettant de reconnaître si les équations en $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= X_1, \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots, \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) &= X_n, \end{aligned}$$

admettent une solution dans un volume donné de l'espace à n dimensions, puis des théorèmes de Brouwer sur une transformation parfaite et continue d'une sphère en elle-même, dans l'espace à n dimensions. La portée de ces théorèmes apparaît bien dans les indications que donne M. Hadamard.

3. Après l'étude approfondie, faite par M. Tannery, des ensembles de points, des fonctions de points, l'introduction à la théorie

des fonctions d'une variable imaginaire peut être rendue entièrement rigoureuse.

Elle débute par un exposé du calcul des quantités imaginaires fait en considérant les restes de polynomes entiers en i par rapport à $i^2 + 1$. L'étude des fonctions analytiques est préparée par des exemples : fonctions rationnelles, fonctions algébriques simples. Après les généralités sur les séries (ou les produits infinis) dont les termes (ou les facteurs) sont des séries entières en x, on remarquera la définition du prolongement analytique, celle d'une fonction analytique au sens de Weierstrass.

Ces généralités permettent d'étendre aux variables imaginaires la définition et les propriétés d'un grand nombre de fonctions d'une variable réelle : on l'explique en détail pour $(1 + x)^n$, e^x, $\log x$, les fonctions circulaires ou hyperboliques et les fonctions inverses de celles-ci, en insistant sur les précautions nécessitées par les *coupures*. Les propriétés fondamentales de la fonction $\Gamma(x)$ servent d'introduction au théorème de Weierstrass sur les fonctions entières et au théorème correspondant de Mittag-Leffler sur les fonctions méromorphes dont on a défini les discontinuités. Des applications sont faites à $\cot x$ et à la fonction $\zeta(x)$ de Weierstrass.

Le dernier Chapitre est consacré aux dérivées et aux intégrales de fonction d'une variable imaginaire. La définition de la dérivée d'une fonction déterminée dans un ensemble (E) de nombres imaginaires a besoin d'être précisée, dans le cas où l'ensemble (E) est constitué par un continuum et par la frontière de ce continuum, principalement pour les points pris sur la frontière. Il en est de même, dans le cas où l'on considère un lien $x = \varphi(t) + i\,\psi(t)$ continu dans (E) et la fonction complexe de t, $F(x) = \Phi(t) + i\,\Psi(t)$, qui correspond à ce lien.

La définition d'une intégrale imaginaire

$$\int_C f(x)\,dx$$

est donnée en ne supposant que la continuité de la fonction $f(x)$ dans un domaine qui comprend la courbe (C). Le cas où $f(x)$ est la dérivée d'une fonction connue $F(x)$ est traité minutieusement et la façon dont s'introduisent les coupures est expliquée sur des exemples. On approfondit la démonstration donnée par M. Goursat

du théorème fondamental de Cauchy et les conséquences classiques de ce théorème. On démontre, d'après M. Painlevé, la proposition suivante :

Soit (Δ) un domaine simple et (Γ) le continuum intérieur; si les fonctions $u_1(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ admettent des dérivées en tout point de (Δ) et si dans ce domaine la série

$$(u) \qquad u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

est uniformément convergente, la somme $f(x)$ de cette série est une fonction régulière en tout point de (Γ); ses dérivées successives sont les sommes des séries obtenues en prenant les dérivées premières, secondes, ... des termes de la série (u).

Enfin, en supposant que la série Σu_n converge *normalement* dans le domaine (Δ), c'est-à-dire qu'on ait $|u_n(x)| < a_n$, a_n étant un nombre positif, terme général d'une série convergente, on montre que le produit infini

$$[1 + u_1(x)][1 + u_2(x)] \ldots [1 + u_n(x)] \ldots$$

est une fonction régulière en tout point de (Γ); on définit avec précision le logarithme de ce produit et la dérivée de ce logarithme.

4. Comme conclusion, on reconnaîtra que cet Ouvrage complété comme il vient de l'être par des additions relatives aux ensembles de points, à l'*Analysis situs*, aux définitions et aux propriétés fondamentales des fonctions d'une variable imaginaire, est une parfaite *Introduction à l'Analyse* de notre temps. Il est possible qu'on soit obligé, pour des études aussi approfondies, de renvoyer souvent à des livres : c'est une raison de plus de remercier ceux qui apportent à la préparation de ces livres, avec un sens si affiné de l'Analyse, une si scrupuleuse conscience.

Ce compte rendu était déjà composé quand on a appris la mort de M. Tannery. Je voudrais seulement ici dire la tristesse et les regrets profonds de quelques-uns de ses plus anciens élèves et amis. E. LACOUR.

LEBON (E.). — SAVANTS DU JOUR : HENRI POINCARÉ; VIII-80 pages, 1909. GASTON DARBOUX; VIII-72 pages, 1910. ÉMILE PICARD; VIII-80 pages, 1910. Paris, Gauthier-Villars.

Cette belle publication n'est pas seulement agréable à feuilleter, elle sera extrêmement utile : les renseignements qu'elle contient sont garantis par la parfaite conscience de l'auteur, qui a certainement soumis tous les points douteux à chacun des savants dont il voulait parler.

Chaque Volume, luxueusement imprimé, dans le format grand in-8°, sur papier de Hollande, contient le portrait en héliogravure, la notice biographique; la liste des grades, des titres, des fonctions; enfin, la liste des Notes, Mémoires et Ouvrages du savant auquel il est consacré. Dans la dernière liste, les travaux sont classés sous des rubriques générales; chaque classe comporte, s'il y a lieu, des subdivisions; pour chaque travail, on trouve tous les renseignements bibliographiques, l'indication des comptes rendus et analyses, et, parfois, quelques lignes de commentaire. En outre, lorsque quelque savant autorisé a eu l'occasion de porter un jugement sur quelque Ouvrage particulièrement important ou sur un ensemble de travaux, M. Lebon nous a conservé les points essentiels de son rapport, de son discours ou de sa critique.

Par exemple, la section du Volume sur M. Poincaré, qui a pour titre : *Analyse mathématique*, contient, après un extrait du rapport de M. Gustave Rados sur le prix Bolyai, l'énumération de 144 Notes ou Mémoires, dont 98 pour l'Analyse pure, 23 pour l'Analyse appliquée à la Géométrie.

L'article biographique sur M. Poincaré est formé par un extrait du discours prononcé par M. Frédéric Masson, en le recevant à l'Académie française. Il contient beaucoup de faits intéressants, de détails curieux et d'anecdotes, dont quelques-unes sont plaisantes. M. Masson est rompu à la méthode historique; j'imagine que, pour M. Poincaré, comme pour Napoléon, il a soigneusement vérifié et critiqué les sources.

Les Notices sur MM. Darboux et Picard sont sobres, objectives et m'ont paru très exactes, pour ce que je connais des deux

savants : l'auteur n'a pas craint de dire quelques mots du caractère de ceux dont il parlait ; il l'a fait avec tact.

Voici en quels termes, M. Darboux a présenté à l'Académie des Sciences le Volume sur M. Picard :

. . . .

« Comme les Volumes précédents, celui-ci se recommande par une abondance dans les renseignements de toute nature qui feront de la Collection de M. E. Lebon le guide le plus précieux pour les futurs historiens de la Science.

« J'y signalerai plus particulièrement la charmante Notice biographique qui ouvre le Volume. Elle nous fait connaître la jeunesse de M. Émile Picard, ses premières études et ses succès, puis ses découvertes et les principaux incidents de sa belle carrière scientifique. Elle insiste, comme il convient, sur les incursions que notre Président a faites dans le domaine de la philosophie des sciences et, plus particulièrement, sur le beau Rapport qu'il fut amené à écrire en 1900 sur l'ensemble du progrès scientifique, à la demande du Commissaire général de l'Exposition universelle internationale, notre confrère Alfred Picard. »

M. Darboux a parfaitement raison de dire que la Notice sur M. Picard est charmante, mais celle sur M. Darboux ne l'est pas moins.

Les Volumes de M. Lebon nous donnent une idée nette du savant dont ils parlent et des résultats de leur activité scientifique au moment où ils ont paru. Précieux pour les amis de ces savants, indispensables aux historiens de la Science, ils seront, dès à présent, très utiles à ceux qui veulent se mettre au courant d'un sujet ou en faire la bibliographie.

Souhaitons qu'ils deviennent, à ce dernier point de vue, très incomplets, et que M. Lebon ait à rédiger, pour chacun, quelque long supplément et même un *supplementum supplementi chronicorum*.

En attendant, il n'a qu'à continuer l'œuvre si bien commencée.

J. T.

HAERPFER (A.). — Die Probleme von Hansen und Snellius. 20 pages in-8; Leipzig, Teubner, 1910.

Le problème de Snellius est résolu dans les Traités de Trigométrie français sous le nom de *problème de la carte*. Quant au problème de Hansen, il consiste, étant donnée une base AB, à déterminer un couple de points P, Q connaissant APB, AQB, BPQ, AQP. L'auteur, en supposant connues les coordonnées rectangulaires des points A, B, montre comment on peut calculer les coordonnées des points P, Q ; il explique aussi comment on doit procéder quand, pour déterminer les points P, Q, on se donne, non pas seulement deux points A, B, mais bien $n+1$ points et qu'on a observé les angles de façon à pouvoir former $2n$ équations du premier degré analogues aux deux équations qu'on obtient dans le premier cas considéré. J. T.

BOEHM (K.). — Elliptische Funktionen. Zweiter Theil : Theorie der elliptischen Integrale. Umkehrproblem. 1 vol. in-8 (de la *Sammlung Schubert*); VIII-180 pages. Leipzig, G.-J. Göschen, 1910.

Le *Bulletin* (¹) a rendu compte du premier Volume des *Elliptische Funktionen* de M. Karl Boehm. L'auteur a eu la coquetterie de rédiger le second Volume de manière qu'il se suffise à peu près à lui-même et soit ainsi presque indépendant du premier. Le sous-titre : *Intégrales elliptiques et inversion* indique bien l'objet du Volume ; après avoir étudié les intégrales elliptiques au point de vue de leurs points critiques, de leur classification et de leur réduction, l'auteur étudie spécialement l'intégrale elliptique de première espèce, les figures sur lesquelles la fonction $\sqrt{f(z)}$ ou l'intégrale de première espèce correspondantes sont univoques, les intégrales prises le long d'une courbe fermée, le passage des coupures, les modules de périodicité; il montre ensuite, par l'étude de l'équation différentielle (Cauchy,

(¹) T. XXXII_1, 1908, p. 326.

Briot et Bouquet et Picard), comment l'inversion de l'intégrale de première espèce se fait au moyen d'une fonction elliptique du second ordre ; il s'attache, en particulier, au cas où les points d'embranchement sont réels ; il étudie les formes normales de Weierstrass et de Legendre, montre comment s'y ramènent les intégrales elliptiques générales et termine enfin par un chapitre sur le théorème d'Abel, d'où sont déduits les théorèmes d'addition.

Telles sont, brièvement résumées, les matières traitées par M. Boehm. Il y a assurément bien de quoi remplir 180 pages et l'auteur a eu raison de ne pas vouloir, dans un aussi court volume, avoir l'air de s'occuper de la théorie des fonctions modulaires, de la transformation ou des applications. J. T.

WEBER (Henri) und WELLSTEIN (Joseph). — Encyclopädie der Elementar-mathematik; ein Handbuch für Lehrer und Studierende in drei Bänden. Erster Band : *Elementare Algebra und Analysis;* dritte Auflage. 1 volume in-8, xviii–531 pages. Leipzig, B.-G. Teubner, 1909.

Nous avons déjà, en 1905, rendu un compte détaillé du contenu de cet excellent Ouvrage. Le voici parvenu à sa troisième édition, à peu près tels que l'avaient conçu ses deux auteurs. Nous nous bornerons donc à renvoyer nos lecteurs à l'analyse que nous avons déjà donnée, en nous applaudissant du succès d'une production qui est appelée à élever le niveau de l'enseignement mathématique élémentaire. J. G.

PASCAL (E.). — Repertorium der höheren Mathematik, zweite völlig umgearbeitete Auflage der deutschen Ausgabe, unter Mitwirkung zahlreichen Mathematiker, herausgegeben von P. Epstein und H.-E. Timerding. Erster Band : *Analysis.* Zweite Auflage. Erste Hälfte : *Algebra, Differential- und Integralrechnung.* 1 volume in-8, xv-527 pages. Leipzig et Berlin, B.-G. Teubner, 1910.

Nous avons à diverses reprises appelé l'attention de nos lecteurs sur le *Repertorium* que nous devons au savant professeur de l'Université de Naples. Il nous suffira donc de signaler cette nou-

velle édition d'une de ses parties les plus importantes qui, exécutée sous la direction de M. Paul Epstein, contient différents chapitres écrits par MM. H. Hahn, A. Lœwy, Timerding et P. Epstein.

J. G.

PASCAL (E.). — REPERTORIUM DER HÖHEREN MATHEMATIK, zweite völlig umgearbeitete Auflage der deutschen Ausgabe, unter Mitwirkung zahlreicher Mathematiker, herausgegeben von P. EPSTEIN et H.-E. TIMERDING. Zweiter Band : *Geometrie.* Zweite Auflage. Erste Hälfte : *Grundlagen und ebene Geometrie.* 1 volume in-8, XVI–534 pages. Leipzig et Berlin, B.-G. Teubner, 1910.

Il nous suffira de même de signaler cette nouvelle édition dont les différents chapitres ont été écrits, sous la direction de M. Timerding, par MM. J. Mollerup, H. Liebmann, Timerding, Heffter, Guareschi, Dehn, Dingeldey, Berzolari, Giraud, Ciani, Wreleitner et Liebman.

J. G.

GOURSAT. — COURS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE. Deuxième édition, t. I; 1 vol. grand in-8 de 645 pages. Paris, Gauthier-Villars.

Cette seconde édition présente des perfectionnements nombreux et très intéressants. La suppression de questions maintenant traitées dans les cours de Mathématiques spéciales (intégration des fractions rationnelles, courbure et développées des courbes planes...) a permis de n'augmenter que d'une trentaine de pages le premier Volume consacré tout entier aux fonctions de variables réelles. En dehors des additions, d'une sobriété voulue, qui introduisent des questions nouvelles (comme les équations intégrales indiquées sur un exemple, les déterminants d'ordre infini...), on verra, à chaque instant, une démonstration classique remplacée par une autre plus simple, ou plus intuitive, ou se rapportant à des hypothèses plus générales, et à propos des notions les plus abstraites et des discussions les plus minutieuses on retrouvera avec plaisir la précision rigoureuse des Livres de M. Goursat.

Au début de l'Ouvrage se trouvent maintenant réunies les

propriétés générales des fonctions continues ainsi que les notions empruntées à la théorie des Ensembles. On suppose que le lecteur connaît la définition des nombres irrationnels, la théorie des opérations algébriques et l'application des nombres à la mesure des grandeurs; mais on reprend en détail les définitions relatives aux Limites, aux Coupures, à la Borne supérieure, à la plus grande des limites d'un Ensemble, la Condition de Cauchy pour la convergence d'une suite infinie.

Après les généralités sur les fonctions continues et des exemples de discontinuité, on introduit les fonctions à *variation bornée* de M. Jordan et l'on établit que toute fonction continue à variation bornée est la différence de deux fonctions continues et croissantes. On donne une définition analytique précise d'une Courbe continue en écartant les cas compliqués comme ceux qui ont été signalés par M. Peano.

Pour la démonstration de la formule de Taylor, on part de la remarque à peu près évidente que la fonction de x

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)\ldots - \frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n} f^n(a)$$

admet a comme racine multiple d'ordre $n+1$; la fonction auxiliaire à laquelle on applique n fois le théorème de Rolle est la fonction de x

$$\varphi(x) - C(x-a)^{n+1},$$

C désignant une constante choisie de façon que la fonction auxiliaire s'annule pour $x = b$.

Dans le cas de deux variables, on donne, d'après une remarque de M. Hedrick, la formule

$$\begin{aligned} &f(x+h, y+k) - f(x, y) \\ &\quad = hf'_x(x+\theta h, y+k) + kf'_y(x, y+\theta k) \qquad (0 < \theta < 1), \end{aligned}$$

θ étant le même dans les deux termes.

La définition de la convergence uniforme d'une série dont les termes sont fonctions de x est analysée avec soin, justifiée par des exemples. On remarquera la façon naturelle dont M. Goursat établit l'existence de la dérivée d'une fonction définie par une série quand la série des dérivées est uniformément convergente;

la démonstration ne suppose pas que les dérivées des termes de la proposée sont des fonctions continues.

Le résultat relatif à la dérivée d'une série peut être énoncé sous la forme suivante (avantageuse en particulier pour les intégrales uniformément convergentes) : Si une fonction de x, $f(x, n)$, continue, admettant une dérivée $f'(x, n)$ dans un intervalle (a, b) tend vers une limite $F(x)$ quand l'entier n augmente indéfiniment et si la dérivée $f'(x, n)$ tend uniformément vers une limite $\Phi(x)$ dans le même intervalle, on a

$$F'(x) = \Phi(x).$$

La définition d'une intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ (au sens de Riemann) est rattachée, comme dans la première édition, aux sommes S et s de M. Darboux

$$S = M_1(x_1 - a) + \ldots + M_n(b - x_{n-1}),$$
$$s = m_1(x_1 - a) + \ldots + m_n(b - x_{n-1}),$$

M_i et m_i désignant la borne supérieure et la borne inférieure de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle partiel (x_{i-1}, x_i), mais en insistant davantage sur le rôle de ces sommes S et s : on montre d'abord que les sommes S et s tendent respectivement vers des limites I et I' quand le nombre des intervalles partiels augmente indéfiniment de façon que chacun d'eux tende vers zéro et la condition d'intégrabilité s'énonce ensuite : Pour que $f(x)$ soit intégrable dans l'intervalle (a, b), il faut et il suffit que, étant donné un nombre positif arbitraire ε, on puisse trouver une division de l'intervalle (a, b) telle que la différence $S - s$ soit inférieure à ε. Des simplifications ou des extensions sont indiquées dans des notes pour les démonstrations classiques sur ce sujet important.

L'aire d'une courbe plane est définie d'une façon très générale. On a montré qu'une courbe fermée sans point double divise le plan en deux régions, un *domaine intérieur* et une région extérieure. Attribuer une aire au domaine D revient à admettre le postulat suivant : Il existe un nombre, et un seul, qui est plus grand que tout nombre mesurant l'aire d'un domaine polygonal quelconque contenu dans D, et plus petit que tout nombre mesurant l'aire d'un domaine polygonal quelconque contenant D.

L'existence d'un nombre unique satisfaisant à ces deux conditions est établie rigoureusement dans l'hypothèse suivante : ε étant un nombre positif donné, on peut trouver un domaine polygonal P renfermant D et un autre domaine polygonal p contenu dans D, tels que la différence $A - a$ des aires de P et de p sont inférieure à ε. Pour les domaines définis d'une façon plus générale, on renvoie aux *Leçons sur les Théories générales de l'Analyse* de M. Baire.

Le calcul d'une intégrale double se ramène au calcul de deux intégrales simples prises successivement. La démonstration de ce théorème est simplifiée ici, pour le cas d'un champ quelconque, en considérant une fonction qui, dans un rectangle, admet des lignes de discontinuité tout en restant bornée.

Les propriétés des intégrales, à limite infinie, uniformément convergentes, sont déduites des propriétés des séries uniformément convergentes, mais à l'aide de théorèmes qui dispensent de former chaque fois une série auxiliaire. C'est de cette façon qu'on étend aux intégrales à limite infinie les règles de dérivation et d'intégration sous le signe $\int$.

Le Chapitre sur les séries entières a reçu des additions. L'existence de la dérivée d'une fonction représentée par une série entière résulte de théorèmes généraux sur la dérivation des séries. Il peut être commode, dans certains cours, d'avoir, pour établir cette existence, une démonstration directe et plus élémentaire; celle qui est donnée ici est à la fois très simple et très claire. C'est surtout pour les séries entières à plusieurs variables que des développements nouveaux ont été introduits, notamment à propos de la *région de convergence* d'une telle série.

A propos des séries trigonométriques la limite, pour n infini, de l'intégrale

$$J = \int_0^h \varphi(x) \frac{\sin n x}{x} dx$$

est obtenue plus simplement, par une application convenablement préparée du second théorème de la Moyenne.

On obtient *les conditions de Dirichlet* comme conditions suffisantes pour qu'une fonction soit développable en série de Fourier; puis on fait remarquer que ces conditions ne sont pas nécessaires; on en donne diverses extensions et l'on insiste sur le développement

d'une fonction en série de la forme

$$f(x) = A_0\varphi_0 + A_1\varphi_1 + \ldots + A_n\varphi_n + \ldots,$$

les A désignant des constantes et les fonctions φ des fonctions orthogonales dans un intervalle (a, b), c'est-à-dire satisfaisant aux conditions

$$\int_a^b \varphi_m\varphi_n\,dx = 0 \qquad (m \neq n).$$

Une application très simple est faite au cas où les fonctions φ_n sont les polynomes de Legendre.

Il s'en faut que j'aie signalé tous les perfectionnements introduits dans ce premier Volume. De plus, en prenant ainsi successivement les Chapitres, je n'ai pu donner l'idée de l'enchaînement des théories et de l'unité de l'ensemble qui s'aperçoivent encore mieux dans la nouvelle édition. Le second Volume de cette édition doit paraître prochainement; il sera sans doute suivi d'un troisième Volume consacré à des théories nouvelles, comme les équations intégrales. Ces deux Volumes sont attendus avec un intérêt qui se comprend bien. E. LACOUR.

BURALI-FORTI (C.) et MARCOLONGO (R.). — ÉLÉMENTS DE CALCUL VECTORIEL, avec de nombreuses applications à la Géométrie, à la Mécanique et à la Physique mathématique. Ouvrage traduit de l'italien par S. LATTÈS. 1 volume in-8, VII-229 pages. Paris, Hermann et fils, 1910.

L'édition italienne de ce livre ne remonte qu'à 1909; elle constitue le premier Traité italien sur la méthode vectorielle. Je ne connais guère de Livre français ayant pour objet cette méthode, dont personne ne conteste l'intérêt et l'utilité, dont les physiciens proclament la nécessité [1]; c'est dire que l'élégante traduction que

[1] Le *Bulletin* (1898, p. 230) signale toutefois le premier Volume d'un Livre de M. Nédela intitulé : *Le calcul vectoriel et ses applications en Mécanique*, que je ne vois pas figurer au Catalogue de M. Gauthier-Villars. La *Vektoranalysis* de Gibbs et Wilson (*Bulletin*, 1902, p. 21) est bien connue. Parmi les Ouvrages allemands, MM. Burali-Forti et Marcolongo signalent les *Elemente der Vectoranalysis* de M. Bücherer (*Bulletin*, 1906, p. 13), l'*Einführung in die Vectoranalysis* de M. Gans (*Bulletin*, 1905, p. 318; 1910, p. 36), les *Vorlesungen über die Vektorrechnung* de M. Jahnke (*Bulletin*, 1905, p. 318), la *Vektoranalysis* de M. Valentiner et celle de M. W. von Ignatowski (*Bulletin*, 1909, p. 252).

M. Lattès vient de donner de l'Ouvrage de MM. Burali-Forti et Marcolongo sera sûrement bien accueillie.

Le Livre est court; si l'on fait abstraction de l'Appendice et des Notes, mais en comprenant les diverses applications, il ne comporte que 173 pages; les démonstrations sont simples, elles sont assez détaillées pour être aisément suivies; quant aux applications, celles qui n'apprendront rien au lecteur le familiariseront avec la méthode et lui en montreront l'élégance, d'autres le convaincront que les éléments qu'introduit cette méthode sont vraiment dans la nature des choses.

Si la librairie française est pauvre en livres spécialement consacrés à l'Analyse vectorielle, celle-ci a cependant pénétré dans l'enseignement. Il n'y a guère d'étudiant ayant suivi, dans nos Universités, les cours d'Analyse et de Mécanique rationnelle qui ne sache (sans s'en douter) ce que sont un produit scalaire et un produit vectoriel, le gradient d'une fonction de point, le tourbillon ou la divergence d'un vecteur fonction de point et même, au moins dans certains cas, l'opération *nabla;* qui ne sache aussi les propositions fondamentales concernant ces objets; mais, le plus souvent, il ignore qu'il sait tout cela, parce qu'on n'a pas prononcé devant lui les noms que je viens de rappeler, qu'on ne lui a pas parlé de notations, qu'on a négligé quelques rapprochements désirables. Et si, en laissant de côté les objections que MM. Burali-Forti et Marcolongo apportent à cette définition, on lui disait qu'un quaternion est l'ensemble, soumis à certaines règles de calcul, d'un nombre et d'un vecteur, il n'aurait pas besoin de beaucoup plus d'un quart d'heure pour apprendre ces règles. Bien entendu, ce n'est pas à si bon compte que notre étudiant pénétrera dans la théorie des nombres complexes et deviendra habile à manier l'Analyse vectorielle.

C'est, dans bien des cas, ce défaut d'habileté, ce manque d'habitude à se servir d'un outil commode, qui le gênera davantage : le Livre de MM. Burali-Forti et Marcolongo lui rendra un signalé service en lui permettant d'acquérir cette précieuse habitude avec un minimun d'efforts.

Ces efforts trouveront d'ailleurs une récompense immédiate, dont il appréciera diversement le prix, suivant la tournure de son esprit ; je veux parler de la satisfaction qu'il éprouvera à savoir que l'analyse vectorielle est une branche autonome des Mathéma-

tiques, qu'on peut introduire directement, d'une façon fort simple, tous ces éléments qu'il faut bien, de toutes façons, reconnaître et distinguer, parce qu'ils sont dans la nature des choses, qu'ils se retrouvent dans les diverses parties des Mathématiques, que leur importance apparaît d'autant mieux qu'on pénètre davantage dans l'étude de la Géométrie, de la Mécanique ou de la Physique, parce qu'il est souvent avantageux de raisonner directement sur ces éléments, sans l'intermédiaire des coordonnées, et que leurs propriétés donnent la véritable raison de certaines transformations analytiques, qu'on risque, autrement, d'admirer sans les comprendre.

Je dois dire un mot du langage et des notations des auteurs. On sait que M. Burali-Forti attache, avec raison, la plus grande importance à la question des notations, et qu'il a quelque peu bataillé pour les siennes, dans les *Rendiconti* du Cercle de Palerme et dans l'*Enseignement mathématique*. Il serait assurément bien désirable qu'on en finît avec cette question des notations : j'inclinerais volontiers, pour ma part, vers celles de Gibbs [1]; mais il faut bien reconnaître qu'elles n'ont point pénétré en Allemagne, et puis, M. Burali-Forti voit, dans l'introduction du signe X pour indiquer le produit extérieur, un manque de respect à la mémoire de Grassmann qui se servait de ce signe pour indiquer le produit intérieur. Que les grands hommes sont donc encombrants, avec le respect qu'on leur doit après leur mort, d'autant qu'ils ont été plus méconnus pendant leur vie! M. Burali-Forti prendra donc le signe X avec la signification que lui a attribué Grassmann; c'est pour lui le signe Λ qui signifiera la multiplication extérieure. A part ce changement, ses façons d'écrire sont assez analogues à celles de Gibbs. En fait de mots nouveaux, je signale l'expression *rotationnel* pour signifier ce que les auteurs anglais et quelques auteurs allemands désignent par *curl* et la plupart des auteurs français, à la suite de M. Appell, par *tourbillon:* m'est avis que le mot *tourbillon* ayant à peu près droit de cité en France, MM. Burali-Forti et Marcolongo auraient bien pu autoriser M. Lattès à s'en servir.

Une règle sur laquelle il me semble bien facile de faire l'accord

---

[1] Voir *Bulletin*, 1902, p. 21.

est celle qui consiste à ne pas employer avec la même signification les mots *segment* et *vecteur :* dans le *vecteur,* il y a un *sens;* l'*origine* et l'*extrémité* ne jouent pas le même rôle; le mot *segment* n'implique aucunement l'idée de sens. Il y aurait grand bénéfice à faire pénétrer cette règle dans l'enseignement : en France, elle choquerait quelques habitudes, mais ce serait l'affaire de quelques années. Toutefois, à mon avis, on perdrait une grande partie de ce bénéfice à ne pas vouloir employer le mot *vecteur* toutes les fois qu'il s'agit d'une figure particulière, d'une portion de droite limitée par deux points à laquelle on attribue un sens déterminé, à ne pas vouloir regarder une force comme un vecteur, parce qu'une force a un point d'application. Très heureusement, à mon avis, les lecteurs français du livre de MM. Burali-Forti et Marcolongo, habitués depuis le lycée à appeler *vecteur* la figure (¹) formée par la portion de droite qui va d'un point déterminé A à un point déterminé B, après avoir lu une phrase qu'ils interpréteront en se disant qu'une telle figure se représente, d'après Grassmann, par la notation B — A, après avoir lu la définition de l'égalité de deux vecteurs, qu'ils connaissent déjà, ne s'arrêteront pas trop à cette formule « un vecteur est un élément géométrique abstrait caractérisé par les éléments géométriques concrets : longueur, direction et sens » ; ils se figureront qu'ils savent tout cela s'ils lisent la note de la page suivante, où les auteurs *démontrent* qu'un vecteur ne possède pas de position déterminée; après un petit moment d'étonnement, ils se diront que cela est en note, que cela n'a donc pas grande importance, qu'il vaut mieux passer outre, aller de l'avant, apprendre ce qu'ils ne savent pas: ce que faisant, ils auront l'occasion d'être très satisfaits.

La façon de penser de MM. Burali-Forti et Marcolongo, si je la comprends bien, est dominée par une manière d'envisager l'*égalité* qui me paraît trop étroite et sur laquelle je demande la permission de m'arrêter un peu.

On peut, disent-ils, donner avec Leibnitz un sens absolu et universel au signe $=$.

(¹) Si l'on adopte cette définition, il n'y a pas d'inconvénient à dire qu'un *vecteur* est un *segment* auquel on attribue un sens; c'est la définition *per genus et differentiam*.

(i). — « x, y étant des éléments quelconques, on a $x = y$ dans le seul cas où *toute propriété de x est aussi propriété de y.* »

Et, puisque une « propriété de x » peut toujours s'exprimer logiquement par l'affirmation « x est un élément d'une certaine classe u », l'énoncé précédent prend la forme :

(i). — « $x = y$ dans le seul cas où *toute classe u* qui contient x contient aussi y. »

Cela, et M. Burali y insiste avec raison, c'est la définition de *l'identité ;* mais je ne pense pas, comme il fait, que cette identité là soit l'égalité, telle qu'on la considère en Mathématiques. Au point de vue où il s'est placé, il ne peut y avoir deux objets *distincts* qui soient égaux, car s'ils sont distincts, c'est qu'il y a quelque propriété qui les distingue, qui n'est pas la même chez l'un et chez l'autre. Je crois bien que c'est là la façon de penser de M. Burali-Forti ; pour lui, il n'y a pas, à proprement parler, de vecteurs différents qui soient égaux ; il y a un seul et même vecteur, qui est *ce qu'il y a de commun* à ce que d'autres appellent *des vecteurs équipollents ;* c'est probablement ce qu'il entend en disant qu'un vecteur est *un élément géométrique abstrait* et ne peut avoir une position déterminée. Je n'insiste pas sur la sorte d'incorrection qu'il y a alors à parler de vecteurs (au pluriel) égaux ; mais je crois qu'il est inutile de créer cet élément géométrique abstrait, commun à toutes les figures particulières égales, qu'il est plus naturel de regarder l'égalité comme une propriété d'éléments concrets qui, tout en restant distincts, peuvent très bien être égaux ; et j'imagine que c'est ainsi que font la plupart des mathématiciens. L'identité est une notion dont il me semble impossible de sortir : je ne suis pas sûr qu'il soit permis de parler d'un objet qui reste identique à lui-même. En tant que je le considère à cet instant, est-il le même que lorsque je le considérerai au moment où je terminerai cette phrase? Devant la pure identité, il n'y a qu'à s'abîmer en silence. Au lieu de cette identité, de cette égalité absolue, il est parfaitement légitime, à mon avis, de considérer des égalités relatives, qui ne seront pas les mêmes relations, suivant les points de vue où l'on se placera : je trouve commode et conforme à la nature des choses de distinguer, comme le font certains auteurs, les vecteurs *libres* qu'on peut substituer les uns aux autres lorsqu'ils sont équipollents ;

les vecteurs *glissants* qu'on peut substituer les uns aux autres lorsqu'ils sont équipollents et portés par une même droite, les vecteurs qui ont un point d'application déterminé : suivant ces distinctions, il y aura, si l'on veut, trois sortes d'égalité, et cette égalité ne se réduira à l'identité que dans le dernier cas ; il suffit de prévenir et de s'entendre, et je crois inutile d'inventer à chaque fois un mot nouveau et un signe nouveau : on le fera si l'on craint quelque confusion. Contrairement à l'opinion de M. Burali-Forti, je regarde comme légitime d'envisager comme une sorte d'égalité toute relation clairement conçue ou définie, entre des objets distincts ou non, qui, pour employer son langage, est « réflexible, symétrique et transitive ». Et la similitude, dira-t-il? Mais sans doute, la similitude est, si l'on veut, une sorte d'égalité, et bien d'autres transformations encore, formant des groupes, sont des sortes d'égalité relativement aux propriétés qu'elles laissent invariantes. Suivant qu'il sera commode, on emploiera, ou non, le signe = pour désigner ces relations. Et qui n'emploie pas le mot *égal* avec des significations différentes? Qui tromperais-je en disant que deux vecteurs égaux (équipollents) sont deux figures géométriques égales (susceptibles de coïncider) mais que deux portions de droite qu'on doit regarder comme des figures égales parce qu'elles peuvent coïncider, ne sont pas pour cela des vecteurs égaux?

Je m'excuse de cette longue digression ; le sujet, sans doute, est intéressant, mais il n'importe guère, je l'ai déjà dit, à la valeur du Livre de MM. Burali-Forti et Marcolongo comme livre d'enseignement : il est seulement touché, puis un peu développé, dans deux notes, l'une au bas d'une des premières pages, l'autre à la fin du Livre ; ces deux notes m'ont donné le désir, auquel je me suis laissé aller, de dire ce que je pense ; mais elles ne sont nullement essentielles au corps de l'Ouvrage des savants italiens.

J'ai déjà dit qu'ils représentaient par la notation B — A le vecteur déterminé par les deux points A, B ; à ce point de vue, un vecteur apparaît comme la particularisation d'une de ces *formes géométriques*, dont on doit la considération à M. Peano, et qui tiennent un rôle essentiel dans cette intéressante *Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de Grassmann*,

que M. Burali-Forti nous a donnée il y a une douzaine d'années (¹).

Les auteurs reviennent, dans le Chapitre II, sur la forme du premier ordre dont l'étude revient à celle du calcul barycentrique de Möbius et, dans l'Appendice, sur la théorie générale (p. 180-198). L'Appendice contient aussi une dizaine de pages sur les quaternions.

L'Ouvrage est divisé en deux Parties : le titre de la première, *Opérations et fonctions vectorielles*, en dit assez l'objet ; la seconde Partie est consacrée aux applications : les trois premiers Chapitres comportent les applications les plus classiques à la Géométrie, au Calcul intégral, à la Mécanique ; je crois bon de donner tout au long la Table des matières des trois derniers Chapitres : elle donnera au lecteur quelque idée de l'utilité actuelle du Livre de MM. Burali-Forti et Marcolongo.

IV. *Applications à l'Hydrodynamique*. Équations de l'équilibre et du mouvement. Mouvement tourbillonnaire. Potentiel des vitesses.

V. *Applications à la théorie des corps élastiques isotropes*. Formules préliminaires. Formules de Betti pour la divergence et le rotationnel du déplacement. Formules de M. Somigliana.

VI. *Applications à l'Électrodynamique*. Potentiels retardés. Équations de Maxwell-Hertz, dans l'électrodynamique des corps au repos. Vecteur radiant et théorème de Poynting. Intégrales des équations de Hertz-Maxwell. Équations de Lorentz. J. T.

Sir WILLIAM THOMSON, baron KELVIN. — MATHEMATICAL AND PHYSICAL PAPERS, t. IV : *Hydrodynamics and general Dynamics*, arranged and revised with brief annotations by Sir Joseph LARMOR. 1 volume in-8, XVI-563 pages. Cambridge University Press, 1910.

Ce nouveau Volume des œuvres de lord Kelvin est un recueil de 84 Mémoires publiés depuis quarante ans et se rapportant à l'hydrodynamique, à la théorie des marées, à la théorie des ondes et à la Dynamique générale. Le nom de l'auteur, celui du savant si distingué et si compétent qui, sur l'invitation de lady Kelvin,

(¹) Paris, Gauthier-Villars et fils, 1897. *Voir* l'analyse détaillée que le *Bulletin* en a donnée (t. XXII, 1898, p. 231).

s'est chargé des travaux de coordination, de classement et d'annotation, nous dispensent d'insister beaucoup sur l'intérêt présenté par ce nouveau Volume, qui contient quelques-uns des Mémoires les plus originaux et les plus suggestifs de l'illustre physicien mathématicien. On nous annonce, et nous accueillerons avec joie, un cinquième Volume qui traitera de la thermodynamique, de la physique cosmique et géologique, de l'électrodynamique et de l'électrolyse, de la théorie moléculaire et cristalline, de la radioactivité et de la théorie des électrons. S'il est traité avec autant de soin que les Volumes précédents, il sera encore le bienvenu.

G. D.

GINO LORIA. — SPEZIELLE ALGEBRAISCHE UND TRANSZENDENTE EBENE KURVEN. THEORIE UND GESCHICHTE. Autorisierte nach dem italienischen manuskript bearbeitete deustche Ausgabe von F. SCHÜTTE. Erster Band : *Die Algebraischen Kurven.* 1 volume in-8, XXVIII–488 pages, avec 14 planches. Leipzig et Berlin, B.-G. Teubner, 1910.

En 1903, nous signalions, avec tous les éloges qu'elle mérite, la première édition de cet Ouvrage qui venait combler une véritable lacune. Dans le court espace de temps qui s'est écoulé depuis, aucune découverte fondamentale n'est venue nécessiter un remaniement complet de l'exposition. Mais les auteurs ont cru bon de la partager en deux Volumes, et ils nous donnent aujourd'hui le premier, consacré à la théorie des courbes algébriques. Bien des améliorations de détail ont été pourtant apportées au texte primitif. Les plus importantes se rapportent aux courbes du cinquième ordre, un peu négligées dans la première édition. Sous sa forme nouvelle, l'excellent livre de M. Gino Loria continuera à rendre tous les services qu'en attendait le public mathématicien.

J. G.

STURM (Ch.). — Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, revu et corrigé par *Émile Prouhet* et augmenté de la Théorie élémentaire des fonctions elliptiques par *H. Laurent*. 14e édition revue et mise au courant du nouveau programme de la licence par *A. de Saint Germain*. 2 volumes in-8, xxii-564 pages et x-657 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

Rajeuni et mis au point par M. de Saint-Germain, le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* poursuit sa marche triomphale et voit chaque année augmenter le nombre de ses éditions. En 1888, nous rendions compte de la neuvième édition. Nous voici arrivés à la quatorzième. Un tel succès dispense de toute analyse. Certes, on ne trouve pas dans le Traité de Sturm certaines théories auquelles les modernes attachent beaucoup d'importance, peut-être parce qu'elles sont récentes; mais par sa clarté, par sa simplicité attirante, un tel Livre est de nature à augmenter, pour le grand profit de la Science, le nombre des adeptes du Calcul infinitésimal. Nous nous sommes laissé dire que Foucault, à qui l'on doit tant de belles découvertes mécaniques inspirées par la plus fine Géométrie, avait voulu s'en tenir, pour toutes ses connaissances mathématiques, au vieux Traité de Lacroix. Qu'aurait-ce été si, comme il arrive ici, ce vieux Traité avait été rajeuni par un professeur clair, éprouvé et solide tel que M. de Saint-Germain! G. J.

BIANCHI (Luigi). — Lezioni di Geometria differenziale. Vol. III : *Theoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche*. 1 volume in-8, v-351 pages. Pise, E. Spoerri, 1909.

Ce Volume, que l'auteur publie comme un complément à ses *Lezioni di Geometria differenziale*, est consacré tout entier à l'étude des surfaces applicables sur la surface générale du second degré. Il contient une exposition, à la fois simplifiée et complétée, des belles recherches que l'auteur a présentées à l'Académie des Sciences, qui ont été couronnées par elle et insérées dans le Tome XXXIV des *Mémoires des savants étrangers*.

Cette question des surfaces applicables sur les quadriques

générales a été posée peu à peu. L'étude des surfaces à courbure constante se confond avec celle des surfaces applicables sur une quadrique particulière, la sphère, réelle ou imaginaire ; après que les travaux de M. Darboux ont fait connaître toutes les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution et sur certains paraboloïdes ayant des relations particulières avec le cercle de l'infini, le problème des surfaces applicables sur des quadriques a été envisagé dans toute sa généralité. On connaît les importants travaux que MM. Guichard et Bianchi ont publiés successivement sur ce beau sujet d'étude. Il est difficile, et l'équation aux dérivées partielles dont il dépend n'a pu être intégrée dans toute sa généralité. Mais ici, comme dans beaucoup d'autres théories de la géométrie infinitésimale, on a pu constituer des méthodes de récurrence qui, lorsqu'on connaît une solution particulière, permettent d'en déduire une infinité de solutions nouvelles. Chez M. Guichard et chez M. Bianchi, ces méthodes se présentent sous une forme tout à fait différente. Chez M. Bianchi, elles sont de nature à mettre en évidence un fait qui a un grand intérêt philosophique, en associant dans la même recherche la Géométrie infinitésimale et la Géométrie analytique, les propriétés des surfaces homofocales et celles des transformations des surfaces applicables sur les quadriques. Ici, comme en Analyse, ce sont les imaginaires, franchement introduites, qui éclairent toute la théorie.

J. G.

CZUBER (E.). — **Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung Statistik und Lebensversicherung.** Zweite Aufläge in zwei Bänden. Erster Band. *Wahrscheinlichkeitstheorie*, *Fehlerausgleichung*, *Kollektivmasslehre*. 1 volume in-8, x-410 pages. avec 18 figures, 1908. — Zweiter Band : *Mathematische Statistik. Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung*. 1 volume in-8. x-468 pages avec 34 figures. Leipzig et Berlin, B.-G. Teubner, 1910.

En 1903, nous rendions compte de l'Ouvrage si intéressant de M. Czuber. Bien accueilli à la fois par les géomètres et par les techniciens, ce Traité a été promptement épuisé. La nouvelle édition que nous présente l'infatigable éditeur de Leipzig sera accueillie avec grande faveur. Comme la précédente, elle se distingue par

le soin tout particulier avec lequel l'auteur a su allier à la théorie pure les applications les plus essentielles du Calcul des probabilités. Quelques-unes d'entre elles ont reçu dans la nouvelle exposition des développements étendus sur lesquels il convient d'appeler l'attention de nos lecteurs. **D. J.**

BARBETTE (E.). — Les sommes de p puissances distinctes égales a une $p^{\text{ième}}$ puissance. In-4, XII-154 pages. Liége, Vaillant-Carmanne et Gnuse, 1910.

Nous ferons connaître suffisamment l'objet de cet opuscule en donnant la liste des sujets traités par l'auteur et sur lesquels il apporte fréquemment des vues originales.

Sommation des puissances semblables des x premiers nombres entiers. — Les sommes de nombres distincts égales à un nombre; forme générale des nombres composés; décomposition des nombres en facteurs; méthodes par soustraction, par division, par extraction des racines. — Les sommes de carrés distincts égales à un carré, résolution de l'équation $y^2 + z^2 = x^2$; identités magiques. Les sommes de p^{iemes} puissances distinctes égales à une $p^{\text{ième}}$ puissance; les cubes, les quatrièmes puissances, les cinquièmes puissances. — Les nombres polygonaux, les sommes de p^{iemes} puissances distinctes de n nombres polygonaux de n côtés égales à une $p^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre polygonal de n côtés. — Sommation des puissances semblables des x premiers nombres polygonaux de n côtés. — Table des 5000 premiers nombres triangulaires. J. G.

COMBEBIAC (G.). — Les actions a distance. 1 volume de la Collection *Scientia*, 88 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Les lignes suivantes, que nous extrayons de l'Avertissement, donneront au lecteur une idée juste de ce qu'a voulu faire l'auteur :

« L'Analyse mathématique a obtenu, dans l'étude des actions exercées par les fluides en mouvement, certains résultats particu-

lièrement simples et susceptibles de fournir tout au moins des indications très suggestives ; ces questions ont fait l'objet de travaux mathématiques publiés à l'étranger, mais qui n'ont pas été traduits en français. Cet Ouvrage a pour objet d'exposer le bilan de ces résultats en les établissant par les moyens les plus directs. Leur intérêt ne peut que s'accroître au moment où l'Électromagnétisme semble promettre de projeter quelque clarté sur les propriétés intimes de la matière.

» Les problèmes traités se rapportent aux actions qui s'exercent, par l'intermédiaire d'un fluide incompressible, entre des sphères pulsantes ou animées de mouvements de translation, entre des corpuscules compressibles et entre des anneaux infiniment déliés. On trouvera également une discussion des analogies et des divergences qui existent entre certains phénomènes hydrodynamiques et les faits principaux de l'Électrodynamique et enfin quelques considérations sur les effets de l'élasticité des fluides. »

L'auteur a employé systématiquement les notations tirées de l'Analyse vectorielle ou de la théorie des quaternions. Trois pages lui ont suffi pour expliquer ces notations. J. T.

MÉLANGES.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. CARRUS.

M. Haag, dans le numéro d'avril 1910 du *Bulletin des Sciences mathématiques*, à propos d'une démonstration de Joseph Bertrand, cite une proposition qui serait erronée d'un Mémoire que j'ai fait paraître dans le *Journal de l'École Polytechnique*.

Je pensais que M. Haag aurait fait état des observations suivantes répondant aux remarques qu'il m'avait soumises :

Ma conclusion relative aux périsphères de M. L. Lévy n'était pas absolue et était soumise aux restrictions faites au début de ma démonstration : hypothèse d'une normale à la surface parallèle à la translation.

J'ajoutai que si mon attention avait été attirée du côté des trajectoires singulières signalées par M. Haag (cas qui a échappé à J. Bertrand et à bien d'autres ensuite qui ont employé le même mode de démonstration et utilisé les mêmes conclusions), j'aurais indiqué qu'il fallait admettre encore que la trajectoire considérée ne fût pas une trajectoire singulière. Cela *revient tout simplement à supposer que le point d'incidence de la normale est un point ordinaire de la surface considérée.*

Dans ce cas, en effet, il est impossible de rien tenter contre le raisonnement suivant : Si MN est la direction de la translation, la surface ρ_1 qui passe par une ligne de courbure C et qui doit couper orthogonalement la surface ρ, contient l'élément de normale MM_1 à la surface ρ. Au point M_1 la surface ρ_1 passe par la nouvelle position de C et doit couper orthogonalement la nouvelle surface ρ (déduite de la précédente par simple translation MM_1). La normale en M_1 étant encore MN, cette même surface ρ_1 contient l'élément de normale $M_1 M_2$ de MN, et ainsi de suite. *La surface* ρ_1 *contient la normale* MN *tout entière.*

L'exemple que M. Haag indique sur les arêtes de rebroussement des développables engendrées par les normales à une même surface ne porte alors pas. Si, pour simplifier les vues, on prend les courbes parallèles à une courbe donnée, elles admettent comme trajectoires ordinaires les droites normales à toutes les courbes. Elles admettent bien comme trajectoire singulière la courbe enveloppe de ces normales, mais cette courbe est le lieu des points de rebroussement de toutes les courbes parallèles : elle ne passe donc que par des points singuliers des courbes données.

En résumé, il eût suffi que j'ajoute au début de ma démonstration les mots suivants *en italique :* « Supposons qu'on puisse mener à la surface une normale parallèle à la direction de la translation *et que le point d'incidence soit un point ordinaire de la surface....* »

Je conviens d'ailleurs que ces restrictions auraient réduit la portée de ma conclusion et que bien des cas pouvaient alors lui échapper.

S. Carrus.

1re p.-tie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

NATORP (P.). — Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. 1 volume in-16, xx-416 pages. Leipzig, Teubner, 1910. (Collection *Wissenschaft und Hypothese*).

Le Livre de M. Natorp est un Livre de pure philosophie : on me pardonnera donc si je me borne à l'annoncer. Les sujets que traite l'auteur, d'une façon savante et élevée, avec de nombreux renseignements historiques et bibliographiques, sont d'ailleurs de ceux qui intéressent essentiellement les mathématiciens : ils trouveront dans ce Livre des études critiques sur les idées de quantité, de qualité, de modalité; sur le nombre et le calcul, l'infini et la continuité, le temps et l'espace, la substance et l'énergie, la masse, la conservation de l'énergie et de la masse; sur la doctrine de M. Lorentz, etc.

L'Ouvrage de M. Paul Natorp est le Tome XII d'une très intéressante collection que publie la maison Teubner sous le titre *Wissenschaft und Hypothese*. Le premier Volume paru dans cette collection est la traduction de *La Science et l'Hypothèse* de M. H. Poincaré, qui se trouve avoir ainsi donné son nom à toute la collection. Il est à peine utile de dire que ce Volume est suivi de la traduction de *La Valeur de la Science* et qu'il sera suivi de *Science et Méthode*. On a traduit aussi *Science et Religion* de M. Émile Boutroux.

Parmi les Livres de cette collection qui intéressent particulièrement les mathématiciens, je citerai la seconde édition du Livre bien connu de M. Max Planck sur le *Principe de la conservation de l'énergie*, l'étude critique et historique de M. Bonoler sur la *Géométrie non euclidienne*, le *Flux et le Reflux*, les *Phénomènes analogues du système solaire* de M. G.-H. Darwin, les *Fondements de la Géométrie* de M. Hilbert, les *Problèmes de la Science* de M. Enriques.

J. T.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Édition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande, sous la direction de *Jules Molk*. Paris, Gauthier-Villars; Leipzig, Teubner.

Le *Bulletin* a parlé à plusieurs reprises de l'édition française de l'Encyclopédie. A mesure que la publication s'avance on est frappé de ce qu'ont fait les savants français pour compléter et tenir au courant l'œuvre entreprise par tous ceux qui ont collaboré à l'édition allemande. Cette publication marche maintenant avec rapidité ; M. Jules Molk verra la récompense de la peine qu'il se donne. L'impression des trois Tomes consacrés aux Mathématiques pures est très avancée, puisque, même pour le troisième, les éditeurs commencent à tirer les bonnes feuilles. Celle des quatre Volumes qui forment le Tome I est presque terminée. Je rappelle les matières traitées dans ce Tome I et les noms des collaborateurs :

Le Volume I, consacré à l'Arithmétique, contient les articles suivants : *Principes fondamentaux de l'Arithmétique*, exposé d'après M. Schubert, par J. Tannery et J. Molk ; *Analyse combinatoire et théorie des déterminants*, exposé d'après E. Netto, par H. Vogt ; *Nombres irrationnels et limites*, *Algorithmes illimités*, exposé d'après A. Pringsheim, par J. Molk ; *Nombres complexes*, exposé d'après J. Study, par E. Cartan ; *Algorithmes illimités des nombres complexes*, exposé d'après A. Pringsheim, par M. Fréchet ; *Théorie des ensembles*, exposé d'après A. Schœnfliess, par R. Baire ; *Sur les groupes finis discontinus*, exposé d'après H. Burkhardt, par Vogt. Ce Volume contiendra plus de 600 pages, on achève l'impression du dernier article.

Le Volume II est consacré à l'Algèbre. L'article de M. Netto, *Sur les fonctions rationnelles*, exposé par M. Le Vavasseur, avec la collaboration de MM. J. Kürschak, J. Molk et H. Vogt, est terminé ; l'impression de l'article de M. G. Landsberg, *Propriétés générales des corps et des variétés algébriques*, exposé par M. Kürschak, s'achève ; 21 feuilles de ce Volume sont tirées.

Le Volume III (*Théorie des Nombres*) contient les deux articles suivants, entièrement terminés : *Propositions élémen-*

taires de la théorie des nombres, exposé d'après P. Bachmann, par Ed. Maillet; *Théorie arithmétique des formes*, d'après K. Th. Vahlen, par E. Cahen.

Le Volume IV (*Calcul des probabilités, théorie des erreurs, applications diverses*) contient les articles suivants : *Calcul des probabilités*, exposé d'après E. Czuber, par J. Le Roux; *Calcul des différences et interpolation*, exposé d'après D. Selivanof et J. Bauschinger, par H. Andoyer; *Théorie des erreurs*, d'après J. Bauschinger, par H. Andoyer; *Calcul numérique*, d'après H. Mehmke, par M. d'Ocagne; *Statistique*, exposé d'après L. Bortkiewicz, par F. Oltramare. L'impression du dernier article s'achève; 30 feuilles du Volume sont tirées.

Passons au Tome II, consacré à l'Analyse. Il contiendra cinq Volumes.

Le premier article du Volume I : *Principes fondamentaux de la théorie des fonctions*, exposé d'après A. Pringsheim, par J. Molk, est terminé.

Quatre feuilles du premier article du Volume II : *Analyse algébrique*, exposé d'après A. Pringsheim et G. Faber, par J. Molk, sont tirées.

Dans le Volume III, l'article de M. Painlevé : *Existence de l'intégrale générale, détermination d'une intégrale particulière par ses valeurs initiales*, est entièrement paru; celui de M. Vessiot : *Méthodes d'intégration élémentaires, étude des équations différentielles ordinaires au point de vue formel*, s'achève.

Quatre feuilles sont tirées de l'article de M. Pincherle, *Sur les équations et opérations fonctionnelles*, qui commencera le Volume V.

Un article de M. Enriques, *Sur les principes de la Géométrie*, ouvrira le Volume I du Tome III. Quatre feuilles sont déjà tirées.

Je puis ajouter que le travail relatif aux Volumes consacrés à la Mécanique, à l'Astronomie, à la Physique mathématique est vivement poussé. De nombreux articles sont en placard. Il y a là, de la part des éditeurs, des savants qui collaborent à cette œuvre considérable, de M. Molk qui prépare tout, un effort méritoire : leur récompense, à tous, sera dans la certitude qu'ils auront d'avoir contribué à la constitution, au développement, à la diffusion de la

Science mathématique et d'avoir apporté une aide incomparable à tous ceux qui voudront, soit étudier à fond un point particulier, soit acquérir des vues d'ensemble qui permettent les rapprochement féconds et les progrès ultérieurs. J. T.

Annuaire pour l'an 1911 publié par le Bureau des Longitudes *avec des Notices scientifiques*. 1 volume in-18, VII-641 pages. Notices A : 29 p., B : 18 p., C : 13 p., D : 11 p., E : 51 p. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

Le Bureau des Longitudes, institué par la Convention nationale (loi du 7 messidor an III; 25 juin 1795), se compose de treize membres titulaires, savoir : trois membres de l'Académie des Sciences, cinq astronomes, trois membres appartenant au département de la Marine, un membre appartenant au département de la Guerre, un géographe; d'un artiste ayant rang de titulaire; de trois membres en service extraordinaire; d'un membre adjoint et de deux artistes adjoints. En outre, vingt correspondants sont institués près du Bureau des Longitudes, dont douze peuvent être choisis parmi les savants étrangers. (Décrets des 15 mars 1874, 30 avril 1889 et 14 mars 1890).

Son bureau, nommé chaque année par décret du Président de la République, se compose d'un président, d'un vice-président et d'un secrétaire, choisis parmi ses membres titulaires.

Le Bureau des Longitudes rédige et publie, annuellement et trois années à l'avance, la *Connaissance des Temps*, à l'usage des astronomes et des navigateurs, et, depuis 1889, un *Extrait* de la Connaissance des Temps à l'usage des écoles d'hydrographie et des marins de commerce. Il rédige, en outre, des *Annales* ainsi qu'un *Annuaire* qui, aux termes de l'article IX de son règlement, doit être « propre à régler ceux de toute la République ».

Il est institué en vue du perfectionnement des diverses branches de la Science astronomique et de leurs applications à la Géographie, à la Navigation et à la Physique du globe, ce qui comprend : 1° les améliorations à introduire dans la construction des instruments astronomiques et dans les méthodes d'observation, soit à terre, soit à la mer ; 2° la rédaction des instructions concernant les

études sur l'Astronomie physique, sur les marées et sur le magnétisme terrestre; 3° l'indication et la préparation des missions jugées par le Bureau utiles au progrès des connaissances actuelles sur la figure de la Terre, la Physique du globe ou l'Astronomie; 4° l'avancement des théories de la Mécanique céleste et de leurs applications; le perfectionnement des Tables du Soleil, de la Lune et des planètes; 5° la rédaction et la publication, dans ses *Annales*, des observations astronomiques importantes, communiquées au Bureau par les voyageurs, astronomes, géographes et marins.

Sur la demande du Gouvernement, le Bureau des Longitudes donne son avis : 1° sur les questions concernant l'organisation et le service des observatoires existants, ainsi que sur la fondation de nouveaux observatoires; 2° sur les missions scientifiques confiées aux navigateurs chargés d'expéditions lointaines.

L'*Annuaire*, dont la publication rentre dans les attributions du Bureau des Longitudes, parut, pour la première fois, en 1796; il se rapportait à l'an V (1796-1797).

Depuis 1900, toutes les dates et heures sont exprimées en temps civil moyen compté de 0^h à 24^h à partir de minuit; la concordance avec l'ancienne division est indiquée sur une Table imprimée sur papier bleu en tête de l'*Annaire*.

Conformément aux nouvelles dispositions adoptées en 1904, le présent *Annuaire* contient des Tableaux détaillés relatifs à la Métrologie, aux Monnaies, à la Géographie et à la Statistique, ainsi qu'à la Météorologie, et ne contient pas en revanche de données physiques et chimiques. Ce sera le contraire pour l'*Annuaire de* 1912, qui donnera les Tableaux se rapportant à la Physique et à la Chimie, mais ne contiendra pas ceux relatifs à la Géographie et Statistique, etc., figurant dans le présent Volume. La même alternance sera observée les années suivantes.

Partie astronomique. — En vertu du même principe, on a inséré, dans le présent *Annuaire*, les Tables pour le calcul des altitudes par le baromètre, les parallaxes stellaires, les étoiles doubles dont l'orbite a été calculée, les étoiles doubles spectroscopiques, les mouvements propres, et enfin la spectroscopie stellaire, que M. de Gramont a remaniée entièrement. Mais on a supprimé les cadrans solaires, la physique solaire et le Tableau des petites planètes; toutes ces matières seront développées en 1912.

Les éléments des grosses planètes et ceux de la Lune ont été ramenés à 1900; on a ajouté les termes séculaires. M. Schulhof a donné une Note très détaillée sur les comètes apparues en 1909 et en particulier sur la comète de Halley. Mais il a fallu renoncer à continuer les Tableaux relatifs aux étoiles variables, dont le nombre s'accroît d'une manière trop rapide.

Partie géographique et statistique. — MM. Levasseur et March ont mis à jour l'ensemble des Tableaux se rapportant à la géographie statistique, dont les données, puisées en grande partie aux sources officielles les plus récentes, offrent un résumé aussi exact que possible de la géographie statistique des divers pays. Le Tableau des positions géographiques contient maintenant tous les chefs-lieux d'États ou de gouvernements. On a ajouté, pour l'Europe : 1° la population par âge et par sexe des différents États pour 1900; 2° un Tableau des naissances, mariages et décès pour 1900. Dans la partie réservée à la France, il a été ajouté : 1° un Tableau de la superficie et de la population depuis 1801; 2° le mouvement de la population depuis 1801; 3° la population par âge et par sexe d'après les recensements de 1851 à 1901. On y trouve aussi le mouvement de la population de l'Algérie et de la Tunisie, et la progression de la population des villes d'Algérie.

Monnaies. Poids et Mesures. — La partie relative aux monnaies a été refondue par M. Rocques-Desvallées. Les Tableaux ont été revus et tenus à jour.

Dans la Métrologie, on trouvera les poids et mesures du Japon et ceux de la Chine (décret du 29 août 1908). Il a été ajouté aussi une Note sur le *carat métrique*, obligatoire en France à partir du 1er janvier 1911.

Météorologie. — On a ajouté deux Tableaux : 1° température mensuelle à Paris de 1851 à 1910; 2° hauteur mensuelle de la pluie tombée à Paris de 1851 à 1910.

Notices. — *Note sur la XVIe Conférence de l'Association géodésique internationale*, par M. H. Poincaré.

L'éclipse de Soleil du 17 avril 1912, par M. G. Bigourdan.

Notice nécrologique sur M. Bouquet de la Grye, par M. H. Poincaré.

Discours prononcés par MM. Poincaré et Baillaud aux funérailles de M. P. Gautier. J. G.

THIELE (Dr T.-N.). — INTERPOLATIONSRECHNUNG. In-4°, XII-175 pages. Leipzig, B.-G. Teubner, 1909.

Les applications numériques des Mathématiques, tant dans la théorie des assurances que dans le calcul astronomique, furent l'objet des travaux du regretté professeur danois. Ce dernier Livre consacre quelque deux cents pages à un sujet essentiel sur lequel il a été peu écrit; et pourtant, au point de vue arithmétique, le calcul d'interpolation occupe une place analogue à celle de la Trigonométrie aux côtés de la Géométrie.

Interpoler, comme le dit Thiele, c'est lire entre les lignes d'un tableau numérique. Plusieurs versions seraient possibles; mais des conditions, qu'impose la nature des choses, permettent de fixer des règles précises qui mènent au but. L'Ouvrage se divise en quatre Parties, substantielles, fournies d'exemples et de schémas.

I. Les Livres où l'on traite de l'interpolation se bornent en général à considérer des arguments en progression arithmétique. C'est alors les différences de la fonction qui interviennent. Thiele introduit systématiquement les *différences divisées* (dividirte Differenzen), $\frac{A-B}{a-b}$, A et B étant les mêmes fonctions d'arguments quelconques a et b. On est ainsi conduit à la formule de Newton, avec son *reste*, qui est la base du calcul d'interpolation. Les arguments sont-ils égaux, c'est l'apparition des dérivées, puis la formule de Taylor. La résolution des équations algébriques, l'intégration d'équations du second ordre s'effectuent au moyen de tableaux à arguments quelconques; et cela justifie la considération des *différences divisées*. D'ailleurs la marche des différences dans les tableaux à arguments équidistants oblige à resserrer l'intervalle

à de certaines places, et il y a intérêt à savoir former un schéma unique convenant à toute l'étendue du calcul.

Les erreurs des données étant connues, l'auteur détermine l'erreur du résultat de l'interpolation, ainsi que l'ordre des différences auquel il convient d'arrêter les opérations. Mais bien que les *différences divisées* d'aucun ordre ne soient constantes, on a dû négliger dans la confection du tableau le *reste* de la formule de Newton; l'influence du *reste* impose l'étude de la convergence des séries d'interpolation, convergence de calculateur qui n'est point la convergence du géomètre, et sur laquelle on revient à la fin du Livre. Enfin il y a lieu de s'occuper de l'unicité de la solution tirée d'un tableau, question que l'auteur ramène à l'étude de la convergence d'une certaine série. L'application à la fonction exponentielle des principes établis précédemment illustre la théorie.

II. La seconde Partie est consacrée au calcul symbolique. Le point de départ est le symbole E^n dont le sens se traduit par l'égalité

$$E^n \circ f(x) = f(x + n).$$

L'auteur définit les opérations arithmétiques auxquelles se soumettent ces symboles ainsi que certaines fonctions de ces symboles. On trouve en ces pages, sous une écriture condensée, de nombreuses formules de calcul. C'est assurément la partie la plus originale et la plus profonde de l'Ouvrage, et l'on sent que Thiele a pris plaisir à l'écrire. Le plaisir du lecteur ne va pas sans un peu de peine, car il se trouve en présence d'une abondance de signes nouveaux, combinaisons de traits, de cercles, de carrés, de triangles.

III. La représentation de Newton, faite pour les fonctions rationnelles entières, s'est étendue aux séries convergentes. Mais elle ne satisfait pas à certains tableaux numériques dans les limites duquel se trouveraient des arguments, pôles de la fonction.

Pourtant la formule de Newton est si commode, qu'il ne faut l'abandonner qu'à toute extrémité; et Thiele expose les artifices qu'il convient d'employer pour assujettir les données à entrer dans son cadre : diminution de l'intervalle des arguments, changement

de variable, changement de fonction. Mais si la forme analytique de la fonction à interpoler est totalement inconnue, tous ces moyens peuvent échouer et l'on s'adresse alors à un procédé d'une grande souplesse sinon d'une grande précision : l'*interpolation graphique*.

Parallèlement à une théorie de l'interpolation fondée sur la notion de *différence divisée* $\frac{A-B}{a-b}$, l'auteur en bâtit une ayant pour matériaux les *différences réciproques* (reziproke Differenzen), $\frac{a-b}{A-B}$. Les différences des divers ordres se mettent sous forme de quotients de déterminants. L'interpolation par cette méthode conduit aux fractions continues ; elle convient aux fractions rationnelles comme la formule de Newton satisfait aux fonctions entières.

IV. L'interpolation des fonctions de plusieurs variables présente de grandes difficultés. On s'impose des conditions restrictives et l'on tente de ramener le problème à une suite d'interpolations à une variable. Si la fonction est du $n^{\text{ième}}$ degré relativement à chacune des r variables, la solution exigera

$$\frac{1}{n}\left[(1+n)^r-1\right]$$

interpolations simples. Le cas de deux variables entrant au second degré est traité par le calcul et par une représentation graphique.

Enfin on trouve un mode d'interpolation du second degré applicable aux courbes isobares et aux cartes météorologiques.

L'Ouvrage se termine par l'indication des procédés qui permettent d'augmenter la convergence des séries, à savoir les méthodes de multiplication et de soustraction.

Ce rapide aperçu montre la richesse de ce Livre où, sans perdre de vue les exigences de la pratique, l'auteur n'a pas omis la rigueur du raisonnement.

Armand Lambert.

LEROY. — TRAITÉ DE STÉRÉOTOMIE, comprenant les *Applications de la Géométrie descriptive à la Théorie des ombres, la Perspective linéaire, la Gnomonique, la Coupe des pierres et la Charpente*. Revu et annoté par *E. Martelet*, ancien Élève de l'École Polytechnique, Professeur de Géométrie descriptive à l'École centrale des Arts et Manufactures. Douzième édition, augmentée d'un Supplément : *Théorie et construction de l'Appareil hélicoïdal des arches biaises*, par *J. de la Gournerie*, rédigée par *Ernest Lebon*, Agrégé de l'Université, Professeur honoraire du Lycée Charlemagne. Un volume in-4 de xvi-396-32 p., avec un Atlas in-folio de 76 planches gravées sur cuivre. Quatorzième édition. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Leroy a publié son *Traité de Stéréotomie* en 1844. Cet Ouvrage a été revu et annoté par E. Martelet, en 1862; il a été complété en 1886 par M. Ernest Lebon, d'après les manuscrits et les cours de Jules de la Gournerie. Comme le succès de ce Livre classique s'est toujours maintenu depuis son apparition, il suffit de quelques lignes pour signaler la 14e édition qui vient de paraître.

Les procédés employés par les appareilleurs et par les charpentiers sont actuellement les mêmes qu'autrefois, mais on les explique plus simplement depuis que Monge a fait dépendre d'une même science, qu'il a nommée *Géométrie descriptive*, les constructions graphiques employées dans les arts et fondées sur la méthode des projections orthogonales. En exposant les constructions de la Stéréotomie d'après les principes de cette science, Leroy est arrivé à composer un Traité dont la principale qualité est d'être tout à fait à la portée de ceux qui sont chargés de la construction des Ouvrages d'art en pierre et en bois.

Dans le Livre IV, intitulé *Coupe des pierres*, l'auteur commence par les questions les plus simples, qui sont précisément les plus appliquées, telle que la taille des pierres des murs et des plates-bandes, celle des voussoirs des berceaux et des portes; il s'est ensuite longuement occupé de la construction des voûtes simples, des voûtes qui se croisent, des descentes et des trompes; enfin il a exposé amplement la construction des escaliers en pierre, soit rampants, soit en vis Saint-Gilles.

Dans le Livre V, intitulé *De la Charpente*, Leroy explique tout ce qui se rapporte aux assemblages, combles, fermes, croupe droite, croupe biaise, noues, pannes et tasseaux; il termine par

les épures de l'escalier en bois le plus employé, dit *courbe rampante*.

Les trois premiers Livres sont consacrés à l'application de la Géométrie descriptive, soit à la construction des Ombres, soit à la Perspective linéaire, soit à la Gnomonique. Dans les arts du dessin, on est souvent obligé de recourir aux théories et constructions que contient le Livre I.

Cet Ouvrage comprend un magnifique Atlas in-folio de 76 planches gravées sur cuivre, où les figures sont grandes et très nettes.

Il manquait à ce *Traité* un Chapitre sur les Arches biaises hélicoïdales. Cette lacune a été comblée par M. Jules de la Gournerie, qui avait en Stéréotomie une haute compétence. Ce savant a publié, sur la question, si importante et toute moderne, des arches biaises, plusieurs beaux Mémoires dont les résultats sont acceptés et appliqués. L'état chancelant de sa santé, pendant les deux dernières années de sa vie, l'a empêché de rédiger lui-même un travail relatif aux arches biaises hélicoïdales, qui, par suite d'une convention passée avec M. Gauthier-Villars, devait compléter l'excellent *Traité de Stéréotomie* de Leroy.

Lorsque j'ai eu l'honneur de remplacer Jules de la Gournerie dans sa chaire du Conservatoire des Arts et Métiers (de 1881 à 1883), j'ai composé, d'après les feuilles lithographiées de son cours à l'École Polytechnique, et surtout d'après le cours qu'il avait professé en 1880 au Conservatoire des Arts et Métiers et que j'y avais moi-même professé en 1882-1883, le manuscrit qu'il désirait préparer.

Le travail que j'ai présenté au public en 1886, sous le titre de *Théorie et Construction de l'Appareil hélicoïdal des arches biaises*, est, au moins pour le fond, conforme à ce manuscrit.

Qu'il me soit permis de terminer cet Article par un extrait de la Note qui a été publiée sur mon travail par MM. Gerono et Ch. Brisse, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1886, p. 543 : « Dans l'Ouvrage que M. Gauthier-Villars vient d'éditer avec luxe, rien de ce qui est nécessaire à l'appareilleur n'a été omis, et la partie théorique est développée avec des démonstrations simples; les épures sont dessinées à une grande échelle, avec netteté et clarté, et contiennent tous les détails pratiques. Les

tracés sont ceux qu'ont adoptés les ingénieurs les plus autorisés et les noms de leurs auteurs sont toujours cités. »

Table des Matières du Supplément. — Avertissement. — Auteurs cités dans les arches biaises hélicoïdales. — I. *Introduction.* — Principe de la direction des pressions. Appareil orthogonal cylindrique. Appareil orthogonal gauche. Appareil hélicoïdal. — II. *Théorie de l'appareil hélicoïdal.* — Constructions préliminaires. Coupes de lit. Tangentes aux coupes de lit. Théorème et construction du foyer. Angle intradossal naturel. Cas de l'appareil en arc de cercle. Tracé des sinusoïdes. Angles et foyers secondaires; leur construction. Angles et foyers des coupes de joint. Angle d'une coupe de lit et de l'arête de douelle correspondante. Points d'équilibre. De la poussée au vide. — III. *Appareil hélicoïdal exact.* — Tracé de l'épure. Taille par équarrissement d'un voussoir de clef et d'un voussoir de tête. Coussinets et crémaillère. Taille directe. Règles gauches. Panneau monté. Modifications à apporter aux voussoirs de tête. Pose des voussoirs. — IV. *Appareil hélicoïdal simplifié.* — Tracé de l'épure. Éléments nécessaires à la taille d'un voussoir. Taille directe. Coussinets et crémaillère. Pose des voussoirs. — Note sur la projection de l'hélice. — Planches 75 et 76.

Er. L.

MÉLANGES.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. HAAG.

Dans une lettre publiée dans le numéro d'août du *Bulletin des Sciences mathématiques*, M. Carrus me fait un grief de n'avoir pas tenu compte des observations qu'il m'avait présentées au sujet de la Note parue en avril, sous ma signature, relativement à une démonstration de J. Bertrand.

A cela je répondrai d'abord que lorsque j'ai reçu la lettre de M. Carrus, ma Note était, depuis longtemps déjà, entre les mains de M. Darboux. Sans doute il m'eût été possible, par la suite, d'ajouter quelques mots reproduisant les arguments de M. Carrus; mais, outre que je n'attachais pas une importance exagérée à la découverte de l'erreur dont il est question (découverte pour

laquelle je n'ai d'ailleurs pas à revendiquer un bien grand mérite, puisque je n'y ai été conduit qu'après avoir constaté une contradiction, inquiétante pour moi, entre le Mémoire de M. Carrus et ma Note aux *Comptes rendus* du 21 mars 1910), je n'avais pas encore eu, jusqu'à présent, l'occasion de méditer sur les légères restrictions qu'il suffisait de faire au début de la démonstration de M. Carrus pour que celle-ci devînt absolument rigoureuse.

Ces restrictions, sur lesquelles m'a fait réfléchir la lettre à laquelle je réponds présentement, reviennent à supposer que la surface ρ admet une normale parallèle à la direction de la translation, *le pied de cette normale étant un point ordinaire de la surface.*

Or, il n'est pas besoin d'un exemple bien compliqué pour montrer que même cette hypothèse ne suffit pas à justifier les conclusions de M. Carrus. Prenons, en effet, une cyclide de Dupin à trois plans de symétrie. L'axe de symétrie qui est perpendiculaire au plan des quatre points doubles est normal à la surface aux quatre points où il la rencontre. Ces quatre points ne présentent aucune espèce de singularité (du moins je n'ai pu leur en découvrir) (1). En outre, il est un fait bien connu que la cyclide engendre une famille de Lamé dans une translation suivant l'axe précédent. Or, celui-ci n'appartient à aucune des surfaces qui complètent le système triple orthogonal, comme cela résulte des remarques que j'ai présentées dans ma Note précitée.

Au reste, je n'ai pas bien vu à quel endroit de son raisonnement justificatif M. Carrus fait intervenir l'hypothèse de la non-singularité du point M. Il me semble même que lorsqu'il prétend que la surface ρ_1 contient l'élément de normale MM_1, il admet tout simplement ce qu'il veut démontrer. Sans doute, cela est-il vrai à des infiniment petits près ; mais alors, il me paraît difficile d'introduire une rigueur absolue dans la démonstration.

---

(1) D'ailleurs, si l'on prend un point quelconque M sur la surface, on peut mener par ce point un cercle C normal à la surface et d'axe Δ situé dans le plan des quatre points doubles. Or, si Δ n'est pas un des axes de symétrie de la surface, le cercle C est une trajectoire singulière des surfaces obtenues en faisant tourner la cyclide autour de Δ, comme cela résulte des nos 4 et 6 de ma Thèse de Doctorat (*Ann. de l'École Norm. supér.*, juin 1910).

La remarque de M. Carrus s'applique, il est vrai, au cas des développables engendrées par les normales d'une famille de surfaces parallèles. Cela tient peut-être à ce que, dans ce cas, les lignes trajectoires orthogonales sont des droites. Mais il ne me paraît pas justifié d'affirmer que tout point d'une trajectoire singulière d'une famille quelconque de surfaces (fût-elle de Lamé) est un point singulier pour la surface de la famille qui passe par ce point.

L'étude d'un système triple orthogonal dans le voisinage d'une trajectoire singulière est peut-être intéressante en elle-même et je serais heureux si, à la suite des observations précédentes, un géomètre était tenté de l'entreprendre. J. Haag.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Bohnert (F.). — *Elementare Stereometrie*. 2., durchgeseh. Aufl. VII-183 p. avec 119 fig. (*Sammlung Schubert*, IV). In-8°. Leipzig, G.-J. Göschen. Relié, 2 m. 40.

Gérard (Eric). — *Leçons sur l'Électricité*. Tome I, 8e édit. In-8°, XII-975 p. avec 458 fig. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.

Turpain (A.). — *Notions fondamentales sur la Télégraphie envisagée dans son développement, son état actuel et ses derniers progrès*. In-8°. 122 fig. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr.

Basset (A.-B.-A.). — *Treatise on the Geometry of Surfaces*. In-8°. London, Bell. 10 s. 6 d.

Dziobek (Otto). — *Vorlesungen üb. Differential- u. Integralrechnung*. Gr. in-8°, X-648 p. avec 150 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 16 m.

Leroy (C.-F.-A.). — *Traité de Géométrie descriptive*, suivi de la méthode des plans cotés et de la théorie des engrenages cylindriques et coniques, avec une collection d'épures, composée de 71 planches. 2 vol. : Tome I (texte), XX-369 p.; Tome II (planches), 71 p. Paris, Gauthier-Villars. 16 fr.

Cowell (P.-H.) and Crommelin (A.-C.-D.). — *Essay on the retourn of Halleys comet.* (Gehrönte Preisschrift.) 60 p. (*Publikation der astronomischen Gesellschaft*, t. XXIII), (31cm, 5-24cm). Leipzig, W. Engelman, 5 m.

Scheffers (Geo.). — *Anwendung der Differential- u. Integralrechnung auf Geometrie.* 1. Bd. *Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene u. im Raume.* 2e édition augmentée. Gr. in-8°, x-582 p. avec 107 fig. Leipzig, Veit et Cie. 13 m.; relié, 14 m.

Sturm (C.). — *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.* Revu et corrigé par *E. Prouhet* et augmenté de la théorie élémentaire des fonctions elliptiques par *H. Laurent.* 14e édition. 2 vol. in-8°. Tome I : xxxii-564 p. Tome II : x-658 p. Paris, Gauthier-Villars. Les 2 volumes 15 fr.

Weber (Heinr.) u. Wellstein (Jos.). — *Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch f. Lehrer u. Studierende.* In 3 Bdn. 1. Bd. *Encyklopädie der elementaren Algebra u. Analysis.* Bearb. v. *Heinr. Weber.* 3. Aufl. Gr. in-8°, xviii-532 p. avec 40 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 10 m.

Wörner (Gerh.). — *Grundriss der Versicherungslehre.* 1. Buch : *Allgemeine Versicherungslerhe.* 2e édition augmentée. In-8°, viii-174 p. Leipzig, J. Wörner. 4 m. 50; relié, 5 m.

Young (W.-H.). — *The fundamental theorems of the differential Calculus.* In-8°. Cambridge, Univ. Press. 2 s. 6 d.

Chwolson (O.-D.). — *Traité de Physique : Champ électrique constant.* In-8°, vii-430 p. avec 165 fig. dans le texte. Paris, A. Hermann et fils. 12 fr.

Duhem (P.). — *Thermodynamique et Chimie. Leçons élémentaires.* 2e édition. In-8°, xii-580 p. avec 173 fig. dans le texte. Paris, A. Hermann et fils. 12 fr.

Kelvin. — *Mathematical and Physical Papers.* Vol. 4. *Hydrodynamics and general Dynamics.* In-8° (9-5,5), 580 p. Cambridge, Univ. Press. 18 s.

Annales de l'Observatoire de Nice. T. XII. In-4, 502 p. Paris, Gauthier-Villars. 30 fr.

Bosler (J.). — *Les théories modernes du Soleil.* (Encycl. scientifique. Bibl. d'Astronomie.) 372 p. avec 49 fig. Paris, O. Doin et fils. 5 fr.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. T. II, vol. III, fasc. I. In-8, 170 p. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr.

Hancock (H.). — *Lectures on the theory of elliptic functions.* Vol. I. Analysis. In-8. London, Chapman et H. 21 s.

Berliner astronomische Jahrbuch, f. 1912 m. Angaben f. die Oppositionen der Planeten (1)-(674) f. 1910. Hrsg. v. dem königl. astronom· Recheninstitut unter Leitg. v. Fritz Cohn. (Der Sammlg. Berliner astronomischer Jahrbücher 137. Bd.) Gr. in-8, x-477-107 et 36 p. Berlin, F. Dümmler's Verl. 12 m.

Moore (E.-H.), Wilczynski (P.) et Mason (M.). — *The New Haven mathematical colloquium;* lectures delivered in 1906. 221 p. New Haven, Ct., Yale Univ. Press. 3 d.

Pascal (E.). — *Repertorium der höheren Mathematik.* 2. völlig umgearb. Aufl. der deutschen Ausg., hrsg. v. P. Epstein u. H. E. Timerding. II. Bd. Repertorium der höheren Geometrie. Hrsg. v. H. E. Timerding. 2. Aufl. 1. Hälfte. Grundlagen u. ebene Geometrie. In-8, xvi-534 p. avec 54 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 10 m.

Sampson (R.-A.). — *Tables of the four great Satellites of Jupiter.* In-4, 330 p. London, Wesley. 25 s.

Anding (E.). — *Kritische Untersuchungen üb. die Bewegung der Sonne durch den Weltraum.* 2. Abschn. Hilfsmittel u. vorbereit. Untersuchgn. zur Stellarastronomie. In-8, iii et 81-250 p. avec figures. Leipzig, B.-G. Teubner. 10 m.

Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz (suite de la publication : *Das schweizer. Dreiecknetz*). 12. Bd. Schwerebestimmungen in den J. 1900-1907. Das Nivellementspolygon am Simplon. (32,5-24), viii-422 p. avec 13 planches. Zürich, Beer et Cie. 15 m.

Compte rendu du Congrès des Mathématiciens, tenu à Stockholm (22-25 septembre 1909). Publié par G. Mittag-Leffler et Ivar Fredholm. Gr. in-8, 137 p. avec figures. Leipzig, B.-G. Teubner. 5 m.; relié, 6 m.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, publiée sous la direction de *Jules Molk*. T. I, Vol. 3, fasc. 3. Théorie arithmétique des formes, d'après *K.-Th. Vahlen*, par *E. Cahen*. Propositions transcendantes de la théorie des nombres, d'après *P. Bachmann*, par *J. Hadamard* et *Ed. Maillet*. In-8, 96 p. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr. 75.

Hime (Henry-W.-L.). — *Anharmonic coordinates.* In-8. Londres, Longmans. 7 s. 6 d.

Newcomb (Simon). — *Popular Astronomy.* 2e édition revisée. In-8, 600 p. Londres, Macmillan. 8 s. 6 d.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BOSMANS (P.). — Un émule de Viète : Ludolphe van Ceulen. Analyse de son *Traité du Cercle*. 56 pages in-8; Louvain, F. et R. Ceuterick, 1910.

Dans cette petite plaquette, P. Bosmans fait revivre en quelques lignes la sympathique physionomie de Ludolphe van Ceulen (1540-1610), maître d'armes et de boxe, qui, ne sachant pas le latin, apprenait et inventait les mathématiques comme il pouvait, qui fut un ingénieux algébriste et un prodigieux calculateur. Son nom est bien connu des écoliers allemands pour lesquels π est le nombre de Ludolphe, *die Ludolphische Zahl;* mais son *Traité du Cercle*, rédigé en flamand et presque introuvable, est fort peu connu ; il le sera désormais grâce au travail de P. Bosmans. Voici la traduction du titre de ce Traité.

Du Cercle. — On y apprend à trouver le rapport approché du diamètre du cercle à sa circonférence, ce qui rend possible la mesure exacte de tous les cercles et, par suite, celle des figures et des terrains limités par des lignes courbes.

Item à exprimer les côtés de tous les polygones inscrits dans le cercle, en partant des polygones de 3, 4, 5 ou 15 sommets, quand bien même les sommes du polygone seraient au nombre de plusieurs centaines de mille.

Item à calculer les côtés des polygones de 7, 11, 13, 17, 19, 23 sommets et, plus généralement, un côté ou une corde quelconque dont l'arc est exprimé arbitrairement en degrés, minutes, secondes, etc.

On y trouve, en outre, les tables des sinus, tangentes et sécantes avec la manière de s'en servir, chose fort nécessaire aux arpenteurs. On y a joint beaucoup de bons exercices qui n'ont jamais été publiés.

Enfin, des règles d'intérêt. On donne à cette fin de nombreuses tables; on en explique l'usage par beaucoup de bons exemples toujours résolus au long et vérifiés par leurs preuves.

Le tout rédigé par Ludolphe van Ceulen, natif d'Hildesheim.

L'analyse que donne P. Bosmans du Traité du Cercle nous fait connaître non seulement les résultats obtenus par Ludolphe van Ceulen, mais encore la façon de travailler de l'auteur, son grand

talent et sa maladresse; elle éclaire complètement les points saillants, ce qui n'était pas toujours facile.

On y trouve π calculé avec 20 décimales exactes, au moyen du polygone de 32 512 254 720 côtés; plus tard, Ludolphe van Ceulen parvint à calculer π avec 35 décimales, qui furent gravées sur son tombeau.

Il était en possession d'une méthode abrégée pour la division, méthode pour laquelle il se borne à donner un exemple, qui comporte la recherche de 19 chiffres au quotient dans une division où le diviseur a 22 chiffres. M. Bosmans a reproduit cet exemple en face de la division abrégée telle qu'on la pratique maintenant.

Adrien Romain avait demandé à van Ceulen de lui calculer, avec une erreur moindre que 10^{-14}, les côtés de tous les polygones réguliers inscrits au cercle depuis le triangle jusqu'au polygone de 80 côtés; van Ceulen, par des méthodes fort ingénieuses, détermine toutes les équations correspondantes et calcule la racine qui correspond au polygone régulier considéré; voici, par exemple, l'équation relative au polygone de 134 côtés, qui lui sert au calcul du polygone de 67 côtés :

$$\begin{aligned} &17x - 204x^3 + 714x^5 - 1122x^7 + 935x^9 \\ &\quad - 422x^{11} - 119x^{13} - 7x^{15} + x^{17} \\ &\quad = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}; \end{aligned}$$

Cette équation, il l'a résolue avec l'approximation demandée « avec plaisir et grand travail ».

Les recherches de van Ceulen sont contemporaines de celles de Viète, contenues dans la réponse à Adrien Romain sur la résolution d'une équation du 45e degré (*Ad Problema quod omnibus Mathematicis totius orbis construendum Adrianus Romanus Francisci Vietæ Responsum*. Paris, 1595). Le Traité du Cercle n'a paru qu'en 1596; mais les travaux des deux géomètres sont certainement indépendants; d'ailleurs, Viète n'indique pas comment il forme ses équations, plus simples quelquefois que celles de van Ceulen et il est établi que Viète, poussé par Pierre Aléaume, a publié ses recherches « pour ne pas se laisser ravir par des Belges une gloire qui revenait à la France ». J. T.

LESEINE (L.) et SURET (L.), Docteurs en Droit. — INTRODUCTION MATHÉMATIQUE A L'ÉTUDE DE L'ÉCONOMIE POLITIQUE. Un volume in-16, VI-190 pages. Paris, Félix Alcan.

L'Ouvrage de MM. Leseine et Suret vient combler une lacune dont a souffert jusqu'à aujourd'hui en France l'étude de l'Économie politique : les auteurs se proposent de donner aux étudiants le moyen de comprendre sans grands efforts les formules mathématiques contenues dans les Ouvrages de certains économistes : Cournot, Jevons, Walras, Pareto, Pantaleoni, Barone, Libelli, Auspitz et Lieben, Edgeworth, Marshall, Wicksteed, Cohen, Stuart, etc.

Dans une Introduction substantielle, MM. Leseine et Suret montrent l'utilité de la méthode mathématique en Économie politique, au double point de vue de l'enseignement didactique et de l'investigation scientifique.

Au cours de leur Livre, les auteurs exposent successivement, et dans une forme accessible à tous les lecteurs, les notions fondamentales d'Algèbre supérieure, de Trigonométrie, de Géométrie analytique et de Calcul infinitésimal.

Enfin, ce travail contient, à titre d'illustration, des formules mathémathiques, de nombreux exemples économiques et financiers extraits de tous les auteurs précités.

Cet Ouvrage vient à son heure, en raison du très grand développement actuel des théories d'économie politique mathématique. J. G.

FABRY (E.). — TRAITÉ DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES à l'usage des chimistes, physiciens, ingénieurs et des élèves des Facultés des Sciences. Avec une Préface de *Gaston Darboux*. Deuxième édition, revue et augmentée, in-8, x-462 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1911.

Il y a deux ans à peine, nous recommandions à nos lecteurs le Traité que venait de publier notre collègue M. E. Fabry, professeur à l'Université de Montpellier. Cet excellent Ouvrage a eu

vraiment un très grand succès, et l'auteur est obligé aujourd'hui d'en donner une nouvelle édition qu'il a revue et augmentée. Il nous suffira évidemment de la signaler à nos lecteurs.

G. D.

STAUDE (OTTO). — ANALYTISCHE GEOMETRIE DES PUNKTEPAARES, DES KEGELSCHNITTES UND DER FLÄCHE ZWEITER ORDNUNG. Erster Teilband, mit 181 Figuren im Text. In-8, x-548 pages. Zweiter Teilband, mit 47 Figuren im Text. In-8, IV-452 pages. Leipzig et Berlin, B.-G. Teubner, 1910.

Ces Volumes, qui font partie de la *Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften*, ont comme but principal l'étude des surfaces du second ordre, sur lesquelles l'auteur, professeur à l'Université de Rostock, a publié des travaux remarqués. Ils peuvent être considérés comme une suite et un complément de l'Ouvrage que M. Staude avait publié auparavant sur la géométrie à deux dimensions.

Le premier Volume se divise en deux Parties : la première est consacrée aux figures du deuxième ordre dans le plan ; elle comprend l'étude approfondie des coniques, considérées à la fois comme courbes du second ordre et de la seconde classe, la théorie des pôles et des polaires, les propriétés des coniques homofocales, les théorèmes de Pascal et de Brianchon, l'étude des courbes de second ordre en coordonnées trilinéaires.

La seconde Partie traite des figures du second ordre dans l'espace, c'est-à-dire au fond, des surfaces du second ordre. Une première section traite de leurs formes et de leurs propriétés élémentaires : génératrices rectilignes, sections circulaires, surfaces dépourvues de centre, surfaces à centre. Le reste du premier Volume aborde l'équation générale de ces surfaces, l'étude de leurs plans tangents, de leurs diamètres, leur classification, la réduction de leur équation à la forme normale, de leur équation tangentielle, des propriétés des pôles et des polaires.

Mais c'est dans le second Volume que sont abordées et traitées avec beaucoup de talent les parties les plus neuves de l'Ouvrage. Plusieurs Chapitres sont consacrés non seulement à la théorie des

surfaces homofocales, telle qu'elle était sortie des mains de Chasles dans l'*Aperçu historique*, mais aussi aux propriétés focales d'Amiot, de Mac Cullagh et de Jacobi, d'où l'auteur a fait sortir un moyen si élégant de construire les surfaces du second degré au moyen de fils tendus. Cette théorie des surfaces homofocales du second degré nous a toujours plu parce qu'elle constitue un des Chapitres les plus intéressants de la Géométrie, mais aussi, mais surtout, parce qu'elle met en évidence un fait qu'il ne faut pas se lasser de répéter : c'est qu'en Mathématiques un théorème, de même qu'il peut avoir plusieurs réciproques, est susceptible de recevoir plusieurs généralisations. Aucune ne peut se vanter d'être la seule, la vraie; aucune ne peut prétendre à décourager les chercheurs. Chasles avait trouvé moyen de généraliser en quelque sorte chacune des propriétés focales des coniques. Jacobi est venu et, en se plaçant à un point de vue nouveau, il a obtenu également des généralisations géniales. D'autres viendront qui récolteront encore une récolte dans un champ que les esprits superficiels pouvaient considérer comme épuisé.

Après ces propriétés focales des quadriques, l'auteur développe les applications des coordonnées tétraédriques; il termine par quelques propriétés des hexagones de Pascal et de Brianchon dans l'espace. J. G.

LOBATSCHEFSKY (N.-J.). — Imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale aus dem russischen übersetzt und mit Anmerkungen, herausgegeben von *Heinrich Liebmann*, mit 39 Figuren im Text und auf einer Tafel. 1 volume in-8, XII-190 pages. Leipzig, B.-G. Teubner, 1904.

Ce petit Volume est le 19e de la collection des *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, fondée par M. Moritz Cantor. Ce n'est pas, d'ailleurs, le premier qu'on doive à M. Liebmann, qui a déjà publié en 1902 une traduction de la *Pangéométrie* de Lobatschefski en langue allemande. Il complète ainsi la traduction de tout ce que Lobatschefski a écrit sur la Géométrie. L'intérêt que les mathématiciens portent à la Géométrie non euclidienne a beaucoup grandi depuis que notre ami et

collaborateur Hoüel ne cessait, dans ce journal, de revenir sur ce beau sujet. Les profondes recherches d'Hilbert, de Schur, d'Henri Poincaré et de beaucoup d'autres ont maintenu l'attention sur cette branche vivace de la Géométrie. La *Géométrie imaginaire* n'était pas une inconnue pour les lecteurs français, mais sa publication en langue russe, dans les *Nouvelles de Kazan*, présentait de nombreuses variantes, qui méritaient d'être connues. Il semble que, dans le travail publié par M. Liebmann, le but principal du géomètre russe n'était pas de faire connaître de nouveau sa géométrie, mais bien plutôt d'essayer de lui gagner des partisans en montrant qu'elle est susceptible d'applications variées dans le domaine du Calcul intégral. Malheureusement, bien des fautes de calcul déparaient le travail de Lobatschefski. M. Liebmann s'est attaché à les corriger, et il a accompagné le texte d'annotations abondantes qui rendent la lecture de l'Ouvrage infiniment plus facile. J. G.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Boehm (Karl). — *Elliptische Funktionen.* 2. Tl. Theorie der ellipt. Integrale. Umkehrproblem. (*Sammlung Schubert.* LXI.) In-8, VII-180 p. avec 28 fig. Leipzig, G.-J. Göschen. Relié, 5 m.

Staude (Otto). — *Analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes u. der Fläche 2. Ordnung.* 2. Teilbd. (*B.-G. Teubner's, Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen*, n° 30.) Gr. in-8, IV et 549-1000 p. avec 47 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 16 m.; relié, 18 m.

Wellisch (Siegm.). — *Theorie u. Praxis der Ausgleichsrechnung.* 2. Bd. Probleme der Ausgleichungsrechng. In-8, XI-217 p. avec figures. Wien, C. Fromme. 7 m. 50 (complet, 17 m. 50).

Lorentz (H.-A.). — *Sichtbare u. unsichtbare Bewegungen.* Vorträge, im febr. u. marz 1901 geh. Unter Mitwirkg. des Verf. aus dem Holl. übers. v. G. Siebert. 2., vom Verf. rev. Aufl. Gr. in-8, VII-123 p. avec 40 fig. Braunschweig, F. Vieweg et Sohn. 3 m.; relié, 4 m.

Rosenthal (Art.). — *Untersuchungen üb. gleichflächige Polyeder.* (*Acta nova, academiæ cæsareæ Leopoldino-Carolinæ germanicæ naturæ curiosorum.* T. XCIII. E. s. t. : Abhandlungen der kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. 93. Bd.). (32,5-25,5), 150 p. avec 4 planches. Halle, Leipzig, W. Engelmann. 12 m.

Autenheimer (Fr.). — *Elementarbuch der Differential- u. Integralrechnung m. zahlreichen Anwendungen aus der Analysis, Geometrie, Mechanik u. Physik* f. hohere Lehranstalten u. den Selbstunterricht. 6e édition revue par *Alf. Donadt.* Gr. in-8. Leipzig, B.-F. Voigt. 9 m.; relié, 10 m.

Brandler-Pracht (Karl). — *Häuser Tabellen von* 40°-56° *geographische Breite.* Mit e. Anh. : Mathematische Tafeln zum Gebrauche f. die Astrologie. Diese Häuser-Tabellen ermöglichen es die Häuser e. Horoskops auch ohne rechner. Mühe annähernd genau zu bestimmen. Berechnet u. zusammengestellt. (*Astrologische Bibliothek*, 3e vol.) In-8, v-96 p. Leipzig, Theosoph. Verlagshaus. 3 m. 50; relié, 4 m. 50.

Cureau (Ad.). — *Détermination des positions géographiques, manuel d'Astronomie pratique et topographique.* In-8, vi-487 p. avec figures. Paris, A. Challamel. 15 fr.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München u. Wien, sowie unter Mitwirkg. zaglreicher Fachgenossen. Bd. IV, 2. II. Mechanik Red. v. F. Klein u. C.-H. Müller. 3. Heft. In-8, 311-417 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 3 m. 40.

Julliot de la Morandière (L.). — *De la réserve mathématique des primes dans l'assurance.* Gr. in-8, 604 p. Paris, Larose et Tenin. 10 fr.

Courvoisier (L.). — *Katalog v.* 3641 *Sternen zwischen* 69° 40′ *u.* 75° 20′ *nördlicher Deklination* 1855 (*Zone* + 70° *bis* + 75°) *f. das Aequinoktium* 1905. Nach gemeinsam m J. Hölling u. m. K. Hessen ausgeführten Zonen-Beobachtgn. am Pistor u. Martinsschen Meridiankreise der königl. Sternwarte zu Berlin in den J. 1905-1908. (Hrsg. v. der astronom. Gesellschaft.) (*Katalog der astronomischen Gesellschaft.* I. Abtlg. Katalog der Sterne bis zur 9. Grösse zwischen 80° nördl. u. 20° südl. Deklination.) 2e partie. (31,5-24), 20 et 96 p. Leipzig, W. Engelmann. 9 m.

Vivanti (G.). — *Les fonctions polyédriques et modulair s*, trad. par *Armand Cahen.* In-8, vii-316 p. avec 52 fig. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.

Wilde (W.). — *Celestial ejectamenta; first Halley lecture delivered May* 10, 1910. 34 p. New-York, Oxford Univ. Press. 10 $.

GIRARDET (Ph.). — *Lignes électriques aériennes, étude et construction.* 181 p. avec 13 fig. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr.

Die Mathematik an den technischen Schulen. Mit e. Einführungswort v. P. Stäckel. 1. Heft. GRÜNBAUM (Heinr.) : *Der mathematische Unterricht an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie.* (*Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland*, veranlasst durch die internationale mathematische Unterrichtskommission. Hrsg. v. F. Klein.) In-8, XVI-99 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 2 m. 60.

BIANCHI (Luigi). — *Vorlesungen üb. Differentialgeometrie.* Uebers. v. *Max Lukat.* 2., verm. u. verb. Aufl. Gr. in-8, XVIII-721 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 22 m. 60; relié, 24 m. 60.

Compte rendu du Congrès des Mathématiciens, tenu à Stockholm 22-25. IX. 1909. Publié par *G. Mittag-Leffler* et *Ivar Fredholm.* In-8, 137 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 5 m.; relié, 6 m.

DOLINSKI (Miron). — *Algebra u. politische Arithmetik.* 2., verm. u. verb. Aufl. Gr. in-8, IV-401 tables et 39 p. Wien, C. Fromme. Relié, 5 m.

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München u. Wien, sowie unter Mitwirkg. zahlreicher Fachgenossen. VI. Bd. 2. Tl. Astronomie. Red. v. K. Schwarzschild. 3. Heft. In-8, p. 335-462 avec fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 3 m. 60.

MINKOWSKI (Herm.). — 2 *Abhandlungen üb. die Grundgleichungen der Elektrodynamik.* Mit e. Einführungswort v. *Otto Blumenthal.* (*Fortschritte der mathematischen Wissenschaften in Monographien.* Hrsg. v. Otto Blumenthal. 1. Heft.) In-8, 82 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 2 m. 40.

PLASSMANN (Jos.). — *Die Kometen.* Darstellung der wichtigsten Beobachtungs-Ergebnisse u. Erklärungs-Versuche. (*Görres-Gesellschaft zur Pflege der Wissenschaft im katholischen Deutschland.* 1910. 1. Vereinsschrift.) Gr. in-8, 100 p. avec 12 fig. et 1 frontispice. Köln, J.-P. Bachem. 1 m. 80.

GUIMARAÈS. — *Les Mathématiques en Portugal.* 2[e] édit. In-8, 660 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 24 fr.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CASTELNUOVO. — Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici (Roma, 6-11 aprile 1908), publicati per cura del Segretario generale. Tomo II : *Comunicazioni della Sezioni I e II*. In-8, 290 pages. Tomo III : *Comunicazioni della Sezioni III_A, III_B et IV*. In-8, 588 pages. Roma, tipografia della Reale Accademia dei Lincei. 1909.

Ces deux Volumes, publiés un an à peine après la clôture du Congrès, sont une preuve nouvelle de l'activité du secrétaire général. Tous ceux qui ont assisté aux séances du Congrès les conserveront précieusement, en souvenir de l'intérêt qu'ils ont pris aux séances et de l'accueil qu'ils ont reçu dans la Ville éternelle. Les recueils du genre de celui que nous devons à M. Castelnuovo ont les inconvénients et les attraits de la diversité. Un point sur lequel tout le monde tombera d'accord, c'est qu'ils donnent une idée fidèle de l'état de la Science et de la direction des recherches à un moment donné. Ce sont là de précieuses indications.

C'est ainsi que, par exemple, dans la Section I (Arithmétique, Analyse, Algèbre), beaucoup de communications se rapportent à la théorie des ensembles et à la théorie des fonctions, au problème de Dirichlet, à la théorie des équations différentielles. En Géométrie, il y a plus de variété. A côté de la géométrie non euclidienne, l'application des fonctions abéliennes à la théorie des surfaces, la géométrie infinitésimale, la géométrie de situation et la théorie des groupes continus se partageront l'attention du lecteur.

Dans le second Volume, la Section III_A, consacrée à la Mécanique, à la Physique mathématique et à la Géodésie, traite des sujets les plus variés, depuis la rigidité de la Terre jusqu'à la théorie des aurores boréales. On pourrait croire que la Section III_B est consacrée à la Théorie des assurances et au Calcul des probabilités si elle ne contenait divers articles où l'on traite des applications des Mathématiques à l'art de l'ingénieur. Enfin la Section IV, qui contient tous les articles traitant de questions philosophiques, historiques et didactiques, est une preuve nouvelle

d'un fait qui nous a frappé depuis longtemps : c'est aux Mathématiques et aux mathématiciens qu'il appartiendra de réformer et de refaire toute cette partie de la Philosophie qui a trait à l'origine de nos connaissances. G. J.

MÉLANGES.

LA STRUCTURE DES GROUPES DE TRANSFORMATIONS CONTINUS ET LA THÉORIE DU TRIÈDRE MOBILE;

Par M. E. CARTAN.

Dans un Mémoire paru dans les *Annales de l'École Normale* (¹), j'ai développé, il y a quelques années, une théorie nouvelle de la stucture des groupes de transformations continues, finis ou infinis. Cette théorie prenait pour point de départ le théorème suivant que j'énonce, pour simplifier, dans le cas d'un groupe fini et transitif :

Étant donné un groupe G *fini et transitif à n variables* $(x_1, \ldots, x_n)$ *et* $r \geqq n$ *paramètres, on peut toujours adjoindre aux n variables données un certain nombre (ici* $r - n$*) variables auxiliaires y de telle sorte que le groupe* G *soit formé de l'ensemble des transformations qui laissent invariantes r expressions linéaires aux différentielles totales* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$.

J'avais indiqué la manière de former les expressions ω, connaissant les équations de définition des équations finies du groupe, mais le procédé indiqué pouvait paraître un peu artificiel ; de plus, mon but étant surtout de développer la théorie de la structure des groupes *infinis*, je ne m'étais pas préoccupé de relier, dans le cas des groupes *finis*, la théorie nouvelle avec la théorie classique de Lie.

(¹) *Sur la structure des groupes infinis de transformations* (*Ann. de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. XXI, 1904, p. 153-206 ; t. XXII, 1905, p. 219-308).

J'indique dans cette Note un procédé pour former très facilement les expressions ω en partant des *équations finies* du groupe; ce procédé a l'avantage de fournir en même temps les *transformations infinitésimales* et les *expressions* ω; de plus, ce même procédé fournit le lien entre les deux théories de la structure par l'intermédiaire d'un système d'équations aux différentielles totales de Lie (§ III et IV).

En présentant les choses d'un point de vue cinématique, on arrive à reconnaître la généralisation d'une théorie classique, celle du trièdre mobile due à M. Darboux ([1]). Dans le cas particulier où le groupe est celui des déplacements de l'espace, les $r = 6$ expressions ω peuvent s'obtenir de la manière suivante : on adjoint aux coordonnées d'un point de l'espace trois quantités auxiliaires définissant l'orientation d'un trièdre trirectangle d'ailleurs quelconque, ayant pour sommet le point. *Les* 6 *expressions* ω *ne sont pas autre chose que les composantes par rapport au trièdre mobile du déplacement instantané de ce trièdre quand on donne aux* 6 *variables des accroissements infiniment petits arbitraires.* Les formules de structure du groupe coïncident alors tout simplement avec les équations aux dérivées partielles du premier ordre que M. Darboux a rendues classiques dans la théorie des déplacements à plusieurs paramètres.

Ce que je viens de dire pour le groupe particulier des déplacements de l'espace peut, grâce à des conventions de langage simples, se répéter identiquement pour tout autre groupe fini.

J'ai développé, dans un autre Mémoire ([2]), une théorie de l'équivalence des systèmes différentiels vis-à-vis d'un groupe donné, fini ou infini. Je montre sur un exemple (équivalence des surfaces par rapport au groupe des déplacements de l'espace) que cette méthode, dans le cas des groupes finis, est identique à celle que pourrait fournir, convenablement appliquée, la méthode du trièdre mobile ; on pourra se rendre compte que, même dans des questions relativement simples (comme la théorie des invariants par rapport au groupe des mouvements, des surfaces réglées à généra-

---

([1]) Voir *La théorie des surfaces*, de M. Darboux.

([2]) *Les sous-groupes de groupes continus de transformations* (*Ann. de l'École Normale*, 3e série, t. XXV, 1908, Chap. I, p. 57).

trices isotropes et particulièrement des développables isotropes), cette méthode n'a pas encore donné tout ce qu'on en peut tirer.

J'ai à peine besoin d'ajouter, pour ceux qui ont lu mes précédents travaux, que les théories relatives à la structure, que j'ai développées dans mes Mémoires précédents, ont une origine tout à fait indépendante de la théorie du trièdre mobile, théorie qui d'ailleurs, je le répète, ne semble pas devoir se généraliser dans le cas des groupes infinis.

Je dois ajouter que l'idée de la généralisation, à un groupe fini quelconque, de la théorie du trièdre mobile, et son utilisation pour la recherche des invariants différentiels se trouve déjà dans un intéressant article de M. Émile Cotton intitulé : *Généralisation de la théorie du trièdre mobile* (*Bull. Soc. math. de France*, t. XXXIII, 1905, p. 1-23) [1].

I.

Considérons un groupe de transformations G fini et continu à r paramètres

$$(1) \qquad x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Désignons par S_a la transformation correspondant aux paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_r$. La propriété des équations (1) de définir un groupe se traduit, comme on sait, par l'équation

$$S_a S_b = S_c,$$

dans laquelle les a et les b étant donnés arbitrairement, les c sont des fonctions bien déterminées des a et des b.

On appelle *groupe des paramètres* Γ le groupe défini par la formule

$$(2) \qquad S_{\xi'} = S_\xi S_a,$$

dans laquelle les a sont les paramètres des Γ, les ξ les variables primitives et les ξ' les variables transformées. Ce groupe Γ est, comme on sait, simplement transitif.

Si l'on considère la transformation $S_{\xi+d\xi}\, S_\xi^{-1}$, cette transfor-

[1] *Cf.* aussi, en ce qui concerne les paragraphes III et IV de cet article, Ém. Cotton, *Sur certains systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales* (*Annales de l'Université de Grenoble*, t. XVI, n° 2, 1904, p. 1).

mation, considérée comme appartenant au groupe G, a des paramètres infiniment voisins des valeurs $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_r^0$, qui correspondent à la transformation identique : soient

$$a_1^0 + \omega_1, \quad a_2^0 + \omega_2, \quad \ldots, \quad a_r^0 + \omega_r$$

ces paramètres. Les ω sont des expressions de la forme

$$(3) \quad \omega_i = \alpha_{i1}(\xi_1, \ldots, \xi_r)\, d\xi_1 + \alpha_{i2}(\xi_1, \ldots, \xi_r)\, d\xi_2 + \ldots + \alpha_{ir}(\xi_1, \ldots, \xi_r)\, d\xi_r$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r).$$

Si, dans ces expressions, on remplace les ξ par les valeurs transformées par une transformation (2) *du groupe* Γ, *on retrouve identiquement les mêmes expressions.* Cela résulte immédiatement des égalités

$$S_{\xi'+d\xi'} S_{\xi'}^{-1} = (S_{\xi+d\xi} S_a)(S_\xi S_a)^{-1} = S_{\xi+d\xi} S_a S_a^{-1} S_\xi^{-1} = S_{\xi+d\xi} S_\xi^{-1}.$$

Autrement dit, *le groupe* Γ *laisse invariantes les r expressions de Pfaft* $\omega_1\, \omega_2, \ldots, \omega_r$.

Réciproquement, si une transformation T

$$\xi_i' = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

laisse invariantes les expressions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, elle appartient au groupe Γ. Cette transformation peut, en effet, être définie par la formule

$$(4) \qquad S_{\xi'} = S_\xi S_u,$$

dans laquelle les u peuvent être des fonctions des ξ. D'après l'hypothèse, on a

$$(S_{\xi+d\xi} S_{u+du})(S_\xi S_u)^{-1} = S_{\xi+d\xi} S_\xi^{-1},$$

c'est-à-dire

$$S_{\xi+d\xi} S_{u+du} S_u^{-1} S_\xi^{-1} = S_{\xi+d\xi} S_\xi^{-1},$$

ou encore

$$S_{u+du} = S_u :$$

cette dernière relation montre que les u sont des constantes indépendantes des $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$: ce qu'il fallait démontrer.

On pourrait aussi considérer le *second* groupe des paramètres Γ' défini par la formule

$$(5) \qquad S_{\xi'} = S_a S_\xi ;$$

on montrerait de même qu'il laisse invariants les paramètres

$$a_1^0 + \varpi_1, \quad a_2^0 + \varpi_2, \quad \ldots, \quad a_r^0 + \varpi_r$$

de la transformation

$$S_\xi^{-1} S_{\xi+d\xi}.$$

Prenons comme exemple le groupe G défini par les équations

$$x' = ax - b;$$

le groupe Γ est défini par les équations

$$\xi' = a\xi,$$
$$\eta' = a\eta + b;$$

la transformation $S_{\xi+d\xi} S_\xi^{-1}$ a ici pour paramètres

$$1 + \frac{d\xi}{\xi}, \quad \frac{d\eta}{\xi};$$

on peut donc prendre

$$\omega_1 = \frac{d\xi}{\xi}, \qquad \omega_2 = \frac{d\eta}{\xi}.$$

II.

On peut présenter les résultats précédents sous une forme géométrique, qui permet d'ailleurs une généralisation, au moins apparente.

Regardons les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme définissant les coordonnées d'un point dans un espace à n dimensions. On démontre facilement qu'on peut toujours, et d'une infinité de manières, choisir dans l'espace une figure F_0 formée de points (ou de lignes, etc.) jouissant de la propriété suivante :

Si l'on désigne par F_1 *la figure déduite de* F_0 *en lui appliquant la transformation* S_a, *il n'existe pas dans le groupe* G *d'autre transformation que* S_a *amenant* F_0 *en* F_1. De cela, on peut déduire facilement qu'*il existe une transformation, et une seule, amenant* F_1 *en* F_2, *à savoir la transformation* $S_a^{-1} S_b$ (si S_b est la transformation qui amène F_0 en F_2).

En particulier, la figure F_0 pourra toujours être formée d'un nombre fini de points. Par exemple, si l'on considère le groupe des déplacements dans l'espace à trois dimensions, on pourra prendre pour F_0 un triangle (ou un tétraèdre, ou un trièdre trirectangle, etc.).

Dans tous les cas, on arrive ainsi dans l'espace à n dimensions

à une famille de figures F dépendant évidemment de r paramètres. Le choix de ces paramètres est arbitraire. De quelque manière que ce choix soit fait, nous désignerons par F_ξ celle des figures F qui correspond aux paramètres $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$. En particulier, la figure initiale F_0 correspond à certains paramètres $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_r^0$.

Nous désignerons par Σ_ξ la transformation de G qui amène F_0 en F_ξ. La transformation Σ_ξ coïncide avec S_ξ si l'on a pris pour paramètres $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ de la figure F_ξ, précisément les paramètres de la transformation du groupe G qui amène F_0 en F_ξ.

La figure F peut jouer le rôle d'une *figure de référence*. A ce point de vue, nous adopterons les définitions suivantes :

On appelle *coordonnées relatives* d'un point M de l'espace à n dimensions, par rapport à la figure F_a, les coordonnées du point P qui donne le point M lorsqu'on applique à ce point P la transformation Σ_a. En particulier, les coordonnées relatives d'un point M, par rapport à la figure initiale F_0, sont ses coordonnées ordinaires, que nous appellerons, par opposition, coordonnées *absolues*. Si les équations de la transformation Σ_a sont

$$(1) \qquad x'_i = \overline{f}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_r),$$

ces formules peuvent être interprétées de la manière suivante :

Elles établissent les relations qui existent entre les coordonnées ABSOLUES $x'_1, \ldots, x'_n$ *d'un point* M, *les coordonnées* RELATIVES $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *de ce point* M *et les paramètres* $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *de la figure de référence* F_a *par rapport à laquelle on a pris les coordonnées relatives de* M.

Si l'on considère deux figures de référence F_a et F_b, le lieu des points qui ont pour coordonnées *absolues* les coordonnées *relatives* des différents points de F_b, par rapport à F_a, est encore une figure F, à savoir la figure qui se déduit de F_b par la transformation Σ_a^{-1}, autrement dit la figure $F_b\Sigma_a^{-1}$. On peut dire, d'une manière plus intuitive, que la position *relative* de F_b par rapport à F_a est identique à la position relative de $F_b\Sigma_a^{-1}$ par rapport à F_0.

Employons l'expression cinématique de *déplacement* pour désigner la transformation qui, appliquée à une figure F, donne une autre figure F. Appelons *coordonnées absolues* du déplacement qui amène F_a en F_b les paramètres de la transformation Σ qui, ap-

pliquée à F_a, donne F_b. Appelons *coordonnées relatives* de ce déplacement les paramètres de la transformation Σ qui, appliquée à F_0, donne la figure placée par rapport à F_0 comme F_b l'est par rapport à F_a.

D'après ces définitions, *les coordonnées* ABSOLUES *du déplacement qui amène* F_a *en* F_b *sont les paramètres de la transformation*

$$\Sigma_a^{-1}\Sigma_b;$$

les coordonnées RELATIVES *du déplacement qui amène* F_a *en* F_b *sont les paramètres de la transformation*

$$\Sigma_b\Sigma_a^{-1}.$$

Cela étant bien établi, considérons la figure F_ξ, regardée comme dépendant de r paramètres *variables*, et la figure infiniment voisine $F_{\xi+d\xi}$. *Les coordonnées* ABSOLUES *et les coordonnées* RELATIVES *du déplacement infiniment petit de la figure* F_ξ *sont respectivement les paramètres des transformations*

$$\Sigma_\xi^{-1}\Sigma_{\xi+d\xi} \quad \text{et} \quad \Sigma_{\xi+d\xi}\Sigma_\xi^{-1}.$$

Il résulte des considérations du paragraphe I que *le groupe* Γ *à* r *variables* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ *qui indique comment* G *transforme entre elles les figures* F *peut être regardé comme le plus grand groupe laissant invariantes les coordonnées* RELATIVES *du déplacement infiniment petit de la figure de référence mobile* F.

Dans le cas du groupe des déplacements de l'espace à trois dimensions, si l'on prend pour figure F un trièdre trirectangle, les coordonnées relatives du déplacement infiniment petit de F sont, par exemple, les composantes sur les axes mobiles de la translation et de la rotation infiniment petites que subit le trièdre F.

III.

Considérons la figure de référence mobile F_ξ supposée dépendre de r paramètres variables, et considérons les coordonnées relatives $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'un point *fixe* M. On a, en désignant par $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ les coordonnées absolues de M, les formules

$$x_i^0 = \overline{f}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \tag{1}$$

déjà écrites au paragraphe précédent.

Il résulte de là que $x_1, x_2, \ldots, x_n$, considérées comme fonctions des ξ, satisfont à un système d'équations aux différentielles totales complètement intégrables, qu'on obtient immédiatement en différentiant totalement les équations (1).

Si nous désignons, comme auparavant, par

$$\xi_1^0 + \omega_1, \quad \xi_2^0 + \omega_2, \quad \ldots, \quad \xi_r^0 + \omega_r,$$

les coordonnées relatives du déplacement infiniment petit de la figure F_ξ, le système d'équations aux différentielles totales dont il est question peut toujours se mettre sous la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} dx_1 - X_{11}(x, \xi)\omega_1 - X_{21}(x, \xi)\omega_2 + \ldots + X_{r1}(x, \xi)\omega_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_n - X_{1n}(x, \xi)\omega_1 + X_{2n}(x, \xi)\omega_2 + \ldots + X_{rn}(x, \xi)\omega_r = 0. \end{array}\right.$$

Ce système jouit de la propriété remarquable que les coefficients X_{ki} *ne dépendent que des variables* x, *mais non des variables* ξ [1].

En effet, appliquons à la figure F_ξ la transformation fixe Σ_a; soit $F_{\xi'}$ la figure obtenue : le point M' qui a pour coordonnées relatives $x_1, x_2, \ldots, x_n$, par rapport à $F_{\xi'}$ est évidemment un point fixe; il résulte, en effet, du point fixe M par la transformation Σ_a. Donc les équations (2) restent identiques à elles-mêmes si, sans changer les x, on remplace les ξ par les ξ'. Or, par cette transformation, nous savons que $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ ne changent pas : donc les coefficients X_{ki} ne changent pas non plus. Donc on a

$$X_{ki}(x, \xi') = X_{ki}(x, \xi),$$

et cela, quels que soient $x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_r$ (une fois que les ξ' ont été remplacés par leurs expressions en fonction des ξ). Or, le groupe Γ est simplement transitif; autrement dit, on peut toujours choisir les constantes $a_1, \ldots, a_r$ de manière qu'à des valeurs données de $\xi_1, \ldots, \xi_r$ correspondent des valeurs données de $\xi'_1, \ldots, \xi'_r$. Cela n'est possible que si X_{ki} ne dépend pas de $\xi_1, \ldots, \xi_r$.

Les équations (2) peuvent s'écrire symboliquement sous une

---

[1] Au fond ce théorème n'est pas autre chose que la première proposition fondamentale de Lie (LIE ENGEL, *Transformationsgruppen*, t. I, p. 33).

forme simple. Introduisons une fonction arbitraire f de x_1, x_2, ..., x_n, et posons

$$X_i f = X_{i1}(x)\frac{\partial f}{\partial x_1} + X_{i2}(x)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_{in}(x)\frac{\partial f}{\partial x_n}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r).$$

Les équations (2) s'écrivent alors

$$(3) \qquad df + X_1 f\omega_1 + X_2 f\omega_2 + \ldots + X_r f\omega_r = 0.$$

Les expressions $X_1 f$, $X_2 f$, ..., $X_r f$ *ne sont autres que les symboles des transformations infinitésimales du groupe* G. En effet, on peut, pour calculer les coefficients $X_{ki}(x)$, donner aux ξ des valeurs fixes arbitraires, par exemple ξ_1^0, ξ_2^0, ..., ξ_r^0, tout en laissant à $d\xi_1$, $d\xi_2$, ..., $d\xi_r$ des valeurs indéterminées. Or on a

$$\overline{f_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \xi_1^0, \ldots, \xi_r^0) \equiv x_i.$$

Dans ces conditions, la différentiation totale des formules (1) donne, si l'on y fait ensuite $\xi_i = \xi_i^0$,

$$dx_i + \left(\frac{\partial \overline{f_i}}{\partial \xi_1}\right)_0 d\xi_1 + \left(\frac{\partial \overline{f_i}}{\partial \xi_2}\right)_0 d\xi_2 + \ldots + \left(\frac{\partial \overline{f_i}}{\partial \xi_r}\right)_0 d\xi_r = 0.$$

Supposons choisies ω_1, ω_2, ..., ω_r de manière que ces expressions se réduisent, pour $\xi_i = \xi_i^0$, à $d\xi_1$, $d\xi_2$, ..., $d\xi_r$. On a alors

$$X_{ki}(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_k}\right)_0.$$

Or, la transformation infinitésimale du groupe G, qui correspond aux paramètres ξ_1^0, ξ_2^0, ..., $\xi_k^0 + \varepsilon_k$, ..., ξ_x^0, a pour équations

$$x'_i = x_i + \varepsilon_k\left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_k}\right)_0,$$

ce qui démontre le théorème.

Les résultats précédents permettent le calcul facile des transformations infinitésimales, ainsi que des expressions ω_1, ω_2, ..., ω_r, lorsqu'on connaît les équations finies du groupe. Prenons, par exemple, le groupe

$$x' = \frac{ax + b}{cx + 1}$$

ou

$$x' = \frac{\xi_1 x + \xi_2}{\xi_3 x + 1}.$$

L'équation aux différentielles totales qui donne la coordonnée mobile x d'un point fixe est ici

$$d\frac{\xi_1 x - \xi_2}{\xi_3 x + 1} = 0$$

ou, en développant,

$$(\xi_1 - \xi_2\xi_3)\,dx + d\xi_2 + x(d\xi_1 - \xi_2\,d\xi_3 + \xi_3\,d\xi_2) + x^2(\xi_3\,d\xi_1 - \xi_1\,d\xi_3) = 0.$$

Par suite, on peut prendre

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad X_2 f = x\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad X_3 f = x^2\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\omega_1 = \frac{d\xi_2}{\xi_1 - \xi_2\xi_3}, \qquad \omega_2 = \frac{d\xi_1 - \xi_2\,d\xi_3 - \xi_3\,d\xi_2}{\xi_1 - \xi_2\xi_3}, \qquad \omega_3 = \frac{\xi_3\,d\xi_1 - \xi_1\,d\xi_3}{\xi_1 - \xi_2\xi_3}.$$

IV.

La formule symbolique

$$(1) \qquad df + X_1 f\omega_1 + X_2 f\omega_2 + \ldots + X_r f\omega_r = 0$$

fournit le *lien* entre les deux théories existantes de la *structure*, l'une fondée sur la considération des transformations infinitésimales $X_k f$; l'autre fondée sur la considération des expressions différentielles ω_k; cette dernière est susceptible seule de s'étendre aux groupes infinis de transformations.

Rappelons que, dans la théorie classique, les *crochets* de deux transformations infinitésimales $X_i f$ et $X_k f$ quelconques s'expriment linéairement au moyen des Xf, d'après la formule

$$(2) \qquad X_i(X_k f) - X_k(X_i f) = \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r),$$

où les c_{iks} sont des *constantes*, appelées les *constantes de structure*.

De même, si l'on considère les covariants bilinéaires des expressions ω_k, ils peuvent s'exprimer d'après les formules

$$(3) \quad \omega'_s = d\omega_s^\delta - \delta\omega_s^d = \sum_{i,k}^{1,2,\ldots,r} c_{iks}(\omega_i^d\omega_k^\delta - \omega_i^\delta\omega_k^d) \qquad (s = 1, 2, \ldots, r).$$

On a, dans ces formules, introduit deux symboles de différentiation

d et δ, échangeables entre eux, et l'on a désigné par ω_k^d et ω_k^δ ce que devient ω_k quand on fait usage respectivement, pour désigner les différentielles des ξ, des symboles d et δ.

Or, la considération du système d'équations aux différentielles totales (1) permet de passer des formules (2) aux formules (3) et inversement.

Les équations

$$(4)\qquad \begin{cases} df + X_1 f\omega_1^d + X_2 f\omega_2^d + \ldots + X_r f\omega_r^d = 0, \\ \delta f + X_1 f\omega_1^\delta + X_2 f\omega_2^\delta + \ldots + X_r f\omega_r^\delta = 0, \end{cases}$$

identiquement vérifiées quand on remplace, dans une fonction quelconque f de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les x par leurs valeurs en fonction des ξ, entraînent comme conséquence l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=r} X_i f(d\omega_i^\delta - \delta\omega_i^d) + \sum_{i=1}^{i=r} (dX_i f\omega_i^\delta - \delta X_i f\omega_i^d) = 0,$$

ou, en tenant compte des équations (4),

$$(5)\qquad \sum_{s=1}^{s=r} X_s f(d\omega_s^\delta - \delta\omega_s^d) = \sum_{i,k}^{1,2,\ldots,r} [X_i(X_k f) - X_k(X_i f)](\omega_i^d\omega_k^\delta - \omega_i^\delta\omega_k^d).$$

La formule précédente montre immédiatement que les équations (2) entraînent les équations (3) et que, réciproquement, les équations (3) entraînent les équations (2).

V.

Reprenons les équations aux différentielles totales

$$(1)\qquad \begin{cases} dx_1 + X_{11}\omega_1 + X_{21}\omega_2 + \ldots + X_{r1}\omega_r = 0, \\ dx_2 + X_{12}\omega_1 + X_{22}\omega_2 + \ldots + X_{r2}\omega_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_n + X_{1n}\omega_1 + X_{2n}\omega_2 + \ldots + X_{rn}\omega_r = 0, \end{cases}$$

qui admettent pour intégrales générales les coordonnées mobiles d'un point fixe. Au lieu de supposer que les paramètres $\xi_1, \ldots, \xi_r$ de la figure de référence mobile F_ξ sont arbitraires, on peut supposer qu'ils sont liés par certaines relations, ou, si l'on préfère, qu'ils sont fonction d'un certain nombre $\rho < r$ de paramètres arbi-

traires $t_1, t_2, \ldots, t_\rho$; l'intégrale générale du système (1) sera toujours fournie par des formules de la forme

$$(2) \qquad C_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

où les C_i sont des constantes arbitraires.

Plus généralement, il en sera ainsi si l'on prend pour $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ des expressions linéaires en $dt_1, dt_2, \ldots, dt_\rho$, les coefficients étant des fonctions des t assujetties à ce que les relations

$$(3) \qquad d\omega_s^{\delta} - \delta\omega_s^{d} = \sum_{i,k}^{1,2,\ldots,r} c_{iks}(\omega_i^{d}\omega_k^{\delta} - \omega_i^{\delta}\omega_k^{d}) \qquad (s = 1, 2, \ldots, r)$$

soient vérifiées identiquement. Dans ce cas, l'intégrale générale du système (1) sera donnée par les formules (2) où les ξ désignent certaines fonctions *convenablement choisies* de $t_1, t_2, \ldots, t_\rho$.

En particulier, si $\rho = 1$, on pourra prendre pour $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ des expressions de la forme

$$\omega_i = \alpha_i(t)\,dt,$$

les $\alpha_i(t)$ étant des fonctions arbitraires de t, et l'on aura ce qu'on appelle, d'après M. Vessiot, *un système d'équations différentielles de Lie*

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} - \alpha_1(t)X_{11} - \alpha_2(t)X_{21} - \ldots - \alpha_r(t)X_{r1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} - \alpha_1(t)X_{1n} - \alpha_2(t)X_{2n} + \ldots - \alpha_r(t)X_{rn} = 0; \end{array} \right.$$

ce système est dit *associé* au groupe G.

Réciproquement, par la méthode de Mayer, l'intégration d'un système d'équations aux différentielles totales tel que (1) se ramène à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires tel que (4).

Les propriétés des systèmes (4) [et par suite (1)] sont bien connues après les recherches de Lie et de M. Vessiot [1]. Je me

---

[1] *Voir* à ce sujet VESSIOT, *Équations différentielles, méthodes d'intégration élémentaire* (*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. II, 16, 1910, p. 131 et suiv.).

contenterai de montrer comment les intégrations de deux systèmes associés à deux groupes isomorphes G et G′ peuvent se ramener l'une à l'autre. Soient (1) le système associé au groupe (G) et

$$(1')\quad \begin{cases} dy_1 + Y_{11}\,\varpi_1 + Y_{21}\,\varpi_2 + \ldots + Y_{r1}\,\varpi_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ dy_m + Y_{1m}\varpi_1 + Y_{2m}\varpi_2 + \ldots + Y_{rm}\varpi_r = 0 \end{cases}$$

le système associé au groupe (1′). On peut toujours supposer que les expressions ϖ ont été choisies de manière à vérifier les identités

$$(3')\qquad d\varpi_s^\delta - \delta\varpi_s^d = \sum_{i,k}^{1,2,\ldots,r} c_{iks}(\varpi_i^d\varpi_k^\delta - \varpi_i^\delta\varpi_k^d),$$

où les expressions c_{iks} ont les mêmes valeurs que dans les formules (3).

Cela étant, supposons d'abord que l'on connaisse les équations finies de G et de G′, et que de plus l'on sache établir, entre les transformations de G et celles de G′, une correspondance, assurant l'isomorphisme. Autrement dit, si l'on pose

$$\omega_s = \alpha_{s1}(\xi)\,d\xi_1 + \ldots + \alpha_{sr}(\xi)\,d\xi_r,$$
$$\varpi_s = \beta_{s1}(\eta)\,d\eta_1 + \ldots + \beta_{sr}(\eta)\,d\eta_r.$$

Supposons qu'on sache calculer les η en fonction des ξ de manière à avoir identiquement

$$\omega_s \equiv \varpi_s ;$$

dans ce cas, rien n'empêche de supposer $\beta_{si} \equiv \alpha_{si}$ et $\eta_i = \xi_i$. Si alors les deux groupes sont définis respectivement par les formules

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$y'_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_m; \xi_1, \ldots, \xi_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

et si l'intégrale générale du système (1) est fournie par

$$C_i = f_i[x_1, \ldots, x_n; \xi_1(t_1, \ldots, t_\rho), \ldots, \xi_r(t_1, \ldots, t_\rho)],$$

l'intégrale générale du système (1′) sera fournie par

$$C'_i = \varphi_i[y_1, \ldots, y_m; \xi_1(t_1, \ldots, t_\rho), \ldots, \xi_r(t_1, \ldots, t_\rho)].$$

Si l'on ne connaît pas une correspondance isomorphique entre les groupes G et G′, on intégrera d'abord le système

$$
(5) \qquad \left\{
\begin{array}{l}
dx_1 + X_{11}\varpi_1 + \ldots + X_{r1}\varpi_r = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
dx_n + X_{1n}\varpi_1 + \ldots + X_{rn}\varpi_r = 0,
\end{array}
\right.
$$

où l'on regarde η_i comme des variables indépendantes ; l'intégrale générale de ce système est fournie par

$$C'_i = f_i[x_1, \ldots, x_n; \chi_1(\eta_i), \ldots, \chi_r(\eta_i)],$$

et l'on aura une correspondance isomorphique entre les deux groupes en posant

$$\xi_1 = \chi_1(\eta_i), \qquad \ldots, \qquad \xi_r = \chi_r(\eta_i).$$

Dans ce cas, l'intégration du système (1′) sera ramenée à celle de deux systèmes associés au groupe G.

L'intégration du même système (5) fournirait les équations finies du groupe G′ dans le cas où l'on ne connaîtrait que les équations de définition de ses transformations finies : mais la démonstration de ce point particulier m'entraînerait un peu loin.

VI.

Laissons maintenant de côté la théorie des équations différentielles de Lie. J'ai développé, dans un Mémoire précédent, une théorie générale de l'équivalence des systèmes différentiels par rapport aux groupes continus, finis ou infinis.

Je vais montrer, sur un exemple particulier, comment, dans le cas des groupes finis, la méthode que j'ai exposée se rattache aux considérations précédentes et à la théorie des figures de référence mobiles.

Je supposerai, dans l'espace à n dimensions, un groupe G fini et *transitif* à $r > n$ paramètres. Je remarque d'abord que je puis choisir pour les n premiers paramètres $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ les coordonnées du point M dans lequel la transformation considérée trans-

forme un point fixe $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. On a alors identiquement

$$\xi_i = \bar{f}_i(x_1^0, \ldots, x_n^0; \xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots, \xi_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les identités précédentes montrent qu'on a, pour $x_i = x_i^0$,

$$\frac{\partial f_i}{\partial \xi_{n+1}} = \frac{\partial f_i}{\partial \xi_{n+2}} = \ldots = \frac{\partial f_i}{\partial \xi_r} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cela prouve que, si, dans les formules (2) (III), on donne, dans les coefficients $X_{ik}(x)$, aux variables x_i les valeurs x_i^0, les premiers membres ne contiennent pas de termes en $d\xi_{n+1}, \ldots, d\xi_r$. Autrement dit, les n expressions de Pfaff

$$X_{i1}(x_0)\,\omega_1 + X_{i2}(x_0)\,\omega_2 + \ldots + X_{ir}(x_0)\,\omega_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sont des combinaisons linéaires de $d\xi_1, \ldots, d\xi_n$.

Rien n'empêche de supposer que ces n expressions de Pfaff sont précisément

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_n,$$

lesquelles par suite ne contiennent aucun terme en $d\xi_{n+1}, \ldots, d\xi_r$.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'étudier l'équivalence, par rapport au groupe G, des variétés à p dimensions de l'espace $(x_1, \ldots, x_n)$. A chaque point M d'une variété donnée, on fera correspondre une figure de référence F telle que le point M ait pour coordonnées relatives par rapport à F les nombres fixes $x_1^0, \ldots, x_n$. En général, cette correspondance sera possible d'une infinité de manières, et l'on cherchera, *par un procédé indépendant de la variété particulière considérée*, à particulariser le plus possible le choix de la figure F. Les coordonnées relatives du déplacement infiniment petit de la figure F, quand on passe d'un point M de la variété à un point infiniment voisin, admettront en général des *invariants différentiels* qui serviront à classer toutes les variétés possibles.

Sans entrer dans des détails plus précis, nous allons étudier la méthode sur un exemple particulier : nous allons faire la théorie de *la congruence des surfaces par rapport au groupe des déplacements de l'espace à trois dimensions.*

VII.

Calculons d'abord les expressions ω. Nous prendrons pour figure de référence un trièdre trirectangle quelconque ; nous désignerons par ξ_1, ξ_2, ξ_3 les coordonnées fixes de son origine, c'est-à-dire les coordonnées absolues du point dont les coordonnées relatives sont $(0, 0, 0)$.

Les équations des transformations du groupe sont

$$\begin{aligned} x' &= a x + b y + c z + \xi_1, \\ y' &= a' x + b' y + c' z + \xi_2, \\ z' &= a'' x + b'' y + c'' z + \xi_3, \end{aligned}$$

où les 9 cosinus directeurs sont fonctions de $\xi_1, \ldots, \xi_6$.

Les formules (2) (III) s'obtiennent ici par la résolution des équations

$$\begin{aligned} a\,dx + b\,dy + c\,dz + x\,da + y\,db + z\,dc + d\xi_1 &= 0, \\ a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz + x'\,da' + y\,db' + z\,dc' + d\xi_2 &= 0, \\ a''\,dx + b''\,dy + c''\,dz + x''\,da'' + y\,db'' + z\,dc'' + d\xi_3 &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} dx + \omega_1 - z\varpi_2 + y\varpi_3 &= 0, \\ dy + \omega_2 - x\varpi_3 + z\varpi_1 &= 0, \\ dz + \omega_3 + y\varpi_1 - x\varpi_2 &= 0 \end{aligned} \right.$$

en posant

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= a\,d\xi_1 + a'\,d\xi_2 + a''\,d\xi_3, \\ \omega_2 &= b\,d\xi_1 + b'\,d\xi_2 + b''\,d\xi_3, \\ \omega_3 &= c\,d\xi_1 + c'\,d\xi_2 + c''\,d\xi_3, \end{aligned} \right.$$

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varpi_1 &= c\,db + c'\,db' + c''\,db'' = -(b\,dc + b'\,dc' + b''\,dc''), \\ \varpi_2 &= a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'' = -(c\,da + c'\,da' + c''\,da''), \\ \varpi_3 &= b\,da + b'\,da' + b''\,da'' = -(a\,db + a'\,db' + a''\,db''). \end{aligned} \right.$$

Les transformations infinitésimales sont

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_3 f = \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$Y_1 f = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad Y_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad Y_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

On calcule sans difficulté les coefficients de structure et l'on

trouve (¹)

$$
(4) \quad \left\{
\begin{aligned}
\omega'_1 &= \omega_3\varpi_2 - \omega_2\varpi_3,\\
\omega'_2 &= \omega_1\varpi_3 - \omega_3\varpi_1,\\
\omega'_3 &= \omega_2\varpi_1 - \omega_1\varpi_2;\\
\varpi'_1 &= \varpi_3\varpi_2,\\
\varpi'_2 &= \varpi_1\varpi_3,\\
\varpi'_3 &= \varpi_2\varpi_1.
\end{aligned}
\right.
$$

Les expressions ω_1, ω_2, ω_3 représentent les composantes de la translation instantanée, et les expressions ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 les composantes de la rotation instantanée du trièdre mobile F.

A partir de maintenant, *nous n'aurons à nous servir que des formules de structure* (4) *et du fait que* ω_1, ω_2, ω_3 *sont trois expressions linéairement indépendantes en* $d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$.

VIII.

Considérons donc une surface quelconque. Les coordonnées ξ_1, ξ_2, ξ_3 d'un de ses points M peuvent être regardées comme des fonctions de deux paramètres t_1, t_2. Nous faisons correspondre au point M une figure F (trièdre trirectangle) telle que les coordonnées relatives de M par rapport à F soient (o, o, o). Cela est possible d'une infinité de manières; le point M étant donné, la position la plus générale de F dépend de $r - n = 3$ paramètres arbitraires que nous désignerons par u_1, u_2, u_3. Cela étant, ω_1, ω_2, ω_3 sont des expressions linéaires en dt_1 et dt_2, tandis que ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 sont linéaires en dt_1, dt_2, du_1, du_2, du_3. Les coefficients dans les deux cas sont des fonctions des t et des u.

Nous ferons usage de deux symboles de différentiations d et δ, le premier symbole d se rapportant à la différentiation par rapport à t_1 et t_2, le second symbole par rapport à u_1, u_2 et u_3. En particulier on a

$$\delta\xi_1 = \delta\xi_2 = \delta\xi_3 = 0$$

(¹) On a posé, pour abréger,

$$\omega' = d\omega^{\delta} - \delta\omega^{d},$$

$$\omega_1\omega_2 = \omega_1^{d}\omega_2^{\delta} - \omega_2^{d}\omega_1^{\delta}.$$

Les formules (4) ne sont pas autre chose, à la notation près, que les relations classiques dans la théorie du trièdre mobile, entre les composantes ξ, ξ_1, ..., η, η_1, ..., ζ, ζ_1, ..., p, p_1, ..., r, ..., r_1 d'un déplacement instantané à plusieurs paramètres et leurs dérivées partielles du premier ordre.

et par suite

$$\omega_1^\delta = \omega_2^\delta = \omega_3^\delta = 0.$$

Les formules (4) du paragraphe précédent nous donneront

$$\delta\omega_1^d = \omega_2^d \varpi_3^\delta - \omega_3^d \varpi_2^\delta,$$
$$\delta\omega_2^d = \omega_3^d \varpi_1^\delta - \omega_1^d \varpi_3^\delta,$$
$$\delta\omega_3^d = \omega_1^d \varpi_2^\delta - \omega_2^d \varpi_1^\delta.$$

Cela prouve que lorsqu'on passe d'une figure F correspondant au point M à une autre figure F′ correspondant au même point, les coordonnées ω_1, ω_2, ω_3 subissent les transformations d'un groupe linéaire et homogène à trois paramètres (fonctions des t et des u), dont les transformations infinitésimales sont

$$(1)\quad \begin{cases} \delta\omega_1 = e_3\omega_2 - e_2\omega_3 \\ \delta\omega_2 = e_1\omega_3 - e_3\omega_1 \\ \delta\omega_3 = e_2\omega_1 - e_1\omega_2 \end{cases} \qquad (e_i = \varpi_i^\delta).$$

Or ω_1, ω_2, ω_3 sont liées par une relation linéaire et homogène, puisqu'elles sont linéaires en dt_1 et dt_2. *La première chose à faire est de disposer des paramètres du groupe linéaire* (1) *pour particulariser cette relation.* Or, si l'on regarde provisoirement ω_1, ω_2, ω_3 comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace, le groupe (1) est le groupe des déplacements autour de l'origine, et *nous avons à étudier l'équivalence, par rapport à ce groupe, des plans passant par l'origine.* Or, tout plan est équivalent, soit au plan

$$\omega_3 = 0,$$

soit au plan

$$\omega_1 + i\omega_2 = 0.$$

Nous avons donc deux grands cas à considérer.

IX.

I. On a $\omega_3 = 0$ [1]. Les formules (1) montrent alors qu'on a

$$\varpi_1^\delta = \varpi_2^\delta = 0;$$

[1] Cela veut dire géométriquement que le plan des xy du trièdre mobile est tangent à la surface. Remarquons, d'ailleurs, que le ds^2 de la surface est, dans tous les cas, $\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$.

autrement dit ϖ_1 et ϖ_2 deviennent des expressions linéaires en dt_1, dt_2, et la position de la figure F, particularisée comme il a été dit, ne dépend plus, pour chaque point M, que d'un paramètre u. En portant $\omega_3 = 0$ dans les formules (4) (VII), on obtient

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega_1' &= -\omega_2\varpi_3,\\ \omega_2' &= \omega_1\varpi_3,\\ \varpi_1' &= \varpi_3\varpi_2,\\ \varpi_2' &= \varpi_1\varpi_3,\\ \varpi_3' &= \varpi_2\varpi_1,\end{aligned}\right.$$

avec

$$(3)\qquad \omega_2\varpi_1 - \omega_1\varpi_2 = 0.$$

En posant donc

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \varpi_1 &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\\ \varpi_2 &= \alpha'\omega_1 + \beta'\omega_2,\end{aligned}\right.$$

on doit avoir, d'après (3),

$$\alpha + \beta' = 0.$$

On a maintenant, d'après les formules (2),

$$\begin{aligned} \delta\omega_1 &= \omega_2\varpi_3^\delta,\\ \delta\omega_2 &= -\omega_1\varpi_3^\delta,\\ \delta\varpi_1 &= \varpi_2\varpi_3^\delta,\\ \delta\varpi_2 &= -\varpi_1\varpi_3^\delta,\end{aligned}$$

ce qui montre que lorsqu'on passe d'une figure F à une autre figure F′ correspondant au même point M, les quantités $\omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2$ subissent les transformations d'un groupe linéaire et homogène à 1 paramètre. Par suite, les coefficients α, β, α' des relations (4) subissent, elles aussi, les transformations d'un groupe dont la transformation infinitésimale s'obtient facilement ; on a

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta\alpha &= e_3(\alpha' + \beta),\\ \delta\beta &= 2e_3\alpha,\\ \delta\alpha' &= -2e_3\alpha\end{aligned}\right. \qquad (e_3 = \varpi_3^\delta).$$

Le problème qui se pose maintenant est d'étudier dans l'espace à trois dimensions (α, β, α') l'équivalence des points de cet espace

par rapport au groupe (5). Or, on voit immédiatement que $\beta - \alpha'$ est un invariant, que de plus il en est de même de

$$4\alpha^2 + (\alpha' + \beta)^2.$$

Nous avons ainsi trois cas à distinguer :

1. $\alpha = 0, \quad \alpha' - \beta = 0,$

2. $\alpha = 0, \quad \alpha' - \beta \neq 0,$

3. $\alpha = 1, \quad \alpha' + \beta = 2i.$

I_1. Dans ce premier cas on a, en changeant les notations,

$$\varpi_1 = \rho\omega_2,$$
$$\varpi_2 = -\rho\omega_1.$$

En portant les valeurs de ϖ'_1 et ϖ'_2 dans les formules (2), on trouve

$$d\rho\,\omega_1 = d\rho\,\omega_2 = 0,$$

ce qui prouve que $d\rho$ est nul, c'est-à-dire que ρ est une constante. La position de la figure F continue à dépendre, pour chaque point M, d'un paramètre arbitraire, et l'on a

$$(2') \qquad \begin{cases} \omega'_1 = -\omega_2\varpi_3, \\ \omega'_2 = \omega_1\varpi_3, \\ \varpi'_3 = -\rho^2\omega_1\omega_2. \end{cases}$$

Ces formules prouvent que *deux surfaces pour lesquelles ρ a la même valeur constante sont congruentes et que chacune d'elles admet un groupe de déplacements à trois paramètres dont la structure est définie par les formules* (2').

Ces surfaces sont des sphères si ρ est différent de 0, et des plans si $\rho = 0$. Le trièdre mobile est ici tangent à la surface, mais n'est soumis à aucune autre restriction. Les coordonnées du déplacement instantané du trièdre mobile sont :

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad 0; \quad \rho\omega_2, \quad -\rho\omega_1, \quad \varpi_3,$$

I_2. Dans ce cas, on a

$$\alpha = 0, \qquad \alpha' - \beta \neq 0;$$

nous poserons

$$\alpha' = -\rho_1, \qquad \beta = \rho_2;$$

les quantités ρ_1 *et* ρ_2 *sont deux invariants*, et l'on a

$$\varpi_1 = \rho_2 \omega_2, \qquad \varpi_2 = -\rho_1 \omega_1 \qquad (\rho_1 \neq \rho_2).$$

Quant à ϖ_3^0, les formules ($2'$) montrent qu'il est nul; autrement dit, *la position de la figure* F *est maintenant bien déterminée pour chaque point* M. Quant à ϖ_3, qui est maintenant une combinaison linéaire de ω_1 et ω_2, nous poserons

$$\varpi_3 = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2,$$

λ_1 et λ_2 étant deux nouveaux invariants.

Les quatre invariants ρ_1, ρ_2, λ_1 λ_2 sont les invariants *fondamentaux*. De chaque invariant I on peut en déduire deux autres par la formule

$$dI = I^{(1)} \omega_1 + I^{(2)} \omega_2; \tag{6}$$

$I^{(1)}$ et $I^{(2)}$ sont les invariants *dérivés* de I.

En portant les expressions ω_1, ω_2, ω_3 dans les formules (2), on obtient

$$\begin{cases} \omega'_1 = \lambda_1 \omega_1 \omega_2, \\ \omega'_2 = \lambda_2 \omega_1 \omega_2, \end{cases} \tag{7}$$

puis

$$\begin{cases} \rho_2^{(2)} = \lambda_2(\rho_1 - \rho_2), \\ \rho_1^{(2)} = \lambda_1(\rho_1 - \rho_2), \\ \lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(1)} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \rho_1 \rho_2. \end{cases} \tag{8}$$

Les invariants dérivés de ρ_1, ρ_2, λ_1, λ_2 introduisent donc seulement cinq invariants vraiment nouveaux $\rho_1^{(1)}$, $\rho_2^{(2)}$, $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_1^{(2)}$, $\lambda_2^{(2)}$. Remarquons, enfin, que chaque invariant I a quatre invariants dérivés du second ordre $I^{(11)}$, $I^{(12)}$, $I^{(21)}$, $I^{(22)}$, mais qu'ils sont liés par la relation

$$I^{(12)} - I^{(21)} = \lambda_1 I^{(1)} + \lambda_2 I^{(2)}$$

qu'on obtient en prenant les covariants bilinéaires des deux membres de la formule (6).

De là résulte que le nombre des invariants dérivés d'ordre n de ρ_1, ρ_2, λ_1, λ_2, qui ne se ramènent pas à des invariants dérivés d'ordre inférieur, est égal à $n+4$, par exemple

$$\rho_1^{(11\ldots1)}, \quad \rho_2^{(22\ldots2)}, \quad \lambda_1^{(11\ldots1)}, \quad \lambda_1^{(11\ldots2)}, \quad \ldots, \quad \lambda_1^{(22\ldots2)}, \quad \lambda_2^{(22\ldots2)}.$$

On peut interpréter géométriquement les résultats précédents. D'abord le trièdre mobile correspondant à chaque point M de la surface a ses axes des x et des y tangents aux lignes de courbure; de plus, ρ_1 et ρ_2 sont les courbures principales en M, λ_1 et λ_2 les courbures géodésiques des lignes de courbures qui passent par M. Les invariants dérivés $I^{(1)}$ et $I^{(2)}$ sont les dérivés de I par rapport à l'axe de chacune des lignes de courbure. Les formules (8) expriment des théorèmes classiques.

Si ρ_1 et ρ_2 sont des constantes, les formules (8) montrent que λ_1 et λ_2 sont nuls; ensuite que la courbure totale $\rho_1\rho_2$ est nulle : on a donc par exemple $\rho_2 = 0$. La surface admet un groupe de déplacement à deux paramètres, dont la structure est définie par les équations (7) (où $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). Les coordonnées relatives du déplacement instantané du trièdre mobile sont

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad 0; \quad 0, \quad -\rho_1\omega_1, \quad 0.$$

Toutes les surfaces pour lesquelles ρ_1 a la même valeur constante sont congruentes : ce sont des cylindres de révolution de rayon $\frac{1}{\rho_1}\cdot$

Je ne discute pas le cas où tous les invariants sont des fonctions d'un seul d'entre eux.

I_3. Nous avons, dans ce cas, des formules de la forme

$$(4') \quad \begin{cases} \varpi_1 = \omega_1 + (i + \rho)\,\omega_2, \\ \varpi_2 = (i - \rho)\,\omega_1 - \omega_2. \end{cases}$$

La position de la figure F est parfaitement déterminée en chaque point M. On a

$$\varpi_3 = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2,$$

avec *trois invariants fondamentaux* $\rho, \lambda_1, \lambda_2$.

En portant les expressions de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ dans les formules (2), on obtient

$$(7') \quad \begin{cases} \omega_1' = \lambda_1\omega_1\omega_2, \\ \omega_2' = \lambda_2\omega_1\omega_2, \end{cases}$$

puis

$$(8') \quad \begin{cases} \rho^{(1)} = -2(\lambda_1 + i\lambda_2), \\ \rho^{(2)} = -2i(\lambda_1 + i\lambda_2), \\ \lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(1)} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \rho^2. \end{cases}$$

L'application à ρ de la formule

$$I^{(12)} - I^{(21)} = \lambda_1 I^{(1)} + \lambda_2 I^{(2)}$$

donne ensuite

$$\lambda_1^{(2)} + i\lambda_2^{(2)} - i(\lambda_1^{(1)} - i\lambda_2^{(1)}) = (\lambda_1 + i\lambda_2)^2,$$

de sorte que, parmi les invariants dérivés des trois invariants fondamentaux, il n'y en a que deux indépendants entre eux et indépendants des anciens. On démontre facilement que chaque déviation ne fournit que *deux* invariants nouveaux $\lambda_1^{(11\ldots1)}$ et $\lambda_2^{(22\ldots2)}$.

Cherchons dans quel cas l'invariant ρ est constant. On trouve alors successivement, en posant

$$\lambda_1 = -i\lambda,$$

les formules suivantes :

$$(7'') \qquad \begin{cases} \omega_1' + i\omega_2' = 0, \\ \omega_1' - i\omega_2' = \lambda(\omega_1 + i\omega_2)(\omega_1 - i\omega_2); \end{cases}$$

$$(9) \qquad \begin{cases} d\lambda = \lambda'(\omega_1 - i\omega_2) - \dfrac{1}{2}\rho^2(\omega_1 - i\omega_2), \\ d\lambda' = \lambda''(\omega_1 + i\omega_2) - \dfrac{1}{2}\rho^2\lambda(\omega_1 - i\omega_2), \\ d\lambda'' = \lambda'''(\omega_1 + i\omega_2) - \dfrac{1}{2}\rho^2(\lambda^2 - \lambda')(\omega_1 - i\omega_2). \end{cases}$$

On voit que λ ne peut être constant que si ρ est nul. On a alors une famille de surfaces dépendant essentiellement d'un paramètre (la constante λ) : chacune d'elles admet un groupe de déplacements à deux paramètres dont la structure est donnée par les formules $(7'')$.

Si ρ est nul sans que λ soit constant, λ' est une fonction d'ailleurs arbitraire de λ. Chacune des surfaces de cette espèce admet un groupe à un paramètre.

Si la valeur constante de ρ est différente de zéro, et que λ' soit une fonction de x, les formules (9) montrent qu'on a

$$d\lambda' = \lambda\, d\lambda,$$

ou

$$\lambda' = \frac{1}{2}\lambda^2 - a.$$

On a une surface de familles dépendant essentiellement de deux

constantes arbitraires ρ et α, et dont chacune admet un groupe à un paramètre.

Si, enfin, λ' n'est pas une fonction de λ, on voit facilement, d'après les formules (3), que λ'' est de la forme

$$\lambda'' = \lambda\lambda' + f\left(\lambda' - \frac{1}{2}\lambda^2\right).$$

Dans le cas général, les surfaces considérées sont les surfaces imaginaires à lignes de courbure confondues, étudiées par différents auteurs[1]. Les lignes de courbure sont, en effet, données par l'équation

$$\omega_1\varpi_1 - \omega_2\varpi_2 = (\omega_1 + i\omega_2)^2 = 0;$$

elles se confondent avec l'une des familles de lignes minima de la surface. Ce sont des surfaces réglées : en effet, la tangente à la courbe

$$\omega_1 + i\omega_2 = 0$$

a pour paramètres directeurs, par rapport au trièdre mobile,

$$(1, i, 0);$$

le plan osculateur de cette courbe sera déterminé par la tangente et le vecteur

$$(i\varpi_3, \varpi_3, \varpi_1 i - \varpi_2);$$

or, $\omega_1 + i\omega_2$ est égal à $-i\rho\,(\omega_1 + i\omega_2)$ et, par suite, est nul ; le plan osculateur est donc indéterminé et la courbe est une droite : c'est une droite minima.

On détermine facilement la loi de variation de la courbure normale et de la courbure géodésique d'une courbe tracée sur la surface et passant par un point donné M. En conservant les notations classiques pour les cosinus directeurs, par rapport aux axes mobiles, de la tangente, de la normale principale et de la trinormale, et en désignant par θ l'angle de la tangente avec l'axe des x mobile, on a

$$\alpha = \cos\theta, \qquad \beta = \sin\theta, \qquad \gamma = 0.$$

---

(1) *Voir*, en particulier, L. Raffy, *Étude sur les surfaces imaginaires de Monge à lignes de courbure confondues* (*Bulletin de la Soc. math. de France*, t. XXXVI, 1908, p. 150).

On en tire, en tenant compte de (4),

$$\frac{\alpha'}{R} = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\varpi_2}{ds}\gamma - \frac{\varpi_3}{ds}\beta = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds} - (\lambda_1\cos\theta + \lambda_2\sin\theta)\sin\theta,$$

$$\frac{\beta'}{R} = \frac{d\beta}{ds} - \frac{\varpi_3}{ds}\alpha - \frac{\varpi_1}{ds}\gamma = \cos\theta\frac{d\theta}{ds} - (\lambda_1\cos\theta + \lambda_2\sin\theta)\cos\theta,$$

$$\frac{\gamma'}{R} = \frac{d\gamma}{ds} + \frac{\varpi_1}{ds}\beta - \frac{\varpi_2}{ds}\alpha = \rho - ie^{2i\theta}.$$

Par suite, on a

$$\frac{1}{R_n} = \rho - ie^{2i\theta}, \qquad \frac{1}{R_g} = \frac{d\theta}{ds} + \lambda_1\cos\theta + \lambda_2\sin\theta.$$

On a ainsi la signification géodésique de ρ, qui est *la demi-courbure moyenne de la surface*. L'indicatrice a pour équation, dans le plan tangent à la surface,

$$\rho(x^2 + y^2) - i(x - iy)^2 = 1.$$

L'invariant ρ reste constant tout le long d'une même génératrice, comme le montre la formule

$$d\rho = -2(\lambda_1 + i\lambda_2)(\omega_1 - i\omega_2).$$

Si l'on porte sur la normale à la surface, à partir de M, une longueur égale à $\frac{1}{\rho}$, on obtient un point P qui reste le même lorsqu'on se déplace sur la génératrice. La sphère de centre P et de rayon $\frac{1}{\rho}$ se raccorde avec la surface tout le long de la génératrice. Le lieu du point P est une courbe (Γ), dont l'arc infiniment petit a pour projections sur les axes mobiles

$$\omega_1 - \frac{1}{\rho}\varpi_2, \qquad \omega_2 - \frac{1}{\rho}\varpi_1, \qquad d\frac{1}{\rho}$$

ou encore

$$\frac{i}{\rho}(\omega_1 + i\omega_2), \qquad -\frac{1}{\rho}(\omega_1 + i\omega_2), \qquad d\frac{1}{\rho};$$

on voit que $\frac{1}{\rho}$ est l'arc de cette courbe. Cette courbe (Γ) est minima si ρ est constant. La surface est l'enveloppe (ou plutôt une des deux nappes de l'enveloppe) de la sphère de rayon $\frac{1}{\rho}$ dont le centre décrit la courbe (Γ).

L'invariant ρ est aussi égal à $-\frac{i}{k}$, k désignant le paramètre de distribution de la génératrice.

Les invariants λ_1 et λ_2 sont les courbures géodésiques des courbes $\omega_2 = 0$ et $\omega_1 = 0$.

Les surfaces pour lesquelles ρ est nul sont les *cylindres* à génératrices isotropes. Celles pour lesquelles ρ est constant, ainsi que $\lambda' - \frac{1}{2}\lambda^2$ sont des hélicoïdes engendrées en imprimant à une droite isotrope donnée un mouvement hélicoïdal; comme cas particulier, on peut avoir la surface

$$x - iy = \frac{2i}{\rho}u - \frac{2\lambda}{\rho^2},$$

$$z = \frac{1}{2}iu^2 - \frac{1}{\rho}\lambda u,$$

$$x + iy = u - \frac{1}{6}i\rho u^3 + \frac{1}{2}\lambda u^2,$$

où les paramètres sont u et λ.

D'une manière générale, les relations entre les invariants étant connues, on aura la surface en intégrant le système différentiel de Lie [(1) (VII)], où l'on aurait remplacé ω_1 et ω_2 par deux expressions de Pfaff satisfaisant aux relations (7''), ω_3 par 0; ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 par leurs valeurs tirées de (4').

X.

11. Passons maintenant au second grand cas, où les expressions ω_1, ω_2, ω_3 sont liées par la relation

$$(1) \qquad \omega_1 + i\omega_2 = 0;$$

dans ce cas, le ds^2 de la surface est

$$(2) \qquad ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \omega_3^2,$$

c'est-à-dire est un carré parfait. La surface est une développable isotrope.

Les formules (1) (VIII) donnent ici

$$e_1 + ie_2 = \varpi_1^2 + i\varpi_2^2 = 0,$$

de sorte que $\varpi_1 + i\varpi_2$ est une combinaison linéaire de dt_1 et dt_2;

la position de la figure F correspondant à un point donné M de la surface ne dépend plus que de deux paramètres.

Comme on a, d'après les formules (4) (VII),

$$\omega'_1 - i\omega'_2 = -i\omega_3(\varpi_1 + i\varpi_2) + i(\omega_1 - i\omega_2)\varpi_3,$$

on doit avoir

$$\varpi_1 - i\varpi_2 = A\,\omega_3.$$

Or

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_3\varpi_2 - i\omega_1\varpi_3, \\ \omega'_3 &= i\omega_1(\varpi_1 - i\varpi_2), \\ \varpi'_1 &= \varpi_3\varpi_2, \\ \varpi'_2 &= \varpi_1\varpi_3, \\ \varpi'_3 &= \varpi_2\varpi_1 ; \end{aligned}\right.$$

par suite

$$\delta(\varpi_1 - i\varpi_2) = -i\varpi_3^\delta(\varpi_1 - i\varpi_2),$$

$$\delta\omega_3 = 0 ;$$

donc

$$\delta A = -i\varpi_3^\delta A.$$

Le coefficient A est donc soumis à un groupe à un paramètre, et l'on peut toujours disposer de ce paramètre de manière, si A n'est pas nul, à le rendre égal à 1. On a donc deux cas à distinguer :

II_1. Si $A = 0$, on a

$$\varpi_1 - i\varpi_2 = 0$$

et la position de la figure F dépend de deux paramètres arbitraires. Il n'y a plus aucune particularisation possible pour la position de cette figure. Toutes les surfaces pour lesquelles A est nul sont congruentes, et chacune d'elles admet un groupe de déplacements à quatre paramètres ; la structure de ce groupe est définie par les formules

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega'_1 &= i\omega_3\varpi_1 - i\omega_1\varpi_3, \\ \omega'_3 &= 0, \\ \varpi'_1 &= i\varpi_3\varpi_1, \\ \varpi'_3 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Les composantes du déplacement instantané de la figure mobile sont ici

$$\omega_1,\quad i\omega_1,\quad \omega_3 ;\quad \varpi_1,\quad i\varpi_1,\quad \varpi_3.$$

Les surfaces en question sont les *plans isotropes*.

II_2. Supposons maintenant

(5) $$\varpi_1 + i\varpi_2 = \omega_3;$$

on a alors

$$\varpi_3^\delta = 0.$$

En tenant compte de la formule (5), les équations (3) donnent

$$\omega_3(\varpi_3 + \omega_1) = 0;$$

d'où l'on tire

(6) $$\varpi_3 = -\omega_1 + \rho\omega_3.$$

La position de la figure mobile ne dépend plus maintenant que d'un paramètre. On a d'ailleurs

$$\delta\varpi_3 = +i\varpi_1^\delta\omega_3,$$
$$\delta\omega_1 = -i\varpi_1^\delta\omega_3,$$
$$\delta\omega_3 = 0;$$

d'où l'on tire

$$\delta\rho = 0.$$

Le coefficient ρ est donc un invariant. La formule (6) donne d'ailleurs, en tenant compte des équations (3),

$$d\rho = -2i\rho\omega_1 + B\omega_3;$$

et l'on a

$$\delta B = -2\varpi_1^\delta\rho.$$

Cela étant, il y a encore une subdivision à faire, suivant que ρ est nul ou non.

$\mathrm{II}_2 a$. Si $\rho = 0$, la position de la figure F dépend en chaque point d'un paramètre. La surface admet un groupe de déplacements à trois paramètres dont la structure est définie par les formules

$$\omega_1' = i\omega_3\varpi_1,$$
$$\omega_3' = i\omega_1\omega_3,$$
$$\varpi_1' = -i\omega_1\varpi_1 + i\omega_1\omega_3.$$

La surface est un *cône isotrope* et le groupe est celui des rotations autour d'un point fixe.

$\mathrm{II}_2 b$. Si ρ n'est pas nul, on peut particulariser la position de la

figure F de manière à annuler B; on a alors

$$(7) \qquad d\rho = -2i\rho\omega_1.$$

Cette dernière équation donne, en tenant compte de (3),

$$(8) \qquad \varpi_1 = -\rho\omega_1 + \rho'\omega_3,$$

ce qui introduit un nouvel invariant ρ'. On a, par un procédé analogue,

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} d\rho' &= i(\rho^2 + 1 - 2\rho')\omega_1 + \rho''\omega_3, \\ d\rho'' &= -3i\rho''\omega_1 + \rho'''\omega_3, \end{aligned} \right.$$

et ainsi de suite. Chaque *dérivation* donne un invariant nouveau.

On a d'ailleurs

$$(8') \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= 0, \\ \omega'_3 &= i\omega_1\omega_3, \\ \varpi_1 &= -\rho\omega_1 + \rho'\omega_3, \\ \varpi_2 &= -i\rho\omega_1 + i(\rho' - 1)\omega_3, \\ \varpi_3 &= -\omega_1 + \rho\omega_3. \end{aligned} \right.$$

Si ρ' est une fonction de ρ, on a

$$\rho' = \frac{1}{2}(1 - \rho^2) + a\rho;$$

sinon l'on a

$$\rho'' = \rho^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{2\rho' + \rho^2 - 1}{\rho}\right).$$

Si ρ n'est pas nul, la surface est une développable dont l'arête de rebroussement est une courbe minima (développable isotrope); les génératrices sont données par l'équation

$$\omega_3 = 0.$$

En effet, les paramètres directeurs de la tangente à une courbe $\omega_3 = 0$ sont, par rapport au trièdre mobile, $(1, i, 0)$; or, la vitesse du vecteur $(1, i, 0)$ a pour projections sur les axes mobiles

$$-i\varpi_3 = i\omega_1, \qquad \varpi_3 = -\omega_1, \qquad \varpi_1 i - \varpi_2 = 0;$$

autrement dit, ce vecteur est fixe en direction. Si l'on recherche le point de contact P de la génératrice avec l'arête de rebrousse-

ment, on trouve qu'il a pour coordonnées relatives

$$(i, -1, 0). \tag{10}$$

L'étude de la courbure et de la torsion des courbes tracées sur la surface et passant par un point donné M conduit à des résultats intéressants. Désignons par

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{matrix}$$

les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale, rapportées aux axes mobiles ; par $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{T}$ la courbure et la torsion. Comme

$$ds^2 = \omega_3^2,$$

on peut prendre

$$ds = \omega_3 ;$$

nous poserons alors, pour une des courbes considérées,

$$\omega_1 = u\,\omega_3 = u\,ds.$$

On a alors

$$\alpha = u, \qquad \beta = iu, \qquad \gamma = 1 ;$$

par suite, en se servant des formules (8'),

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\alpha'}{R} &= \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\omega_1}{ds} + \frac{\varpi_2}{ds}\gamma - \frac{\varpi_3}{ds}\beta = \frac{du}{ds} - iu^2 - 2i\rho u + i(\rho' - 1), \\ \frac{\beta'}{R} &= \frac{d\beta}{ds} + \frac{i\omega_1}{ds} + \frac{\varpi_3}{ds}\alpha - \frac{\varpi_1}{ds}\gamma = i\frac{du}{ds} - u^2 + 2\rho u - \rho', \\ \frac{\gamma'}{R} &= \frac{d\gamma}{ds} + \frac{\omega_3}{ds} + \frac{\varpi_1}{ds}\beta - \frac{\varpi_2}{ds}\alpha = iu. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Lorsque u est donné, les formules

$$\frac{\alpha' + i\beta'}{R} = -i, \qquad \frac{\gamma'}{R} = iu \tag{11'}$$

montrent que le lieu du centre de courbure est une droite minima dont les équations sont

$$\left\{\begin{aligned} x - iy + u^2(x - iy) &= i, \\ z + u(x + iy) &= 0. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Lorsque u varie, ces droites minima engendrent le cône isotrope dont l'équation est

$$(13)\qquad (x+iy)(x-iy-i)+z^2=0.$$

Ce cône a pour sommet le point M_1

$$\left(\frac{i}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right);$$

ce point M_1 est le milieu du segment PM. On arrive donc au théorème suivant :

Si l'on considère une développable isotrope et un de ses points M, *le lieu des centres de courbure des courbes tracées sur la surface et passant par le point* M *est la sphère de rayon nul ayant son centre au milieu du segment qui joint le point* M *au point de contact de la génératrice avec l'arête de rebroussement.*

L'étude de la torsion conduit de son côté à un théorème très remarquable. En effet, le calcul de α'', β'', γ'' donne immédiatement en particulier

$$(14)\qquad \alpha''+i\beta''=R, \qquad \gamma''=-uR;$$

or, si nous appliquons le troisième groupe des formules de Frenet, nous obtenons

$$\frac{\alpha'-i\beta'}{T}=\frac{dR}{ds}+i\frac{\varpi_3}{ds}(\alpha''+i\beta'')-i\frac{\varpi_1+i\varpi_2}{ds}\gamma'',$$

ou encore, d'après (11′) et (14),

$$-\frac{iR}{T}=\frac{dR}{ds}+i(\rho-u)R+iuR=\frac{dR}{ds}+i\rho R.$$

On a donc la formule

$$(15)\qquad \rho=i\frac{dR}{R\,ds}-\frac{1}{T}.$$

Pour toutes les courbes tracées sur la surface et passant par un point donné, l'expression $i\frac{dR}{R\,ds}-\frac{1}{T}$ *a la même valeur, et cette valeur est l'invariant* ρ *relatif au point considéré.*

L'invariant ρ' peut aussi s'exprimer en fonction de la courbure $\frac{1}{R}$, de la torsion $\frac{1}{T}$ et de leurs dérivées par rapport à l'arc de courbe quelconque passant par M. La formule (7) donne en effet

$$u = \frac{i}{2}\frac{d\rho}{\rho\, ds};$$

or les formules (11) donnent

$$\frac{1}{R^2} = -2i\frac{du}{ds} + u^2 - 4\rho u + 2\rho' - 1;$$

d'où l'on tire

$$(16) \qquad 2\rho' - 1 = \frac{1}{R^2} - \frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{ds^2} + \frac{5}{4\rho^2}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 + 2i\frac{d\rho}{ds};$$

le second membre de cette formule a donc la même valeur pour toutes les courbes passant par M.

Enfin, si nous remarquons que, d'après les formules (7) et (9), l'invariant $\frac{2\rho' - 1 + \rho^2}{\rho}$ a la même valeur tout le long d'une génératrice, nous arrivons au théorème suivant :

Si l'on considère une courbe quelconque tracée sur la surface et son point d'intersection M *avec une génératrice déterminée, l'expression*

$$\frac{1}{\rho R^2} - \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\rho}{ds^2} + \frac{5}{4\rho^3}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 + \frac{2i}{\rho}\frac{d\rho}{ds} + \rho,$$

où ρ *est égal à* $i\frac{dR}{R\,ds} - \frac{1}{T}$, *ne dépend que de la génératrice considérée, mais nullement de la courbe tracée sur la surface.*

Si l'on définit la surface comme le lieu des tangentes à la courbe minima dont les équations sont

$$\xi = \int \frac{1 - t^2}{2} f(t)\,dt,$$

$$\eta = \int \frac{1 - t^2}{2i} f(t)\,dt,$$

$$\zeta = \int t f(t)\,dt,$$

c'est-à-dire si l'on exprime les coordonnées absolues d'un point

de la surface par les formules

$$X = \int \frac{1 - t^2}{2} f(t)\,dt + \frac{1 - t^2}{2} v,$$

$$Y = \int \frac{1 + t^2}{2i} f(t)\,dt + \frac{1 + t^2}{2i} v,$$

$$Z = \int \quad t\,f(t)\,dt + tv,$$

on trouve, par des calculs sans difficulté, les cosinus directeurs du trièdre mobile attaché à chaque point de la courbe.

On a, pour l'axe des x :

$$a + ia' = \frac{i}{2} v + \frac{i}{2v}\left(\frac{f'}{2f} + \frac{f}{v}\right)^2,$$

$$a - ia' = -\frac{2i}{v} - \frac{it^2}{2} v - \frac{2it}{v}\left(\frac{f'}{2f} + \frac{f}{v}\right) - \frac{it^2}{2v}\left(\frac{f'}{2f} + \frac{f}{v}\right)^2,$$

$$a'' = \qquad \frac{it}{2} v + \frac{i}{v}\left(\frac{f'}{2f} + \frac{f}{v}\right) + \frac{it}{2v}\left(\frac{f'}{2f} + \frac{f}{v}\right)^2;$$

pour l'axe des y :

$$b + ib' = \frac{1}{2} v - \frac{1}{2v}\left(\frac{f'}{2f} + \frac{f}{v}\right)^2,$$

$$b - ib' = \frac{2}{v} - \frac{t^2}{2} v + \frac{2t}{v}\left(\frac{f'}{2f} + \frac{f}{v}\right) + \frac{t^2}{2v}\left(\frac{f'}{2f} - \frac{f}{v}\right)^2,$$

$$b'' = \qquad \frac{t}{2} v - \frac{1}{v}\left(\frac{f'}{2f} - \frac{f}{v}\right) - \frac{t}{2v}\left(\frac{f'}{2f} + \frac{f}{v}\right)^2;$$

pour l'axe des z :

$$c + ic' = - \qquad \left(\frac{f'}{2f} + \frac{f}{v}\right),$$

$$c - ic' = 2t + t^2\left(\frac{f'}{2f} + \frac{f}{v}\right),$$

$$c'' = -1 - t\left(\frac{f'}{2f} + \frac{f}{v}\right).$$

On a ensuite

$$\omega_1 = i\frac{f'}{2f}\,dt - i\frac{dv}{v},$$

$$\omega_3 = -v\,dt,$$

$$\rho = \frac{if}{v^2}, \qquad 2\rho' - 1 + \rho^2 = \frac{5f'^2 - 4ff''}{v^2 f^2}.$$

Enfin, les deux paramètres différentiels qui permettent de

déduire de chaque invariant I deux autres invariants dérivés sont

$$iv\frac{\partial I}{\partial v}, \qquad -\frac{f'}{2f}\frac{\partial I}{\partial v} - \frac{1}{v}\frac{\partial I}{\partial t}.$$

On remarquera que l'orientation du trièdre mobile est bien déterminée, *sans ambiguïté de sens.*

XI.

En résumé, comme on le voit par les développements précédents, les formules de structure (4) (VII), jointes au fait que les coordonnées ξ_1, ξ_2, ξ_3 d'un point de l'espace sont les intégrales premières des équations

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$$

fournissent tout ce qui est nécessaire et suffisant pour former en quelque sorte le *cadre* de la classification des surfaces de l'espace vis-à-vis du groupe des déplacements. Cela s'applique d'ailleurs à un groupe quelconque : il n'est pas nécessaire de connaître les équations finies du groupe, ni même ses transformations infinitésimales, pour former ce *cadre*. Elle s'appliquerait d'ailleurs de la même manière à la classification d'autres êtres géométriques que les surfaces (congruences de courbes, complexes de courbes, équations aux dérivées partielles, etc.). Cette méthode est, comme on l'a vu, identique au fond à celle que la théorie du trièdre mobile est susceptible de fournir dans la classification des courbes et des surfaces.

Une fois le *cadre* formé, si l'on veut en remplir les *cases*, c'est-à-dire déterminer pour chaque type de variétés un représentant, les formules de structure (4) (VII) ne suffisent plus : il faut faire intervenir le système différentiel de Lie (1) (VII) [ou, pour un groupe quelconque (1) (V)] et intégrer ce système. Pour cela, il faut connaître les transformations infinitésimales du groupe. C'est ainsi que, connaissant la courbure et la torsion d'une courbe gauche en fonction de l'arc, on a cette courbe par l'intégration d'un système de Lie.

Tout ce qui vient d'être dit s'étend aux groupes infinis, mais sans qu'on puisse naturellement s'appuyer dans ce cas sur l'analogie avec la théorie du trièdre mobile.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Pascal (E.). — *Repertorium der höheren Mathematik*. 2., völlig umgearb. Aufl. der deutschen Ausg., unter Mitwirkg. zahlreicher Mathematiker hrsg. v. P. Epstein u. H.-E. Timerding. I. Bd. Repertorium der höheren Analysis. Hrsg. v. Paul Epstein. 2. Aufl. 1. Hälfte. Algebra, Differential- u. Integralrechnung. In-8, xv-527 p. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 10 m.

Czuber (Eman.). — *Wahrscheinlichkeitsrechnung u. ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung. Statistik u. Lebensversicherung*. 2. Bd. Mathematische Statistik. Mathematische Grundlagen der Lebensversicherg. 2., sorgfältig durchgeseh. u. erweit. Aufl. (*Teubner's Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften* m. Einschluss ihrer Anwendungen. B. IX. 2.) Gr. in-8, x-470 p. avec 34 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 14 m.

Neugebauer (P.-V.). — *Genäherte Oppositions-Ephemerides v. 28 kleinen Planeten f.* 1910 *Juli*-1911 *Jan*. Unter Mitwirkg. mehrerer Astronomen bearb. (*Veröffentlichungen des königl. astronomischen Rechen-Instituts zu Berlin*. Hrsg. v. Fritz Cohn. Nr. 39.) Gr. in-8, 10 p. Berlin, F. Dümmler's Verl. 1 m. 20.

Vivanti (G.). — *Les fonctions polyédriques et modulaires*, traduit par *A. Cahen*. In-8, vi-320 p. avec 52 fig. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.

Weber (Heinr.). — *Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik*. Nach Riemann's Vorlesgn. in 5 Aufl. bearb. 1. Bd. gr. in-8, xviii-528 p. avec 81 fig. Braunschweig, F. Vieweg und Sohn. 12 m.; relié, 13 m. 60.

Chwolson (O.-D.). — *Traité de Physique*, trad. par *E. Davaux*. T. III, fasc. 2. Thermodynamique générale, fusion, vaporisation. In-8, vii-336 p. avec 206 fig. Paris, Hermann et fils. 11 fr.

Appell (P.) et Dautheville (S.). — *Précis de Mécanique rationnelle. Introduction à l'étude de la Physique et de la Mécanique appliquée*; à l'usage des candidats aux certificats de licence et des écoles techniques supérieures. In-8, 736 p. Paris, Gauthier-Villars. 25 fr.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PAINLEVÉ (PAUL) et BOREL (ÉMILE). — L'AVIATION (*Nouvelle Collection scientifique*, dirigée par M. *Émile Borel*), 3ᵉ édition, in-16, 52 gravures dans le texte, VIII-266 pages. Paris, Félix Alcan, 10 avril 1910.

L'Ouvrage de MM. Painlevé et Borel sur l'*Aviation* a notamment pour but de donner la description de l'aéroplane, les principes essentiels de son fonctionnement, les formules théoriques qui sont de précieuses indications et que l'expérience modifiera. En même temps, les auteurs n'ont pas négligé de faire connaître les principaux essais relatifs au vol du plus lourd que l'air.

MM. Painlevé et Borel présentent d'abord un historique attachant des essais que des hommes hardis ont faits pour arriver, souvent au péril de leur vie, à s'élever dans l'air, s'y soutenir, s'y diriger. Ils montrent que, si l'homme vole aujourd'hui, c'est parce que l'Anglais Cayley a donné en 1809 la première théorie complète de l'aéroplane; que le Français Pénaud a démontré, en 1870, avec son aéroplane-joujou, qu'une hélice, mue avec une force suffisante, pouvait propulser un aéroplane; que l'Allemand Lilienthal, par de dangereuses expériences, de 1891 à 1896, a prouvé qu'un habile pilote pouvait diriger un planeur propulsé et atterrir presque sans danger. Aussi, dès que fut trouvé le moteur léger, divers constructeurs, notamment les ingénieurs français Voisin et Blériot, les frères Wright en Amérique, parvinrent-ils à surmonter la plupart des difficultés qui séparent la conception scientifique de la réalisation industrielle.

Par une étude approfondie du vol des oiseaux, les auteurs ont montré que la sustentation de ces derniers est due à leur vitesse. Ils ont suffisamment parlé des appareils nommés *orthoptères* et *ornithoptères*. Ils ont insisté sur les hélicoptères dont le principal avantage est de s'élever verticalement et ensuite de rester immobiles en un poste d'observation, ce qui est utile en temps

de guerre. Ils n'ont pas oublié les cerfs-volants et les planeurs, qui sont les précurseurs de l'aéroplane à moteur, ou simplement aéroplane. Enfin ils ont tenu à bien mettre en évidence que l'étude expérimentale des planeurs a conduit à la construction des types d'aéroplanes qui sont arrivés à voler.

Du Chapitre IV au Chapitre VII, MM. Painlevé et Borel se sont uniquement occupés des questions multiples relatives à l'aéroplane. Après avoir insisté sur l'analogie qui existe entre cet appareil et l'oiseau et montré l'avantage des grandes vitesses, ils ont décrit les principaux types d'aéroplanes : les biplans Wright (décembre 1903, octobre 1908), Voisin (juillet 1909), Farman (mars 1910), Sommer (avril 1910), et les monoplans Blériot (traversée de la Manche le 25 juillet 1909); Latham (décembre 1909), sont présentés avec de très intéressants détails. Les auteurs montrent que l'hélice donne la propulsion, que le plan incliné soufflète l'air, que l'aéroplane est soulevé par suite de la résistance de l'air et vole tant que sa vitesse est suffisante. Ils entrent ensuite dans des considérations techniques sur les conditions de stabilité latérale et longitudinale de l'aéroplane, font l'étude approfondie de la stabilité de gyration, du vol en trajectoire circulaire et des virages. La loi du sinus est étudiée à fond avec son application au vol des oiseaux et surtout à l'aéroplane, dont les diverses utilisations, notamment au point de vue militaire, sont indiquées en détail.

Dans la partie imprimée en gros caractères se trouvent les formules qui peuvent être établies élémentairement. Quant aux autres formules qui complètent la théorie de l'aéroplane, elles sont amplement expliquées dans une Note imprimée en petit caractère et qui occupe le tiers de tout l'Ouvrage. Une seconde Note contient l'exposé des principes élémentaires de Mécanique auxquels il a souvent été fait allusion dans le cours du Livre.

Comme MM. Painlevé et Borel ont eu le soin de répartir en des Chapitres nettement délimités la description des appareils et l'établissement des formules, ils sont arrivés à présenter un Ouvrage qui peut être facilement parcouru par les personnes désireuses d'avoir une idée précise du problème de l'aviation, et qui constitue un précieux guide pour les constructeurs d'aéroplanes.

Er. L.

MÉLANGES.

UN PEU DE GÉOMÉTRIE A PROPOS DE L'INTÉGRALE DE POISSON;

PAR M. GASTON DARBOUX.

Il s'agira dans cet article de la célèbre intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{V_\omega(R^2-\rho^2)\,d\omega}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\omega-\alpha)},$$

où ρ et α désignent les coordonnées polaires d'un point situé à l'intérieur du cercle de rayon R qui est décrit de l'origine des coordonnées O comme centre. On sait que cette intégrale se présente à la fois dans la théorie des fonctions harmoniques et dans celle des séries trigonométriques. Sans avoir la prétention de donner des résultats essentiellement nouveaux, nous allons essayer de montrer comment l'emploi de la Géométrie permet de démontrer avec facilité ses propriétés les plus importantes.

Considérons d'abord une fonction harmonique V, assujettie à demeurer finie et continue, ainsi que ses dérivées premières, à l'intérieur du cercle (C) de rayon R. Si l'on désigne par g_A la fonction de Green relative au cercle (C) et au point A, c'est-à-dire une fonction harmonique assujettie à devenir nulle sur le cercle, à rester finie et continue ainsi que ses dérivées premières à l'intérieur du cercle, sauf pour le point A, pour lequel elle sera de la forme

$$\log\frac{1}{r_A} + \text{fonction continue},$$

r_A désignant la distance au point A, on aura, comme on sait,

$$V_A = \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_\omega \frac{dg_A}{dn}\,d\omega, \tag{1}$$

V_ω étant la valeur que prend V sur le cercle au point M du

contour, de coordonnées R, ω et le symbole $\frac{dg_A}{dn}$ signifiant la dérivée de g_A prise au point M par rapport à la normale intérieure au contour.

Or on connaît la fonction de Green relative à un cercle et à un point quelconque situé à l'intérieur. Si l'on associe au point A le point A_0 conjugué de A par rapport au cercle, on sait qu'on a

$$\overline{OA}.\overline{OA_0} = R^2,$$

$$\frac{\overline{MA_0}}{\overline{MA}} = \frac{R}{\overline{OA}},$$

M désignant un point quelconque du cercle. De là résulte que, si l'on pose

$$(2) \qquad OA = \rho, \qquad OA_0 = \frac{R^2}{\rho},$$

la fonction de Green relative au cercle sera

$$(3) \qquad g_A = \operatorname{Log}\left(\frac{r_{A_0}}{r_A}\frac{\rho}{R}\right),$$

r_A, r_{A_0} désignant les distances du point M aux points A, A_0.

Comme on a, pour le point M,

$$(4) \qquad r_A^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\omega - \alpha),$$

la dérivée par rapport à la normale intérieure, qui sera évidemment la dérivée par rapport à R changée de signe, nous donnera

$$r_A\frac{dr_A}{dn} = -R + \rho\cos(\omega - \alpha).$$

Pour r_{A_0}, il suffira de changer ρ en $\frac{R^2}{\rho}$, ce qui donnera

$$r_{A_0}\frac{dr_{A_0}}{dn} = -R + \frac{R^2}{\rho}\cos(\omega - \alpha).$$

Ces deux formules permettent de calculer $\frac{dg_A}{dn}$ et conduisent à la formule suivante

$$(5) \qquad V_A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_\omega \frac{(R^2 - \rho^2)\,d\omega}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\omega - \alpha)},$$

qui est fondamentale dans la théorie des fonctions harmoniques

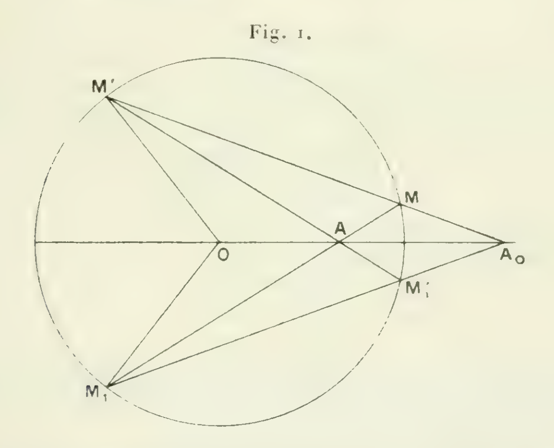
et permet d'en démontrer plusieurs propriétés. Par exemple, elles sont analytiques et peuvent être différentiées jusqu'à un ordre quelconque, etc. Nous allons montrer d'abord comment on peut encore l'établir, en la rattachant à une formule beaucoup plus simple, donnée par Gauss.

L'illustre géomètre a, en effet, établi un cas particulier de la formule (5), celui où le point A se trouve au centre du cercle et où l'on a, ρ étant nul,

$$V_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_\omega \, d\omega. \tag{6}$$

Cette relation exprime, en langage ordinaire, que la valeur de la fonction harmonique au centre du cercle est *la moyenne arithmétique* des valeurs qu'elle prend sur le cercle. Et elle se démontre, comme on sait, très aisément.

Fig. 1.



Admettons-la. Nous voyons (*fig.* 1) que la fonction pour le point O aura pour valeur

$$V_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_{M'} \, d.\widehat{AOM'}, \tag{7}$$

quand le point M' parcourra le cercle dans le sens direct.

Cela posé, faisons une inversion de pôle A_0 et de module $\overline{A_0A} \times \overline{A_0O}$. Cette inversion, on s'en assure aisément, transformera le cercle (C) en lui-même; car on a

$$\overline{A_0A}.\overline{A_0O} = \overline{A_0O}^2 - R^2. \tag{8}$$

De plus, elle fera venir le point O en A et le point M′ en un autre point M du cercle.

Or, comme toute transformation conforme, l'inversion transforme une fonction harmonique relative à un point en une fonction harmonique relative au point qui lui correspond. Donc la formule (7) deviendra

$$V_A = \frac{1}{2\pi}\int V_M\, d.\widehat{AOM}.$$

Mais la première intégrale ayant été prise dans le sens direct, celle-ci devrait être prise dans le sens inverse; car les mouvements de M et de M′ se font évidemment en sens contraires. Si donc on veut rétablir le sens direct, il faudra écrire

$$(9)\qquad V_A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_M\, d.\left(-\widehat{AOM'}\right).$$

Or prenons les symétriques M_1, M'_1 de M′ et de M par rapport au diamètre OAA_0. D'après la théorie des polaires, les droites MM_1 et $M'M'_1$ se croiseront en A; les angles M′OA, M_1OA étant égaux en valeur absolue, on aura, en grandeur et en signe,

$$-AOM' = AOM_1 = \omega';$$

et la formule (9) deviendra

$$(10)\qquad V_A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_\omega\, d\omega',$$

ω' étant défini comme l'angle polaire du point où la droite AM vient couper de nouveau le cercle (C).

Cette forme si simple de l'intégrale jouera un rôle fondamental dans notre analyse. On peut encore la rattacher comme il suit à la formule de Green.

Reprenons l'expression de g_A. Si l'on désigne par z, a, a' les valeurs de l'affixe, c'est-à-dire de la variable $x+iy$ pour un point M et pour les points A, A_0, la fonction de Green est, à une constante réelle près, égale à la partie réelle de

$$\log\frac{z-a'}{z-a}.$$

La partie imaginaire de cette fonction est aisée à trouver.

On a

$$z - a = r_A e^{i(\widehat{AM, Ox})}, \qquad z - a' = r_{A_0} e^{i(\widehat{A_0M, Ox})},$$

$\widehat{AM, Ox}$, $\widehat{A_0M, Ox}$ désignant les angles de AM, A_0M avec Ox. Donc la partie imaginaire de g_A sera

$$\widehat{A_0M, Ox} - \widehat{AM, Ox} = \widehat{AMA_0}.$$

Comme la dérivée de la partie réelle d'une fonction suivant une direction quelconque est égale à la dérivée de la partie imaginaire suivant la direction faisant avec la première l'angle $+\frac{\pi}{2}$, on aura ici

$$\frac{d}{dn} g_A = -\frac{d}{ds} \widehat{AMA_0},$$

ce qui donne

(11) $$V_A = -\frac{1}{2\pi} \int V_M \, d.\widehat{AMA_0}.$$

Mais si l'on associe le point M au point M_1 on établira aisément la relation

$$\overline{AM}.\overline{AM_1} = \overline{AO}.\overline{AA_0}.$$

Par conséquent, les deux triangles AMA_0, M_1OA sont semblables et l'on a

$$\widehat{AMA_0} = \widehat{AOM_1}.$$

Si l'on désigne par ω' la valeur de l'angle AOM_1, pris avec son signe, on retrouve bien la formule (10).

Cette formule va nous permettre de résoudre sans calcul la question la plus essentielle relative à l'intégrale de Poisson.

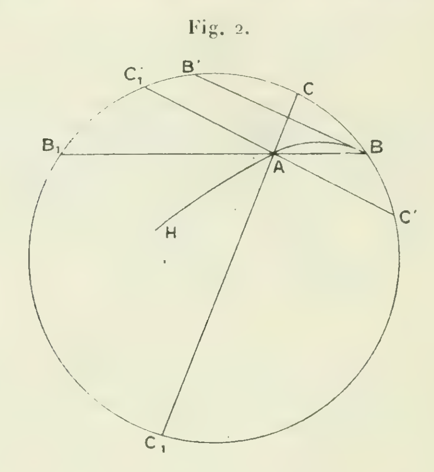
Supposons que, dans cette intégrale, V_ω soit une fonction choisie *arbitrairement*. L'intégrale définira, cela est aisé à démontrer, une fonction harmonique, continue à l'intérieur du cercle. Quand le point A se rapproche d'un point B du cercle, cette fonction harmonique a-t-elle pour limite la valeur de V au point B? Ou, s'il n'en est pas ainsi, quelle est sa limite?

Pour répondre à cette double question, nous supposerons que la fonction V_ω, généralement continue, puisse être discontinue en certains points; mais de telle manière que, si elle est discon-

tinue pour une valeur ω_0 de ω, il y ait une limite pour V_ω lorsque ω tendra vers ω_0 en lui restant inférieure, et une autre limite pour V_ω lorsque ω tendra vers ω_0 par des valeurs supérieures. Nous désignerons ces deux limites respectivement par $V_{\omega_0}^-$ et $V_{\omega_0}^+$.

D'après cela, soit B un point du contour (*fig.* 2) et supposons

Fig. 2.



que A tende vers B, en suivant une courbe BH qui admette une tangente en B. Prenons, de part et d'autre de B, deux points C, C' tels que, sur BC, V diffère de V_B^+ de moins de ε, et que, sur BC', la différence entre V et V_B^- soit également inférieure à ε.

Soient C_1, C'_1, B_1 les points où les droites AC, AC', AB vont de nouveau rencontrer le cercle.

Nous allons décomposer l'intégrale en trois parties : l'une relative à l'arc CB_1C', les deux autres aux arcs C'B et BC.

Pour l'arc CB_1C' le point M_1 décrit l'arc $C_1BC'_1$. Si l'on appelle η cet arc, la partie de l'intégrale étendue à CB_1C' est plus petite en valeur absolue que $\frac{M\eta}{2\pi R}$, M étant une limite supérieure de V. Comme η tend évidemment vers zéro, lorsque le point B s'approche de A, cette partie de l'intégrale tend vers zéro.

Pour l'intégrale étendue à C'B, le point M_1 décrit l'arc C'_1B_1. Donc cette partie de l'intégrale est égale à

$$\frac{C'_1B_1}{2\pi R}\,\text{moy.}\,V_B^-.$$

De même l'intégrale sur BC est égale à

$$\frac{B_1C_1}{2\pi R}\,\text{moy.}\,V_B^+,$$

la notation moy. V indiquant une valeur intermédiaire entre la plus grande et la plus petite valeur de V.

Passons à la limite, et supposons que B vienne en A. Le point B_1 vient en B', à la seconde intersection de la tangente en B à la trajectoire de A avec le cercle. Les intégrales sur C′B et sur BC deviennent

$$\frac{\text{arc}\,BCB'}{2\pi R}V_B^- \quad \text{et} \quad \frac{\text{arc}\,B'C_1B}{2\pi R}V_B^+,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\alpha}{\pi}V_B^- \quad \text{et} \quad \frac{\pi-\alpha}{\pi}V_B^+,$$

α étant l'angle que fait la tangente à la trajectoire de A avec la tangente au cercle prise dans le sens direct.

La limite de l'intégrale de Poisson est donc

$$\frac{\alpha}{\pi}V_B^- + \frac{\pi-\alpha}{\pi}V_B^+.$$

Si la fonction V est continue en B, cette limite se réduit à V_B.

Si la courbe BH est normale au cercle, elle est $\frac{1}{2}(V_B^+ + V_B^-)$.

Si la courbe est tangente, elle est V_B^+ ou V_B^- suivant que α est égal à o ou à π.

Il n'y a pas de limite si la courbe n'a pas de tangente.

La question est ainsi complètement élucidée.

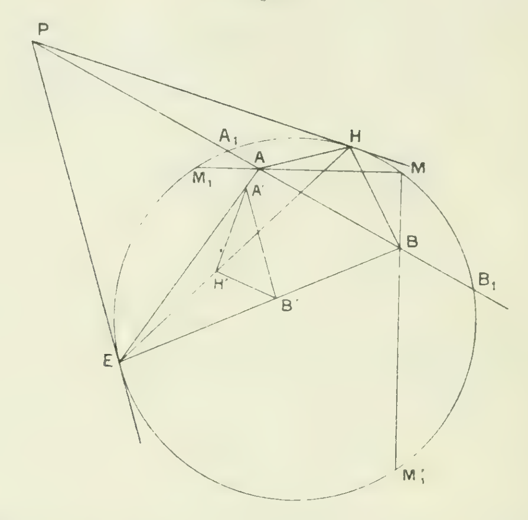
Je laisserai de côté tout ce qui concerne le cas, très aisé à traiter, où le point A serait à l'extérieur du cercle, pour montrer que la forme particulière donnée à l'intégrale de Poisson permet de trouver une limite supérieure de l'oscillation de la fonction harmonique, c'est-à-dire de la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la fonction à l'intérieur du cercle, en fonction de l'oscillation sur le contour.

Si, en effet, on considère les valeurs de la fonction harmonique pour deux points A et B, la différence des valeurs de ω' relatives à un même point M du cercle et aux deux points A, B sera le

double de l'angle AMB (*fig.* 3). On aura donc la formule très simple

$$(12) \qquad V_B - V_A = \frac{1}{\pi}\int V_M \, d.\text{AMB}.$$

Fig. 3.



Or AMB, qui est nul pour les points B_1 et A_1, a deux maxima, qui correspondent aux deux points où un cercle passant par A et B toucherait le cercle (C). Ces deux points se déterminent comme il suit :

Déterminons sur AB le point P tel qu'on ait

$$\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PA_1}.\overline{PB_1},$$

et menons de P des tangentes PE, PH au cercle (C). Les points E et H seront les points demandés.

Cela posé, décomposons l'intégrale à évaluer en quatre parties, relatives respectivement aux arcs A_1E, EB_1, B_1H, HA_1.

L'intégrale sur A_1E sera, d'après un théorème connu, égale à $\frac{1}{\pi}\widehat{AEB}\,\mathfrak{M}_{A_1E}V$, la notation $\mathfrak{M}_{A_1E}V$ indiquant une valeur intermédiaire entre toutes celles que prend V sur l'arc A_1E.

De même l'intégrale sur EB_1 est égale à $-\frac{1}{\pi}\widehat{AEB}\,\mathfrak{M}_{EB_1}V$.

L'intégrale sur B_1H est égale à $+\frac{1}{\pi}\widehat{BHA}\,\mathfrak{M}_{B_1H}V$.

Celle sur HA_1 est égale à $-\frac{1}{\pi}\widehat{BHA}\,\mathfrak{M}_{A_1H}V$.

Donc l'intégrale totale aura pour expression

$$\begin{aligned}(V_B - V_A) = &\ \frac{1}{\pi}\widehat{AEB}\,\mathfrak{M}_{A_1E}V - \frac{1}{\pi}\widehat{AEB}\,\mathfrak{M}_{EB_1}V \\ &+\frac{1}{\pi}\widehat{AHB}\,\mathfrak{M}_{B_1H}V - \frac{1}{\pi}\widehat{AHB}\,\mathfrak{M}_{A_1H}V.\end{aligned}$$

D'après cela, si, dans les intégrales d'un même signe, on remplace V par sa valeur maximum M et dans les deux autres, V par sa valeur minimum m, on aura évidemment

$$|V_B - V_A| < \frac{M-m}{\pi}\left(\widehat{AEB} + \widehat{AHB}\right).$$

$M - m$ est l'oscillation de la fonction sur le cercle. Si on l'appelle D, on aura

$$|V_B - V_A| < \frac{D}{\pi}\left(\widehat{AEB} + \widehat{AHB}\right).$$

Tout se ramène au calcul de la somme des deux angles. Ce calcul serait assez long. Mais on peut l'éviter par la Géométrie.

Remarquons d'abord que $\widehat{AEB}$, $\widehat{AHB}$ étant respectivement plus petits que $\widehat{A_1EB_1}$, $\widehat{A_1HB_1}$, leur somme sera plus petite que la somme de ces deux derniers angles, qui est évidemment égale à π.

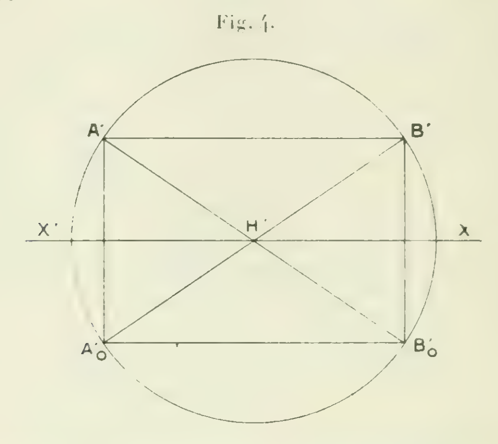
Si donc on effectue une inversion dont le pôle soit le point E, le quadrilatère EABH se transformera en un triangle $A'B'H'$ dont l'angle H' sera précisément égal à la somme que nous voulons calculer; car on a

$$\begin{aligned}A'H'B' = A'H'H + HH'B' &= EA'H' + A'EH' + B'EH' + EB'H' \\ &= A'EB' - AHE + EHB \\ &= AEB + AHB.\end{aligned}$$

Dans cette inversion, le cercle (C) et le cercle circonscrit au triangle ABE, qui lui est tangent en E, se transformeront nécessairement en deux droites parallèles $x'x$ et $A'B'$: l'une indéfinie, l'autre qui contiendra les homologues A', B' de A et de B (*fig.* 4).

Comme le cercle ABH de la première figure est tangent en H au cercle (C), il se transformera en un cercle A′B′H′, tangent en H′ à la droite $x'x$.

Fig. 4.



Il faudra donc nécessairement que le triangle A′B′H′ soit isoscèle, et l'angle à évaluer deviendra l'angle A′H′B′.

Si l'on prend les symétriques A'_0, B'_0 de A′ et de B′ par rapport à $x'x$, cet angle, que nous désignerons par 2α, sera déterminé par la formule

$$(13) \qquad \tang\alpha = \frac{A'B'}{A'A'_0}.$$

Pour revenir sans calcul à la figure primitive, rappelons que le rapport anharmonique des distances de quatre points quelconques tels que A, B, C, D

$$\mathcal{R}(A, B, C, D) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$$

demeure *invariable*, quand on effectue une inversion quelconque. Essayons donc d'exprimer α à l'aide d'un de ces rapports anharmoniques. On trouve facilement

$$(14) \qquad \mathcal{R}(A', B'_0, B', A'_0) = \frac{\overline{A'B'}.\overline{A'_0B'_0}}{\overline{A'A_0}.\overline{B'B'_0}} = \tang^2\alpha.$$

Revenons maintenant à la figure primitive ; A′, B′ reviendront à leurs positions A, B. Quant à A'_0, B'_0, ils se transformeront respectivement dans les conjugués A_0, B_0 de A et de B relativement

au cercle (C). En effet, A' et A'_0, par exemple, considérés comme des cercles de rayon nul, ont leurs points d'intersection sur $x'x$, donc leurs homologues A et A_0 devront se couper sur le cercle (C), ce qui est la propriété caractéristique de deux points conjugués. Ainsi A_0, B_0 étant les conjugués de A et de B, on aura, sur la figure primitive,

$$\tag{15} \operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\frac{\overline{AB}.\overline{A_0B_0}}{\overline{AA_0}.\overline{BB_0}}}.$$

Désignons par ρ, ρ_1 les distances de A, B au centre O de (C), par d leur distance; on aura

$$\overline{AB} = d, \qquad \overline{A_0B_0} = \frac{R^2 d}{\rho\rho_1}, \qquad AA_0 = \frac{R^2}{\rho} - \rho, \qquad BB_0 = \frac{R^2}{\rho_1} - \rho_1,$$

et, par suite,

$$\tag{16} \operatorname{tang}\alpha = \frac{Rd}{\sqrt{R^2-\rho^2}\sqrt{R^2-\rho_1^2}}.$$

Ainsi, nous serons conduits à l'inégalité

$$\tag{17} |V_B - V_A| < \frac{2D}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{Rd}{\sqrt{R^2-\rho^2}\sqrt{R^2-\rho_1^2}},$$

en prenant pour l'arc tang la détermination plus petite que $\frac{\pi}{2}$.

On voit que l'oscillation à l'intérieur du contour est toujours inférieure à celle qui se produit sur le contour.

La formule précédente comprend comme cas particuliers quelques résultats déjà connus. Par exemple, si l'on y fait $\rho_1 = 0$, on trouve

$$\tag{18} |V_A - V_0| < \frac{2D}{\pi} \arcsin \frac{\rho}{R},$$

V_0 désignant la valeur de V au centre. Cette inégalité a été déjà donnée par M. H.-A. Schwarz.

La fonction si curieuse qui figure dans l'inégalité (17) nous a paru mériter d'être étudiée. On peut facilement la rattacher à une autre, qui se présente dans la Géométrie non euclidienne.

On sait que, si l'on fait la carte d'une surface à courbure constante négative dont l'élément linéaire est défini par la formule

$$ds^2 = R^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

sur le demi-plan supérieur, en représentant chaque point de la surface par le point de coordonnées rectangulaires x, y, les lignes géodésiques de la surface sont représentées par des cercles ayant leur centre sur l'axe des x, et que la distance géodésique de deux points A, B est le logarithme, multiplié par R, du rapport anharmonique des deux points A, B et des points C, D où le cercle passant par A et B et ayant son centre sur Ox coupe cet axe.

D'après cela, revenons à la figure et construisons le cercle circonscrit au rectangle ABA_0B_0. Soient C' et D' les points où ce cercle coupe l'axe des x. On aura

$$(19)\qquad \mathcal{R}(C', D', A', B') = e^{\frac{\delta}{R}},$$

δ désignant la distance géodésique, ou non euclidienne, de A' et de B'. On trouve facilement

$$(20)\qquad \mathcal{R}(C', D', A', B') = \tan\text{g}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Revenons à le figure primitive; R(C', D', A', B') se transforme dans le rapport R(C, D, A, B), C, D étant les points où le cercle orthogonal à (C) rencontre ce cercle, et la distance δ que nous venons de définir devient

$$(21)\qquad e^{\frac{\delta}{R}} = \mathcal{R}(C, D, A, B),$$

se transformant ainsi dans la distance, évaluée uniquement à l'aide du cercle (C) (voir *Leçons sur la théorie des surfaces*, Livre VII, Chap. XI).

En rapprochant les deux formules (19) et (20), on voit que la distauce ainsi obtenue δ sera liée à notre fonction α par la relation

$$e^{\frac{\delta}{2R}} = \tan\text{g}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right),$$

qui donne

$$(22)\qquad \alpha = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arc\,tang} e^{\frac{\delta}{2R}}.$$

Cette relation entre la fonction α et les distances qu'on rencontre en Géométrie non euclidienne nous a paru mériter d'être signalée.

Au reste, en employant l'inversion comme nous l'avons fait plus haut pour déduire l'intégrale de Poisson de la formule de Gauss, on peut encore simplifier la démonstration des formules (15), (17) et (22). Supposons, en effet, que l'on effectue une inversion dont le pôle soit extérieur au cercle (C) et dont le module soit égal au carré de la tangente menée du pôle à ce cercle. Cette inversion transformera le cercle (C) en lui-même; elle transformera également les points intérieurs au cercle en d'autres points intérieurs. Supposons, par exemple, qu'elle fasse correspondre le point M' au point M et transportons au point M' la valeur V_M de la fonction harmonique en M. D'après les propriétés des transformations conformes, V deviendra *une fonction harmonique des coordonnées du point* M'. Puisque à un point M intérieur au cercle (C) correspond toujours un autre point M' intérieur et *vice versa*, comme un point sur le contour se transforme également en un point sur le contour, on peut dire que l'ensemble des valeurs que prend la fonction harmonique, soit à l'intérieur, soit sur le contour du cercle (C), ne sera pas changé par la transformation. On peut donc utiliser l'inversion de manière à donner aux points A et B une position qui facilite la démonstration. Nous allons voir qu'on peut la choisir de telle manière que les deux points A et B soient placés symétriquement par rapport au centre de (C).

A cet effet, faisons passer, par les deux points A et B, le cercle (C') qui est orthogonal au cercle (C) et contient, par suite, les points A_0, B_0, conjugués respectivement de A et de B. Les droites AB, A_0B_0 vont se couper en P (*fig.* 3) sur l'axe radical de (C) et de (C'), qui est la polaire par rapport à (C') du centre de (C). De ce point P menons des tangentes non plus au cercle (C), comme nous l'avons fait précédemment, mais au cercle (C'); et soient E_1, H_1 leurs points de contact. Sur le cercle (C'), le couple (E_1, H_1) divise harmoniquement à la fois les couples (A, B) et (A_0, B_0). Les points E_1, H_1 sont conjugués par rapport au cercle (C); de sorte que la droite E_1H_1 va passer par le centre de (C). Supposons que, des deux points conjugués E_1, H_1, ce soit E_1 qui soit extérieur à (C), et faisons une inversion qui conservera (C) et dont le pôle sera E_1. Le cercle (C') se transformera en une droite orthogonale à (C) et, par conséquent, les

transformés H'_1, A', B' de H_1, A et B seront sur un diamètre de (C). Comme, d'autre part, la droite E_1H_1 est aussi un diamètre de (C), il est clair que le transformé H'_1 de H_1 sera sur deux diamètres et, par conséquent, *sera le centre* O *du cercle* (C). Enfin, comme E_1, H_1, A, B formaient une proportion harmonique sur (C'), les points homologues ∞, O, A', B' formeront une proportion harmonique sur la droite qui les contient. C'est-à-dire que les deux points A', B' seront placés symétriquement par rapport au centre O de (C).

Ainsi, on peut ramener le cas général à ce cas particulier, qui est facile à traiter; car si A et B sont placés symétriquement par rapport au centre de (C), les points E, H de la figure 3, seront sur le diamètre perpendiculaire à AB. Les angles AEB, AHB seront égaux. Et en désignant l'un d'eux par α, on trouvera facilement

$$\text{tang}\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{R}, \tag{23}$$

x désignant la distance OA.

On a ici, d'autre part, en désignant par C et D les points où le diamètre AB coupe le cercle,

$$e^{\frac{\delta}{R}} = \mathcal{R}(A, B, C, D) = \left(\frac{x - R}{x + R}\right)^2. \tag{24}$$

En rapprochant ces deux dernières formules, on trouve

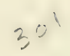
$$\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = e^{\frac{\delta}{2R}}. \tag{25}$$

On a également

$$\mathcal{R}(A, B_0, B, A_0) = \frac{\overline{AB_0}.\overline{A_0B_0}}{\overline{AA_0}.\overline{BB_0}} = \left(\frac{2Rx}{R^2 - x^2}\right)^2 = \text{tang}^2\alpha. \tag{26}$$

Ce sont les formules que nous avons obtenues plus haut et, comme rapports anharmoniques et distances non euclidiennes ne sont nullement altérés par l'inversion, elles s'appliquent sans modification au cas général.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXXIV.



TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXXIV; 1910. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÉLANGES.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXXIV.

16856 Paris. Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Mazarine, 3, à Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BROCARD, GOURSAT, G. KŒNIGS,
LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTE, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY
ET DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXXIV. — ANNÉE 1910.

(XLVe VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1910

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, par MM. les SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

Tome CXLVIII; 1909 (¹).

Darboux (*G.*). — Sur certains systèmes d'équations différentielles linéaires. (16-22).

A 4850 B 0900

Bertin (*L.*). — Sur le danger de chavirement possible, dans la giration des aéroplanes. (22-24).

B 2840

Boutroux (*P.*). — Sur les intégrales multiformes des équations différentielles algébriques du premier ordre. (25-28).

A 4870

Darboux (*G.*). — Sur les familles de Lamé engendrées par le déplacement d'une surface qui demeure invariable de forme. (65-70).

A 8420 8840 8860

(¹) Voir *Bulletin*, t. XXXIII₂, p. 114.

Bohr (*H.*). — Sur la série de Dirichlet. (75-80).

A 3220 3630

Severi (*F.*). — Sur les intégrales doubles de première espèce attachée à une variété algébrique. (80-81).

A 8060 8100

Young (*W.*). — Un théorème sur les différentielles. (82-84).

A 3230

Korn (*A.*). — Sur un point critique particulier de la solution des équations de l'élasticité dans le cas où les efforts sur la frontière sont donnés. (85-86).

A 5600 5620 B 3220

Ringelmann. — Dynamomètre pour essais de moteurs à grande vitesse angulaire. (87-90).

B 0170

Berget (*A.*). — Sur une formule de vitesse applicable à la propulsion dans l'air. (90-92).

B 2840 2860

Poincaré (*H.*). — Sur quelques applications de la méthode de M. Fredholm. (126-127).

A 5620 6030

Drach (*J.*). — Sur un problème concernant les lignes géodésiques. (150-152).

A 8830

Stekloff (*W.*). — Sur une généralisation d'un théorème de Jacobi. (153-155).

A 4830

Fréchet (*M.*). — Toute fonctionnelle continue est développable en série de fonctionnelles d'ordres entiers. (155-156).

A 3210 3220

Chazy (*J.*). — Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme. (157-158).

A 4880

Goursat (*E.*). — Sur la déformation des surfaces à courbure négative. (218-221).

A 8850

Demoulin (*A.*). — Sur les familles de Lamé composées de cyclides de Dupin. (269-272).

A 8420 8860 7650

Hadamard (*J.*). — Sur les lignes géodésiques, à propos de la récente Note de M. Drach. (272-274).

A 8830 4840

Boutroux (*P.*). — Sur les intégrales d'une équation différentielle algébrique de premier ordre. (274-277).

A 4870

Stekloff (*W.*). — Application d'un théorème généralisé de Jacobi au problème de S. Lie-Mayer. (277-279).

A 4830

Fréchet (*M.*). — Représentation approchée des fonctionnelles continues par une intégrale multiple. (279-280).

A 3240 3250

Vessiot (*E.*). — Sur l'intégration des systèmes linéaires à déterminant gauche. (332-335).

A 4850 1210

Galbrun. — Sur la représentation d'une fonction à variable réelle par une série formée avec les polynomes figurant dans les dérivées successives de la fonction e^{-x^2}. (335-337).

5620 1630

Darboux (*G.*). — Construction des systèmes orthogonaux qui comprennent une famille de cyclides de Dupin. (385-391).

A 8860 7650

Poincaré (*H.*). — Les ondes hertziennes et l'équation de Fredholm. (449-453).

A 4470 6030 C 6620

Demoulin (*A.*). — Principes de Géométrie projective intrinsèque. (460-463).

A 8420

Hostinsky (*B.*). — Sur quelques figures déterminées par les éléments infiniment voisins d'une courbe gauche. (463-465).

A 8440

Stekloff (*W.*). — Application du théorème généralisé de Jacobi au problème de Jacobi-Lie. (465-468).

A 4830

Montessus (*R. de*). — La recherche des racines de certaines équations numériques transcendantes. (468-470).

A 2470

Lecornu (*L.*). — Sur la statique graphique de l'aéroplane. (470-472).

B 1250 2840

Arnoux (*R.*). — Force et puissance de propulsion des hélices aériennes. (472-475).

A 2820 2840

Autonne (*L.*). — Sur la fonction monogène d'une variable hypercomplexe dans un groupe commutatif. (544-545).

A 0820 1230

Carrus (*S.*). — Détermination des systèmes conjugués. (606-609).

A 8830

Donder (*Th. de*). — Généralisation du théorème de Poisson. (610-611).

A 5210 5240

Goursat (*E.*). — Sur certains systèmes d'équations différentielles. (612-613).

A 4850

Boutroux (*P.*). — Sur les intégrales multiformes des équations différentielles algébriques. (613-616).

A 4870 3620

Darboux (*G.*). — Sur les systèmes d'équations différentielles homogènes. (673-679).

A 4850

Bouquet de la Grye. — Régime des fleuves. (679-681).

B 2810

Haag (*J.*). — Sur certains systèmes triples orthogonaux. (691-694).

A 8860

Dienes (*P.*). — Sur les singularités des fonctions analytiques en dehors du cercle de convergence. (694-698).

A 3610 3620

Drzewiecki (*D.*). — Équations fondamentales pour l'étude expérimentale des aéroplanes. (698-700).

B 2840

Étévé (*A.*). — Sur les mesures du coefficient de la résistance de l'air effectuées au moyen d'expériences faites en aéroplane. (701-703).

B 2840 2830

Darboux (*G.*). — Sur les systèmes d'équations différentielles homogènes. (745-754).

A 4850

Goursat (*E.*). — Sur un procédé alterné. (762-765).

A 4840

Adhémar (*R. d'*). — Une application du calcul fonctionnel à

l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires, du troisième ordre, du type hyberbolique. (765-767).

A 4840 6030

Larose (*H.*). — Sur des solutions particulières de l'équation $\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dt} = 0$. (770-773).

A 5650 C 2010 6430

Poincaré (*H.*). — Sur la diffraction des ondes hertziennes. (812-817).

A 4470 6030 4420 C 6620

Tzitzéica (*G.*). — Sur certains systèmes cycliques. (822-824).

A 8455

Koebe (*P.*). — Sur un principe général d'uniformisation. (824-827).

A 3620 6420

Lattès (*S.*). — Sur les transformations de contact. (902-905).

A 5230 1230

Galbrun. — Sur la représentation des solutions d'une équation linéaire aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable. (905-907).

A 6020

Poincaré (*H.*). — Sur la diffraction des ondes hertziennes. (966-968).

A 6030 4420 C 6620

Guichard (*C.*). — Sur les transformations des réseaux O associés. (974-978).

A 8455 8490

Denjoy (*A.*). — Sur l'intégration de certaines inéquations fonctionnelles. (981-983).

A 6030

Larose (*H.*). — Sur le problème de l'armille de Fourier. (983-985).

A 5640 C 2010

Haag (*J.*). — Déformation infiniment petite des surfaces réglées. (1033-1036).

A 8850

Vessiot (*E.*). — Sur les systèmes différentiels isomorphes. (1036-1038).

A 4830 1230

Denjoy (*A.*). — Sur la fonction analytique égale au module maximum d'une fonction entière. (1039-1040).

A 3620

Houssay (*F.*). — Sur les conditions hydrodynamiques de la forme des poissons. (1076-1078).

B 2850

Drach (*J.*). — Sur les congruences de normales et les transformations de contact. (1082-1086).

B 8455 5230

Stekloff (*W.*). — Sur le théorème de l'existence des fonctions implicites. (1085-1087).

A 3600 3630

Dienes (Mme *V.*). — Sur les points critiques logarithmiques. (1087-1090).

A 3620

Myller (*A.*). — Sur une équation aux dérivées partielles du type hyperbolique. (1090-1091).

A 4840

Chillemi. — Sur les surfaces hyperelliptiques. (1091-1093).

A 8060 4060

Guichard (*C.*). — Sur les systèmes singuliers de réseaux O associés. (1146-1149).

A 8450 8830

Fréchet (*M.*). — Une définition du nombre de dimensions d'un ensemble abstrait. (1152-1154).

A 0430 3200

Denjoy (*A.*). — Sur les fonctions analytiques uniformes qui restent continues sur un ensemble parfait discontinu de singularités. (1154-1156).

A 3610 0430

Painlevé. — Observations au sujet de la Communication précédente. (1156-1157).

A 3610 0430

Gramont de Guiche (*A. de*). — Sur le mouvement d'un disque dans un fluide. (1157-1160).

B 2840

Crémieu (*V.*). — Emploi de la balance de torsion comme sismographe. (1161-1163).

B 0090 H 25

Broglie (*de*). — Enregistrement photographique des trajectoires browniennes dans les gaz. (1163-1164).

B 0090

Bunau-Varilla (*P.*). — Lois des pentes de l'eau dans un canal à largeur constante et à profondeur sensiblement constante réunissant une mer à marée et une mer sans marée ayant même niveau moyen. Détermination pour chaque point du canal : 1° de la limite du courant maximum ; 2° de l'heure à laquelle le courant se produit. (1165-1168).

B 2810

Larose (*H.*). — Sur le problème de l'armille de Fourier. (1168-1170).

A 5640 C 2010

Goursat (*E.*). — Sur une Note récente de M. Stekloff. (1242).

A 3600 3630

Kolossoff (*G.*). — Sur les problèmes d'élasticité à deux dimensions. (1242-1244).

A 5660 4460 6030 B 3200

Ocagne (*M. d'*). — Sur la représentation nomographique des équations à quatre variables. (1244-1247).

A 0090

Caron (*M.*). — Sur un dispositif de surface portante pour aéroplane. (1247-1250).

B 2840

Guichard (*C.*). — Sur les surfaces à courbure totale constante. (1294-1298).

A 8450 8830

Rémy (*L.*). — Sur la valeur des invariants ρ et ρ_1 pour les surfaces du quatrième ordre à points doubles isolés. (1300-1302).

A 8060 7650

Riesz (*F.*). — Sur les suites des fonctions mesurables. (1303-1305).

A 3200

Bernstein (*S.*). — Sur le principe de Dirichlet et le développement des fonctions harmoniques en séries de polynomes. (1306-1308).

A 5660 5640

Garnier (*R.*). — Sur les équations différentielles linéaires et les transcendantes uniformes du second ordre. (1308-1311).

A 4850

Haag (*J.*). — Sur la déformation infiniment petite des surfaces réglées. (1367-1369).

A 8850

Bratu (*G.*). — Sur les équations mixtes linéaires. (1370-1373).

A 6030

Hansen (*C.*). — Sur la somme des *n* premiers coefficients d'une série de Taylor. (1373-1376).

A 3240 3600

Desaint (*L.*). — Sur les représentations générales des fonctions. (1376-1378).

A 3630

Birkeland (*R.*). — Sur certaines singularités des équations différentielles. (1378-1381).

A 4880

Chazy (*J.*). — Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. (1381-1384).

A 4880

Koebe (*P.*). — Fonction potentielle et fonction analytique ayant un domaine d'existence donné à un nombre quelconque (fini ou infini) de feuillets. (1446-1448).

A 3620

Poincaré (*H.*). — Les ondes hertziennes et l'équation de Freedholm. (1488-1490).

A 5030 6030 C 6620

Guichard (*C.*). — Sur les congruences dont les deux surfaces locales sont des quadriques. (1496-1499).

A 8455 8830

Demoulin (*A.*). — Sur les surfaces telles que les courbures géodésiques des lignes de courbure soient respectivement fonctions des courbures principales correspondantes. (1500-1504).

A 8830

Hostinsky (*B.*). — Sur une généralisation de la géométrie des cyclides. (1504-1507).

A 8020 7650

Larose (*H.*). — Sur une représentation physique des fonctions thêta. (1510-1512).

A 4040 5640 C 2020

Picard (*E.*). — Quelques remarques sur les équations intégrales de première espèce et sur certains problèmes de Physique mathématique. (1563-1568).

A 6030 5610 5660 C 2020

Vallier (*E.*). — Sur les intégrales pseudo-elliptiques ou hyperelliptique de la forme $\int_0^x \frac{x^p\,dx}{\sqrt{X_{2p-2}}}$. (1579-1582).

A 4060

Zaremba (*S.*). — Sur une Note récente de M. Bernstein. (1582)

A 5660 5640

Chazy (*J.*). — Sur les équations différentielles à points critiques fixes. (1582-1585).

A 4880

Borel (*E.*). — Sur l'étude des variations des quantités statistiques. (1585-1587).

A 1635

Bunau-Varilla (*P.*). — Loi permettant le calcul immédiat du profil approché d'un cours d'eau de débit donné, quand la section liquide et le périmètre mouillé sont des fonctions algébriques de l'altitude de l'eau. (1588-1590).

B 2810

Sanielevici (*S.*). — Sur une question de minimum. (1656-1657).

A 3280 4470 6030

Riesz (*M.*). — Sur les séries de Dirichlet. (1658-1660).

A 3630

Thouveny (*L.*). — Le vol ramé et les formes de l'aile. (1661-1662).

B 2840

Rateau (*A*.). — Méthodes d'expérience pour recherches aérodynamiques. (1662-1664).

B 2840

Picard (*E*.). — Sur les équations intégrales de première espèce. (1707-1708).

A 4470 6030

Châtelet (*A*.). — Sur une extension de la théorie des fractions continues. (1746-1749).

A 2815 2870

Montessus (*R. de*). — Sur le calcul des racines des équations numériques. (1749-1752).

A 2440

Tome CXLIX.

Riesz (*M*.). — Sur la sommation des séries de Dirichlet. (18-21).

A 3630

Gambier (*B*.). — Sur les intégrales singulières de certaines équations différentielles algébriques. (21-22).

A 4880

Garnier (*R*.). — Sur les équations différentielles linéaires et les transcendantes uniformes du second ordre. (23-26).

A 4850 3610

Korn (*A*.). — Sur quelques inégalités jouant un rôle dans la théorie des vibrations élastiques et des vibrations électriques. (26-28).

A 3270 8460

Lebesgue (*H*.). — Sur les suites de fonctions mesurables. (102-103).

A 0430 3210

Pompeiu (*D*.). — Sur les singularités des fonctions analytiques uniformes. (103-105).

A 3610

Maillet (*E.*). — Sur les systèmes de réservoirs. (105-107).

B 2800 A 1880

Maillet (*E.*). — Sur les systèmes d'équations différentielles. (198-200).

A 1880

Boutroux (*P.*). — Sur les singularités transcendantes des fonctions inverses de fonctions entières. (255-258).

A 3610 3620

Denjoy (*A.*). — Sur les fonctions analytiques uniformes à singularités discontinues. (258-260).

A 3610

Rateau (*A.*). — Étude de la poussée de l'air sur une surface. (360-363).

B 2830 2840

Denjoy (*A.*). — Sur les singularités discontinues des fonctions analytiques uniformes. (386-388).

A 3610

Lémeray. — Sur le calcul des racines d'une équation numérique. (433).

A 2440

Saltykow (*N.*). — Sur le perfectionnement de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (446-449).

A 4830

Saltykow (*N.*). — Sur le problème de Sophus Lie. (503-506).

A 4830

Drzewiecki. — Formules pratiques pour le calcul des hélices aériennes. (506-508).

B 2840

Myller-Lebedeff (Mme V.). — Sur l'équation hypergéométrique. (561-563).

A 4420 4470 6030

Chazy (*J.*). — Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme et admet des singularités essentielles mobiles. (563-565).

A 4880 3610

Haton de la Goupillière. — Oscillations des bennes non guidées. (581-582).

B 1640

Duhem (*P.*). — Opus tertium de Roger Bacon. (582-583).

E 0000

Lichtenstein (*L.*). — Sur la détermination des intégrales de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + a\frac{du}{dx} + b\frac{du}{dy} + cu = f.$$

(624-627).

A 4840 4470 6030 5660

Denjoy (*A.*). — Sur les ensembles parfaits discontinus à deux dimensions. (726-728).

A 0430 3200 3600

Fabry (*E.*). — Module d'une série de Taylor. (767-768).

A 3240 3610

Vessiot (*E.*). — Sur les groupes de rationalité des systèmes d'équations différentielles ordinaires. (768-770).

A 4880

Gravé (*D.*). — Sur une identité dans la théorie des formes binaires quadratiques. (770-772).

A 2830

Pellat (*H.*). — Pendule composé de construction très simple dont on connaît immédiatement la longueur du pendule synchrone. Nouvelle méthode pour déterminer *g*. (773-775).

B 0170

Darboux (*G.*). — Sur les congruences de courbes et sur les surfaces normales aux droites d'un complexe. (819-821).

A 8455 8830

Nörlund (*N.-E.*). — Sur les équations aux différences finies. (841-843).

A 6020

Miller (*G.-A.*). — Sur les groupes engendrés par deux opérateurs dont chacune transforme le carré de l'autre en son inverse. (843-846).

A 1210

Darboux (*G.*). — Sur les congruences de courbes et sur les surfaces normales aux droites d'un complexe. (885-890).

A 8455 8830 8860

Haag (*J.*). — Sur certains groupes de familles de Lamé. (905-907).

A 8420 8860 8480

Carrus (*S.*). — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles. (907-909).

A 4840

Riesz (*M.*). — Sur les séries de Dirichlet et les séries entières. (909-912).

A 3630 3610

Merlin (*J.*). — Sur les équations algébriques. (971-972).

A 2450 1210

Dienes (M. et Mme *Paul*). — Sur les singularités algébrico-logarithmiques. (972-974).

A 3620

Riesz (*F.*). — Sur les opérations fonctionnelles linéaires. (974-977).

A 3210 4460

Lichtenstein (*L.*). — Sur la détermination des intégrales de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 a}{dy^2} + a\frac{du}{dx} + b\frac{du}{dy} + cu = f$$

par leurs valeurs le long d'un contour fermé dans le cas des pointes. (977-979).

A 5660 6030

Pellat (*H.*). — Sur le pendule bifilaire. (980).

B 0170

Poincaré (*H.*). — Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques. (1026-1027).

A 8040 8050

Guichard (*C.*). — Sur les surfaces telles que les tangentes à une série de lignes de courbures touchent une quadrique. (1030-1034).

A 8830

Fabry (*E.*). — Ordre d'une série de Taylor. (1043-1045).

A 3610 3620

Galbrun. — Sur la représentation des solutions d'une équation aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable. (1046-1047).

A 6020 4850

Denjoy (*A.*). — Sur les ensembles parfaits discontinus. (1048-1050).

A 0430

Pompéiu (*D.*). — Sur les singularités discontinues des fonctions analytiques uniformes. (1050-1051).

A 3610

Haag (*J.*). — Familles de Lamé composées d'hélicoïdes. (1051-1054).

A 8420 8860 8480

Garnier (*R.*). — Sur des surfaces du quatrième ordre qui admettent un groupe infini discontinu de transformations birationnelles. (1044-1057).

A 8040

Rémy (*L.*). — Sur les transformations birationnelles des surfaces du quatrième ordre à points doubles isolés. (1057-1060).

A 8040

Ravigneaux. — Généralisation de la formule de Willis sur les trains épicycloïdaux. (1060-1062).

B 0430

Poincaré (*H.*). — Sur une généralisation de la méthode de Jacobi. (1105-1109).

B 2020

Picard (*E.*). — Rapport sur le prix Bordin. (1185-1188).

A 8060

Boussinesq (*J.*). — Rapport sur le prix Boileau. (1190-1191).

B 2810

Picard (*E.*). — Sur une classe de développements en série de fonctions fondamentales se rattachant à certaines équations fonctionnelles. (1337-1340).

A 6030 4470 3220

Haag (*J.*). — Sur les familles de Lamé composées de surfaces admettant un plan de symétrie variable. (1352-1354).

A 8860 8480

Pompéiu (*D.*). — Sur la représentation des fonctions analytiques par des intégrales définies. (1355-1357).

A 3600

Reignier (*C.*). — Sur le calcul des volants de laminoir. (1357-1359).

B 1640

Lecornu (*L.*). — Sur le volant des moteurs d'aviation. (1359-1361).

B 1640 2840

Jouguet (*E.*). — Sur la vitesse des ondes de choc et combustion. (1361-1364).

B 2400 C 2440

THE QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS [1].

Tome XXXIII; 1902.

Glaisher (*J.-W.*). — Sur quelques formules asymptotiques concernant les diviseurs des nombres. (1-75; 180-229).

M. Glaisher se livre à une intéressante étude du Mémoire de Lejeune Dirichlet : *Ueber die Bestimmung der mittlere Werthe in der Zahlentheorie* (*Œuvres*, t. II, p. 49. *Journal de Liouville*, 2e série, t. I, p. 353).

Il traite en détail, avec applications numériques et en discutant les erreurs pour les formules asymptotiques plusieurs des exemples de Dirichlet et d'autres, qui sont nouveaux.

A la formule fondamentale de Dirichlet, il substitue d'ailleurs la suivante qui peut, soit s'établir directement, soit se déduire de la formule de Dirichlet,

$$\sum_{s=1}^{s=n} \mathrm{I}\left(\frac{n}{s}\right)\varphi(s) = -\rho\psi(\rho) + \sum_{s=1}^{s=\rho} \mathrm{I}\left(\frac{n}{s}\right)\varphi(s) + \sum_{s=1}^{s=\rho} \psi\left[\mathrm{I}\left(\frac{n}{s}\right)\right];$$

n désigne un nombre naturel, $\mathrm{I}\left(\frac{n}{s}\right)$ est la partie entière de $\frac{n}{s}$, ρ est la racine carrée de n à une unité près par défaut, $\varphi(s)$ est une fonction quelconque; on a enfin

$$\psi(s) = \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(s).$$

Miller (*G.-A.*). — Sur les groupes engendrés par deux opérateurs d'ordres deux et trois respectivement, dont le produit est d'ordre six. (76-79).

Soient s_1 et s_2 ces deux opérateurs; lorsque le produit $s_1 s_2$ est d'ordre inférieur à 6, les groupes engendrés par s_1 et s_2 sont entièrement définis par l'ordre de $s_1 s_2$; mais quand cet ordre est égal à 6, les opérateurs engendrent une infinité de groupes distincts.

M. Miller étudie en particulier, dans ce cas, les propriétés du sous-groupe H

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXIX_2, 1905, p. 46.

engendré par les trois opérateurs

$$s_3 = s_1 s_2^2 s_1 s_2, \qquad s_4 = s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2 s_1, \qquad s_5 = s_2 s_1 s_2^2 s_1;$$

c'est un sous-groupe invariant abélien du groupe G engendré par $s_1 s_2$.

Burnside (*W.*). — Sur les équations caractéristiques de certaines substitutions linéaires. (80-84).

Démonstration d'un théorème de M. Rados (*Math. Annalen*, t. XLVIII, p. 417).

Bromwich (*T.-J.*). — Réduction des formes quadratiques et des substitutions linéaires. (85-112).

Exposition élémentaire des méthodes de réduction dues à Kronecker et à M. Jordan. Définition des diviseurs élémentaires (Weierstrass). Réduction des formes quadratiques à 2, 3, 4 variables par le procédé de Kronecker. Application aux oscillations autour d'une position d'équilibre. Réduction d'une substitution linéaire, d'après M. Jordan.

Hardy (*G.-H.*). — Sur l'intégrale de Frullani

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(ax^m) - \psi(bx^n)}{x} (\log x)^p \, dx.$$

(113-144).

La formule de Frullani

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(ax) - \varphi(bx)}{x} dx = [\varphi(\infty) - \varphi(0)] \log \frac{a}{b},$$

où a, b sont des nombres positifs, s'obtient aisément en intégrant par rapport à a les deux membres de l'équation

$$\int_0^\infty \varphi'(ax)\, dx = \frac{1}{a}[\varphi(\infty) - \varphi(0)].$$

M. Hardy donne des conditions précises sous lesquelles on peut l'appliquer. Il étudie de même la formule plus générale

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(ax^m) - \varphi(bx^n)}{x} (\log x)^p \, dx$$
$$= \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \frac{(p+1)!}{i!(p+1-i)!} \left[\frac{(\log a)^i}{m^{p+1}} - \frac{(\log b)^i}{n^{p+1}} \right] \mathrm{K}_{p-i+1},$$

où l'on a posé

$$\mathrm{K}_{p-i} = \int_0^\infty \varphi'(u)(\log u)^{p-i} du,$$

où enfin m, n sont des nombres positifs et p un nombre naturel.

Il en tire un très grand nombre d'intégrales définies.

Dickson (*L.-E.*). — Une classe de groupes dans un domaine arbitraire liée à la configuration des 27 droites d'une surface cubique. (145-173).

L'auteur introduit une forme cubique C qui définit la configuration des 45 triangles formés par les 27 droites d'une surface cubique générale dans l'espace euclidien

Le groupe G(F), dans un champ arbitraire F, dont les transformations laissent invariantes la forme cubique C, peut être défini par un système de dix équations homogènes indépendantes. Ce groupe peut, de différentes façons, être représenté dans un champ fini comme un groupe transitif de substitutions; l'auteur indique pour cela une méthode particulièrement simple.

Jenkins (*M.*). — Sur une identité arithmétique. (174-179).

Identité assez élégante obtenue en comptant de deux façons différentes le nombre d'arrangements circulaires, sur un ou plusieurs cercles, chaque arrangement contenant au moins deux éléments.

Burnside (*W.*). — Une question non résolue dans la théorie des groupes discontinus. (230-238).

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_m$ un système d'opérations en nombre fini qui vérifient, ainsi que les opérations qu'elles engendrent, la relation

$$S^n = 1,$$

où n est un nombre naturel.

Le groupe ainsi défini est-il d'ordre fini et, si la réponse est affirmative, de quel ordre est-il ?

La réponse à cette question n'est connue que dans deux cas : $n = 2$, m entier quelconque; $n = 3$, $m = 2$; les ordres respectifs sont alors 2^m et 3^2: M. Burnside apporte la réponse pour deux autres cas; $n = 3$, m quelconque; $n = 4$, $m = 2$. En outre, dans le cas où n est un nombre premier $p > 3$ et où $m = 2$, il montre que l'ordre du groupe, s'il est fini, ne peut pas être moindre que p^{2p-3}.

Dixon (*A.-C.*). — Note sur des équations simultanées aux dérivées partielles. (239-242).

Sur les formes canoniques à quatre variables déduites de deux expressions différentielles

$$\sum_{r=1}^{6} A_r dx_r, \qquad \sum_{r=1}^{6} B_r dx_r.$$

Application de la théorie développée par l'auteur dans un Mémoire du *Philosophical Transactions* (A, t. CXCV, p. 161).

Burnside (*W.*). — Sur les groupes résolubles de substitutions linéaires. (242-244).

Si un groupe résoluble irréductible G de substitutions linéaires, avec un nombre premier de variables, a un sous-groupe abélien, conjugué de lui-même, dont les opérations ne sont pas toutes conjuguées d'elles-mêmes dans G, ce groupe G doit contenir un sous-groupe abélien H conjugué de lui-même, tel que le groupe G/H soit cyclique ou métacyclique.

Dixon (*A.-L.*). — Étude géométrique de quelques théorèmes d'addition pour les intégrales elliptiques. (245-257).

Formules pour la somme d'intégrales elliptiques de deuxième et de troisième espèces portant sur quatre arguments dont la somme est nulle, obtenues par une méthode appliquée par Cayley aux intégrales de première espèce : *A theorem in elliptic functions* (*Œuvres*, t. XI, p. 73). L'auteur utilise aussi un Mémoire de M. O. Stande sur la *Geometrische Deutung der Additions theoreme der hyperelliptischen Integrale.* (*Math. Annalen*, t. XXII, 1883).

Brill (*J.*). — Sur la solution d'une équation de Pfaff considérée d'un point de vue quasi-géométrique. (257-271).

L'auteur part de la seconde méthode de Clebsch pour l'intégration d'une équation de Pfaff, et montre comment elle s'éclaire en l'exprimant dans un langage quasi-géométrique.

Dixon (*A.-C.*). — Sur quelques interprétations géométriques d'un quaternion. (271-273).

Interprétations diverses d'un quaternion considéré comme un mode de transformation.

Mac-Mahon (Major). — Les sommes des puissances semblables des coefficients binomiaux. (274-288).

La formule du binome peut s'écrire

$$\sum \alpha^p \beta^q \binom{p+q}{p} = (\alpha-\beta)^{p-q};$$

l'auteur montre comment on peut obtenir des expressions analogues pour les sommes

$$\sum \alpha^p \beta^q \binom{p-q}{p}^m,$$

où m est un nombre naturel, et donne des expressions explicites pour $m = 2, 3, 4$; par exemple

$$\begin{aligned}\alpha^p + \binom{p}{1}^2 \alpha^{p-1}\beta + \binom{p}{2}^2 \alpha^{p-2}\beta^2 + \ldots \\ = (\alpha-\beta)^p + \binom{p+1}{2}\binom{2}{1}\beta(\alpha-\beta)^{p-1} \\ + \binom{p+2}{4}\binom{4}{2}\beta^2(\alpha-\beta)^{p-2} + \ldots + \binom{2p}{p}\beta^p.\end{aligned}$$

Ces expressions sont obtenues par le Major Mac-Mahon au moyen d'une formule générale qu'il a donnée dans un Mémoire des *Philosophical Transactions* de la Société royale de Londres (*A certain class of generating functions in the Theory of Numbers*, 1894, p. 111).

Glaisher (*J.-W.*). — Formules déduites des sommes de Gauss avec application à des séries liées aux nombres de classes de formes binaires. (289-330).

L'auteur part de la formule

$$\left(\frac{1}{P}\right)e^{\frac{2h\pi i}{P}}+\left(\frac{2}{P}\right)e^{\frac{4h\pi i}{P}}+\left(\frac{3}{P}\right)e^{\frac{6h\pi i}{P}}+\ldots$$
$$+\left(\frac{P-1}{P}\right)e^{\frac{2(P-1)h\pi i}{P}}=\left(\frac{h}{P}\right)i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\sqrt{P},$$

que Dirichlet a déduites des sommes de Gauss : P est un nombre impair non divisible par un carré, h est un nombre naturel quelconque Il en déduit d'autres formules analogues où le dénominateur des exposants est 4P ou 8P, au lieu d'être P; il applique quelques-uns de ces résultats à la sommation de suites du type $\sum\left(\frac{P}{m}\right)\frac{1}{m}$, qui interviennent dans la détermination du nombre de classes de déterminant négatif D.

Richmond (*H.-W.*). — Sur les formes canoniques. (331-340).

L'auteur montre comment la méthode qui consiste à compter les constantes pour savoir s'il est possible de mettre une expression donnée sous une forme donnée peut, sous certaines conditions, être appliquée d'une façon rigoureuse : il en donne divers exemples; par exemple le théorème de Sylvester : *Une forme binaire d'ordre* $2m-1$ *peut être, et cela d'une seule façon, regardée comme la somme des puissances* $(2m-1)^{\text{ièmes}}$ *de m formes linéaires;* et ces autres théorèmes : *Il n'est pas possible de mettre la forme ternaire générale du quatrième degré sous la forme*

$$A_2A_3A_4A_5+A_1A_3A_4A_5+A_1A_2A_4A_5+A_1A_2A_3A_5+A_1A_2A_3A_4,$$

où A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *sont des formes linéaires en* x, y, z. — *La forme générale cubique à quatre variables peut être regardée, et cela d'une seule façon, comme la somme des cubes de cinq formes linéaires*, etc.

Dixon (*A.-C.*). — Sur la réduction des expressions différentielles à leurs formes canoniques. (341-384).

La résolution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, à une seule fonction inconnue, se ramène à la résolution d'une équation linéaire. Dans un Mémoire inséré dans les *Philosophical Transactions* de la Société royale (t. CXCV, p. 151), M. Dixon a développé une théorie analogue pour

des équations de forme générale dans deux autres cas, celui de deux équations du premier ordre à deux variables dépendantes et deux variables indépendantes, et celui d'une équation du second ordre avec une variable dépendante et deux indépendantes.

Dans ces deux cas, la solution dépend de deux équations linéaires par rapport aux jacobiens de deux fonctions inconnues. Dans le présent travail, M. Dixon étudie l'extension des mêmes idées au cas le plus général possible, c'est-à-dire à la réduction à leurs formes canoniques d'un système de formes de différentielles totales. Avant de généraliser ainsi le problème de Pfaff, M. Dixon reprend ce problème même et montre comment peut se généraliser la méthode d'ailleurs très simple par laquelle il le traite.

Tome XXXIV; 1903.

Glaisher (J.-W.). — Sur la distribution dans les octants, quadrants, etc., de P des nombres s pour lesquels $\left(\frac{s}{P}\right) = 1$ ou -1. (1-27).

En désignant par P un nombre naturel impair, le premier *octant* de P se compose des nombres naturels plus petits $\frac{P}{8}$, le second octant des nombres naturels compris entre $\frac{P}{8}$ et $\frac{P}{4}$, etc. La première et la seconde moitié, le premier quadrant, etc. de P se définiront de la même manière. Dans un précédent article, M. Glaisher a étudié les relations entre les sommes $\sum\left(\frac{s}{P}\right)$, où s doit prendre les valeurs qui appartiennent à un même octant et où $\left(\frac{s}{P}\right)$ est le symbole de Legendre-Jacobi. L'objet du présent travail est de déterminer, pour chaque octant, le nombre des valeurs de s pour lesquelles $\left(\frac{s}{P}\right)$ est égal à $+1$, et le nombre de valeurs pour lesquelles $\left(\frac{s}{P}\right)$ est égal à -1.

Des questions analogues se posent pour les quadrants et les moitiés.

Hardy (G.-H.). — Sur la continuité et la discontinuité des intégrales définies qui contiennent un paramètre continu. (28-53).

Le Mémoire de M. Hardy comprend deux Parties; la première, dont l'objet est suffisamment spécifié par le titre, contient d'intéressantes propositions générales, permettant d'affirmer la continuité sous des conditions qu'il serait un peu long de reproduire ici : je me contente de signaler quelques applications que donne l'auteur.

Si les infinis de $\varphi(x)$ forment un ensemble dénombrable et si l'intégrale

$$\int_a^A \varphi(x)\,dx$$

est convergente, on a

$$\lim_{a=0} \int_a^A e^{-ax} \varphi(x)\, dx = \int_a^A \varphi(x)\, dx,$$

et cela que A soit fini ou infini.

Si $\varphi(x)$ est une fonction positive qui tend régulièrement vers zéro quand x tend vers l'infini, et si l'intégrale

$$\int_0^\infty \varphi(x)\, dx$$

est convergente, on a

$$\lim_{\alpha=1} \int_0^\infty \log(1 + 2\alpha \cos mx + \alpha^2)\, \varphi(x)\, dx$$
$$= \int_0 \log 4 \cos^2 \frac{1}{2} mx\, \varphi(x)\, dx,$$
$$\lim_{\alpha=-1} \int_0^\infty \log(1 + 2\alpha \cos mx + \alpha^2)\, \varphi(x)\, dx$$
$$= \int_0^\infty \log 4 \sin^2 \frac{1}{2} mx\, \varphi(x)\, dx.$$

Dans la seconde Partie, l'auteur traite de diverses intégrales discontinues. Voici un des résultats qu'il établit.

L'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \varphi(x)\, dx,$$

où $\varphi(x)$ est une fontion continue, positive qui, pour $x = \infty$, tend vers une limite non nulle, telle enfin que, dans les mêmes conditions, $\frac{\varphi(x)}{x}$ tende régulièrement vers zéro, ne peut être uniformément convergente dans un intervalle qui contient $\alpha = 0$.

Si la fonction $\varphi(x)$ peut, pour les grandes valeurs de x, être mise sous la forme

$$\varphi(x) = \varphi(\infty) + \frac{\varphi_1(x)}{x^{\mu}},$$

μ étant positif et $\varphi_1(x)$ ayant une limite pour x infini, on a

$$\lim_{\alpha=0} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \varphi(x) = \frac{\pi}{2} \varphi(\infty).$$

Brill (J.). — Suggestions pour la constitution d'une théorie générale des systèmes d'équations de Pfaff, 3e Partie. (53-72).

Blythe (W.-H.). — Mettre en place un double-six. (73-74).

Il s'agit de construire deux couples de six droites se correspondant de façon que chaque droite d'un couple rencontre les cinq droites de l'autre couple qui ne lui correspondent pas.

2e partie

Dixon (*A.-C.*). — Sur la réduction des expressions différentielles à leurs formes canoniques (Note supplémentaire). (75).

Hardy (*G.-H.*). — Note sur les valeurs limites des fonctions modulaires elliptiques. (76-86).

L'un des fragments posthumes de Riemann traite de la façon dont se comportent les fonctions modulaires

$$\log k, \quad \log k', \quad \log \frac{2K}{\pi}$$

lorsque q tend vers $e^{\frac{b\pi i}{a}}$, b et a étant des nombres premiers entre eux. Ces recherches ont été reprises et complétées par J.-S. Smith (*Œuvres*, t. II, p. 312) et par M. Dedekind, dans une Note jointe au fragment de Riemann, où il s'aide de la théorie de la transformation. M. Hardy reprend le sujet directement en s'adressant à la fonction

$$\eta(\omega) = e^{\frac{\pi i \omega}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$$

ou plutôt à la fonction

$$\log \eta(\omega) = \frac{\pi i \omega}{12} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}};$$

sa méthode, qui s'appliquerait à d'autres classes de fonctions définies par des séries de la forme

$$\sum \frac{q^n}{1 \mp q^n} \varphi(n),$$

met en évidence la façon dont contribuent au résultat les différents systèmes de termes de la série, suivant qu'ils deviennent infinis ou non.

Glaisher (*J.-W.*). — Sur une méthode pour accroître la convergence de certaines séries pour π, π^2, etc. (87-98).

La présente Note a été suggérée à l'auteur par la formule

$$\frac{\pi}{16} = \sum (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{m(m^4+4)}, \qquad (m = 1, 3, 5, \ldots),$$

que l'on doit à M. Estanave. M. Glaisher commence par montrer que cette formule résulte immédiatement de la relation bien connue

$$\frac{\pi}{4} = \sum (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{m}$$

combinée avec celle-ci

$$\sum (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m^3}{m^4+4} = 0,$$

qui se déduit elle-même aisément de l'identité

$$\frac{4n^3}{n^4+4} = \frac{1}{n+1+i} + \frac{1}{n+1-i} + \frac{1}{n-1+i} + \frac{1}{n-1-i};$$

il en déduit un moyen de rendre beaucoup plus convergentes certaines séries qui le sont très peu; il multiplie les exemples, en employant diverses identités du même type. Ainsi les relations

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{4n^3}{4n^4+1} = \frac{1}{2}, \qquad \sum \frac{n^2-2}{n^2+4} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

et des séries bien connues pour $\log 2$, $\frac{\pi^2}{8}$, le conduisent aux formules

$$\log 2 - \frac{1}{2} = \sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n(4n^4+1)},$$

$$\frac{\pi^2}{16} = \sum \frac{1}{m^4+4} + 2\sum \frac{1}{m^2(m^4+4)}.$$

Bromwich (*T.-J.*) et *Hudson* (*W.-H.*). — Le discriminant d'une famille de courbes ou de surfaces. (98-116).

Si $\varphi(x, y, c)$ est un polynome en x, y, c, l'équation $\varphi(x, y, c) = 0$ définit une famille de courbes; le discriminant de cette famille est, pour les auteurs, le discriminant du polynome $\varphi(x, y, c)$ considéré comme une fonction de c. Ils montrent comment on peut calculer les termes principaux du développement de ce discriminant aux environs d'un point et, par conséquent, connaître aux environs de ce point l'allure de la courbe dont on a l'équation en égalant le discriminant à zéro, puis déterminer certaines singularités de cette courbe. Par exemple, si la famille considérée est formée des cercles osculateurs à une courbe, dans le discriminant se mettront en facteur, d'une part, les cercles surosculateurs à cette courbe, d'autre part le carré du premier membre de son équation. Des considérations analogues s'appliquent aux familles de surfaces.

Richmond (*H.-W.*). — Sur le lieu

$$\sum_r (x_r^3) = 0, \qquad \sum (x_r) = 0 \qquad (r = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

(117-154).

Les deux équations qui précèdent, jointes à une troisième équation, linéaire comme la seconde,

$$\sum_r k_r x_r = 0,$$

sont très employées dans l'étude des surfaces du troisième ordre (forme hexaédrale de Cremona); mais un grand nombre de propriétés ne dépendent pas de la troisième équation, qui spécifie la surface cubique. D'où l'idée de regarder les deux premières équations comme définissant un lieu dans l'espace à quatre dimensions.

Pour cette étude, dont tous les résultats se présentent sous une forme parfaitement symétrique, l'auteur tire grand parti des méthodes de M. Segre.

Richmond (*H.-W.*). — Le hessien en géométrie covariante. (154).

Relation de position entre les points qui représentent les racines d'un polynome (au sens de la théorie des nombres complexes) et les points qui représentent les racines du hessien.

Brill (*J.*). — Suggestions pour la constitution d'une théorie générale des systèmes d'équations de Pfaff, 4e Partie. (155-175).

Richmond (*W.*). — Le volume d'un tétraèdre dans un espace elliptique. (175-177).

L'accroissement de volume dû à un déplacement arbitrairement petit des sommets est donné par la formule

$$dV = C\sum l\,d\lambda,$$

où l désigne la longueur d'une arête, λ l'angle dièdre des plans passant par cette arête; la sommation s'étend aux six arêtes; C est une constante qui est la même pour tous les tétraèdres de l'espace.

Glaisher (*J.-W.*). — Sur les expressions des nombres de classes pour un déterminant négatif et des nombres de nombres appartenant à un octant de P, pour lesquels $\left(\frac{s}{P}\right)$ est positif. (178-204).

On suppose, comme plus haut, que P est un nombre naturel impair non divisible par un carré. Les nombres de classes proprement primitives de déterminants P et $-2P$ s'expriment au moyen des nombres 1, 2, ..., $P-1$, d'un même octant, qui appartiennent aux trois catégories suivantes : 1° les nombres s pour lesquels on a $\left(\frac{s}{P}\right)=1$; 2° ceux pour lesquels on a $\left(\frac{s}{P}\right)=-1$; 3° ceux pour lesquels on a $\left(\frac{s}{P}\right)=0$, s n'étant pas premier à P. Ce sont ces relations et leurs conséquences qu'étudie M. Glaisher.

Jessop (*C.-M.*). — Une correspondance entre les droites de deux complexes cosinguliers. (204-221).

Soient x_r ($r=1, 2, \ldots, 6$) des coordonnées de droites satisfaisant à l'identité $\sum x_r^2=0$ et soit

$$\sum \lambda_r x_r^2 = 0$$

l'équation d'un complexe du second degré; si l'on pose

$$y_r = \sqrt{\alpha_r + \mu}\, x_r,$$

les y_r seront les coordonnées de droites appartenant à un complexe cosingulier; M. Jessop étudie la correspondance avec les deux complexes définis par les équations précédentes; si, par exemple, x, X sont deux droites du premier complexe et y, Y les droites correspondantes du second, les droites x et Y se coupent lorsque y et X se coupent.

Dixon (*A.-C.*). — Sur les développements trigonométriques des fonctions elliptiques. (222-229).

Emploi de la méthode des coefficients indéterminées pour obtenir ces développements; soit, par exemple,

$$x = \frac{\pi u}{2\,\mathrm{K}}, \qquad z = e^{ix} \qquad \operatorname{sn} u = \sum \mathrm{A}_n z^n;$$

l'expression

$$\operatorname{sn} u - \frac{n}{2\,\mathrm{K}\,k} \operatorname{cos\acute{e}c}\left(x + \frac{in\,\mathrm{K}'}{2\,\mathrm{K}}\right)$$

ne devient plus infinie pour $z = \pm q^{-\frac{1}{2}}$, elle est développable en série de Laurent dans l'anneau

$$\left|q^{\frac{1}{2}}\right| < |z| < \left|q^{-\frac{3}{2}}\right|,$$

et l'on a dans cet anneau

$$\operatorname{sn} u - \frac{\pi}{2\,\mathrm{K}\,k} \operatorname{cos\acute{e}c}\left(x + \frac{i\pi\,\mathrm{K}'}{2\,\mathrm{K}}\right) = \sum \mathrm{A}_n z^n + \frac{i\pi}{\mathrm{K}\,k} z q^{\frac{1}{2}} (1 + z^2 q + \ldots);$$

en changeant z en qz, on trouve $\mathrm{A}_n(1 - q^n) = 0$ pour n pair et

$$\mathrm{A}_n(1 - q^n) = -\frac{i\pi}{\mathrm{K}\,k} q^{\frac{n}{2}}$$

pour n impair.

Burnside (*W.*). — Sur des groupes linéaires homogènes réciproques. (230-232).

Miller (*G.-A.*). — Sur le système de groupes triplement transitifs de Mathieu. (232-234).

Soit G un groupe triplement transitif d'ordre $p^n(p^{2n} - 1)$ et de degré $p^n + 1$, p étant un nombre premier et n un nombre naturel. Un tel groupe contient un sous-groupe G_1 doublement transitif, d'ordre $p^n(p^n - 1)$, dans lequel il y a p^n sous-groupes conjugués cycliques d'ordre $p^n - 1$. M. Miller établit que, si l'on se donne G_1, le groupe G est entièrement déterminé.

Holden (*H.*). — Réduction de $\dfrac{x^p - 1}{x - 1}$ à la forme

$$\mathrm{S}^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p x \mathrm{T}^2,$$

quand p est un nombre premier impair. (235-240).

Les lettres S, T désignent des polynomes entiers en x, à coefficients entiers. M. Holden montre comment la réduction peut être effectuée et en tire diverses conséquences.

Thompson (*A.-P.*). — Une propriété reproductive des semi-invariants d'une forme binaire. (241-251).

L'auteur expose, d'un nouveau point de vue, divers résultats établis par M. Hilbert dans son Mémoire de 1893 : *Ueber die vollen Invariantensysteme* sur la connexion entre la théorie des formes binaires d'ordre n et la théorie de formes simultanées d'ordres moindres.

Glaisher (*J.-W.*). — Méthodes pour accroître la convergence de certaines séries d'inverses. (252-347).

L'auteur poursuit les recherches qui ont pour point de départ la série de M. Estanave dont il a été question plus haut, et la transformation de diverses séries au moyen d'identités plus ou moins analogues à l'identité qui fournit la décomposition de $\frac{4n^3}{n^4+4}$ en éléments simples. Il donne de très nombreuses séries, à convergence de plus en plus rapide, pour π, $\log 2$, π^2, etc.

Elliott (*E.-B.*). — Sur les équations de Diophante linéaires et homogènes. (348-377).

On sait qu'une équation de Diophante

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m = b_{m+1} x_{m+1} + \ldots + b_n x_n,$$

où les a et les b sont des nombres entiers positifs et dont on ne regarde comme solution qu'un système de nombres positifs, n'a qu'un nombre fini de solutions simples

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \qquad (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n), \qquad \ldots, \qquad (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$$

au moyen desquelles toutes les autres solutions s'obtiennent par des formules telles que

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 t_\alpha + \beta_1 t_\beta + \ldots + \omega_1 t_\omega, \\ x_2 &= \alpha_2 t_\alpha + \beta_1 t_\beta + \ldots + \omega_2 t_\omega, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= \alpha_n t_\alpha + \beta_n t_\beta + \ldots + \omega_n t_\omega, \end{aligned}$$

où les t sont des entiers positifs.

Lorsque, dans un cas particulier, on a les systèmes des solutions simples, les formules précédentes donnent toutes les solutions, mais une même solution peut être obtenue plusieurs fois. L'objet de M. Elliott est d'obtenir une fonction génératrice qui fournisse toutes les solutions une par une ; il y parvient en partant de la fraction

$$\frac{1}{(1-\xi_1 u^{a_1})\ldots(1-\xi_m u^{a_m})(1-\xi_{m+1} u^{-b_{m+1}})\ldots(1-\xi_n u^{-b_n})},$$

dont le lien avec l'équation de Diophante apparaît immédiatement en faisant le produit des développements suivant les puissances de u des inverses des facteurs qui figurent au dénominateur. Par une application répétée à cette fraction de l'identité

$$\frac{1}{(1-\xi u^{\alpha})(1-\eta u^{-\beta})} = \frac{1}{1-\xi u^{\alpha-\beta}}\left[\frac{1}{1-\xi u^{\alpha}} + \frac{1}{1-\xi u^{-\beta}} - 1\right],$$

l'auteur arrive à mettre la fraction considérée sous forme de la somme de trois espèces de termes, le développement des premiers ne contient que des puissances positives de u, le développement des seconds ne contient que des puissances négatives, les troisièmes ne dépendent plus de u; chacun d'eux est de la forme

$$\frac{\pm 1}{D(1-P)},$$

où P est un produit de la forme $\xi_1^{x_1}, \xi_2^{x_2}, \ldots, \xi_n$; ce sont eux qui forment la fraction génératrice cherchée.

Enfin M. Elliott donne un Tableau de fonctions génératrices pour des équations du type

$$ax = by + cz \qquad (a = 1, 2, 3, \ldots, 10).$$

Love (*A.-E.*). — Note sur la relation entre le moment fléchissant et la courbure d'une poutre chargée uniformément. (378-383).

Thomson (*A.-P.*). — Correction à un précédent Mémoire. (383-384).

J. T.

TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY.

Tome VI; 1905 ([1]).

Smith (*P.-F.*). — Sur les transformations linéaires qui laissent invariante une forme quadratique. (1-16).

Euler, Cayley et Hermite étaient les premiers à considérer le problème classique de la détermination de toutes les transformations linéaires qui laissent invariante une forme quadratique. Cayley et Hermite se bornaient aux transformations générales; M. Frobenius alors détermina toutes les transformations propres; et enfin ce problème a été complètement résolu par MM. Lindemann et Lœwy, et simplifié par M. Voss.

L'auteur s'approche du problème d'un côté tout à fait différent, l'idée fondamentale étant de construire une quelconque de ces transformations par des élé-

---

([1]) Voir *Bulletin*, XXIX_2, p. 176 (t. I à V).

ments simples. La *réflexion centrale*, par rapport à la variété quadratique définie par $f(x)=0$, $f(x)\equiv \Sigma a_{ik}x_i x_{ik}$ $(a_{ik}=a_{ki})$, étant la forme donnée, est choisie comme transformation élémentaire. Cette idée est due à M. Voss. Chaque transformation peut être représentée comme produit de n (ou moins) de ces réflexions, n étant le nombre de variables x_i.

Les variables homogènes x_i sont considérées comme des coordonnées de points dans un espace R_{n-1} de $n-1$ dimensions. Chaque groupe de r points indépendants,

$$[a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}, \ldots], \quad \ldots, \quad [a_1^{(r)}, a_2^{(r)}, \ldots, a_n^{(r)}].$$

détermine une variété linéaire de M_{n-r-1} de $n-r-1$ dimensions, dans laquelle chaque point x est donné par les équations

$$x_i = \lambda^{(1)} a_i^{(1)} + \lambda^{(2)} a_i^{(2)} + \ldots + \lambda^{(r)} a_i^{(r)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

L'auteur développe alors sa théorie des réflexions centrales. Elle est très simple, les démonstrations étant souvent synthétiques: et la représentation analytique des transformations, qui en résulte, est si directe que cet Ouvrage donne une solution complète du problème qui peut être regardée comme élémentaire. On trouve d'abord aisément, si x, x' sont deux points qui se correspondent réciproquement par une réflexion A de centre a, qu'on a

$$x' = x - \frac{2f(x, a)}{f(a)} a.$$

Ici, l'équation $f(x, a) = 0$ est la polaire du point a par rapport à $f(x) = 0$. Le produit de deux réflexions A, B s'écrit directement, et l'on trouve alors que ces deux réflexions sont commutatives seulement quand $f(a, b) = 0$, c'est-à-dire quand les deux centres a, b sont conjugués par rapport à $f(x) = 0$.

Il est important alors de savoir quand on a AB = CD. La démonstration du théorème suivant est très simple et directe.

Le produit AB *de deux réflexions centrales peut être représenté en* ∞^1 *manières, par un produit* CD, *les centres c, d étant sur la variété* M_1 (*la droite*) *définie par a, b; c ou d peut être choisi à volonté; l'autre est alors unique.*

Le théorème correspondant pour le produit de trois réflexions est :

Le produit de trois réflexions centrales ABC *peut toujours être représenté en* ∞^3 *manières par un produit* DEF. *Le centre d est un point quelconque de la* M_2 *défini par a, b, c; mais la droite de e, f est alors uniquement déterminée, quoique e ou f peut être choisi à volonté sur cette droite.*

Le théorème général correspondant est alors démontré par induction. C'est une conséquence de ce théorème, que tout produit de réflexions centrales dont les centres se trouvent sur une M_{r-1}, peut être représenté par un produit de r (ou moins) de réflexions.

Cette théorie de réflexions centrales développée, l'auteur considère la représentation d'une transformation orthogonale comme produit de réflexions centrales. Il prouve que chaque transformation orthogonale en n variables est le produit d'une transformation orthogonale en $n-1$ variables et de réflexions centrales. Il arrive alors à ce résultat fondamental :

Chaque transformation linéaire, qui laisse invariante une forme quadratique générale en n variables, est le produit de n réflexions centrales (*ou de moins*).

Enfin, l'auteur obtient une formule générale donnant en forme explicite toutes les transformations qui laissent invariante la forme $f(x)$.

Huntington (*E.-V.*). — Un système de postulats pour l'Algèbre réelle, comprenant des postulats pour le continu linéaire et pour la théorie des groupes. (17-41).

Les postulats pour l'Algèbre réelle présentée dans cet Ouvrage se divisent en trois groupes : 1° des propositions relatives au symbole $<$, qui forment ensemble un système de postulats indépendants pour le continu linéaire; 2° des propositions relatives à l'opération $+$, qui forment ensemble un système de postulats indépendants pour la théorie des groupes; et 3° des propositions liant les deux symboles $<$ et $+$. Tous ces postulats forment un système qui sert à définir l'Algèbre réelle.

L'indépendance de tous ces postulats est établie, c'est-à-dire aucun des postulats n'est une conséquence des autres; et le système qu'ils définissent est unique, c'est-à-dire qu'il n'y a essentiellement qu'un seul système (savoir, le système de tous les nombres réels), dans lequel une relation $<$ et une opération $+$ sont définies de manière à satisfaire aux postulats donnés.

Les postulats pour le continu sont les naturels, mais leur indépendance n'a pas été démontrée antérieurement. Les postulats pour la théorie des groupes portent plus loin l'analyse que ne le font les systèmes antérieurs donnés par l'auteur et M. E.-H. Moore. Les postulats pour l'Algèbre réelle sont plus satisfaisants que le système antérieur de l'auteur (*Transactions*, t. IV, 1903, p. 358-370), car la séparation des postulats relatifs à $<$ et de ceux relatifs à $+$ est à présent complète, et les postulats eux-mêmes sont des propositions plus simples; aussi, dans l'énoncé des postulats ne se fait aucune hypothèse concernant l'existence d'un nombre. La multiplication se définit au moyen des postulats, et tous les théorèmes fondamentaux de l'Algèbre réelle sont établis. Dans un appendice, l'auteur donne encore un système des postulats dans lequel l'opération de multiplication est un des éléments primaires.

Manning (*W.-A.*). — Sur les groupes primitifs de classe $3p$. (42-47).

Un groupe de permutations est dit de classe k lorsque le plus petit nombre de lettres altérées par une seule permutation du groupe différent de l'identité est égal à k. Il s'agit ici seulement des groupes qui contiennent une permutation d'ordre p et de degré $3p$, p étant un nombre premier impair. L'auteur démontre d'abord deux théorèmes relatifs aux permutations d'ordre p et de degré pq dans un groupe de classes pq, p et q étant des nombres premiers impairs, et les emploie alors à déterminer tous les groupes de classe $3p$ contenant une permutation d'ordre p et de degré $3p$. Il trouve qu'il n'y en a que trois. Ce sont des groupes de classe 15 et d'ordre 80, 240 et 4080.

Dickson (*L.-E.*). — Le plus petit degré τ des équations résol-

vantes pour la p-section des périodes de fonctions hyperelliptiques à quatre périodes. (48-57).

L'objet principal de cet Ouvrage est la démonstration de la formule

$$\tau = \frac{p^4 - 1}{p - 1}$$

quand $p > 3$. Ce résultat est établi par une étude approfondie des sous-groupes du groupe abélien quaternaire.

Miller (*G.-A.*). — Détermination de tous les groupes d'ordre 2^m qui contiennent un nombre impair de sous-groupes cycliques d'ordre composé. (58-62).

Dans un Ouvrage inséré aux *Proceedings of the London Mathematical Society* (2e série, t. II, 1904, p. 142) l'auteur a récemment démontré le théorème suivant :

Dans chaque groupe non-cyclique d'ordre p^m (p étant un nombre premier impair) le nombre des sous-groupes cycliques d'ordre p^β, $\beta > 1$, est toujours un multiple de p, et ce nombre est de la forme $1 + p + kp^2$, quand $\beta = 1$.

Quand $p = 2$, ce théorème a des exceptions. Ce présent Ouvrage est consacré à l'étude détaillée de ces exceptions. A cause du caractère élémentaire des groupes cycliques, l'auteur considère seulement des groupes non-cycliques d'ordre 2^m. Il démontre d'abord le théorème :

Si un groupe d'ordre 2^m contient un nombre impair de sous-groupes cycliques d'ordre 2^α, $\alpha > 2$, ce nombre doit être 1, et le groupe est un des trois qui contiennent un sous-groupe cyclique d'ordre 2^{m-1}.

Suit alors le théorème qui montre qu'il existe un système de ∞^2 groupes d'ordre 2^m contenant un nombre impair de sous-groupes cycliques d'ordre composé :

Chaque groupe d'ordre 2^m, $m > 3$, contenant un nombre impair de sous-groupes cycliques d'ordre 4, contient un seul sous-groupe cyclique d'ordre 2^α, où α peut avoir une valeur quelconque de 3 à $m - 1$, et chaque groupe contenant un seul sous-groupe cyclique d'ordre 2^α, contient un nombre impair de sous-groupes cycliques d'ordre 4. Pour chaque valeur de α et de m il y a trois groupes avec ces propriétés.

Roe (*E.-D.*). — Sur les coefficients dans le rapport de deux alternants. (63-74).

Ce Mémoire est complémentaire à un Ouvrage antérieur de l'auteur, inséré au Volume précédent des *Transactions*. Il ne peut, à cause de la complexité de la notation, être analysé en quelques lignes.

Wilczynski (E.-J.). — Théorie générale des courbes sur une surface réglée. (75-82).

Soit donnée une surface réglée par les deux équations différentielles

$$y'' + p_{11}y' + p_{12}z' + q_{11}y + q_{12}z = 0,$$
$$z'' + p_{21}y' + p_{22}z' + q_{21}y + q_{22}z = 0,$$

de façon que les courbes C_y, C_z soient deux courbes sur la surface et que les droites, joignant deux points correspondants de C_y, C_z, soient des générateurs de la surface. En éliminant une fois z et une fois y, l'auteur obtient d'abord deux équations de quatrième ordre auxquelles les fonctions z, y doivent satisfaire. Ces deux équations sont susceptibles de nombreuses applications; en effet, elles sont *fondamentales* dans toute question se rattachant à l'existence sur une surface réglée de courbes d'un caractère donné.

L'auteur s'approche d'abord de la question : Une courbe gauche arbitraire peut-elle être regardée comme branche de la courbe flecnodale d'une surface réglée? Il trouve le théorème suivant :

Une courbe gauche donnée arbitraire peut toujours être regardée comme une branche de la courbe flecnodale d'une infinité de surfaces réglées, dont l'expression générale contient une fonction arbitraire.

Par des démonstrations analytique et synthétique, l'auteur prouve alors que les points de deux courbes arbitraires ne peuvent être joints de façon que les courbes soient la courbe flecnodale totale de la surface réglée obtenue. Cela posé, l'auteur démontre les théorèmes suivants :

1. *Si par chaque point de la courbe flecnodale d'une surface réglée* S, *on mène la droite génératrice de* S, *la tangente flecnodale, la tangente à la courbe flecnodale et enfin la droite qui est la conjuguée harmonique de la troisième de ces droites par rapport aux deux premières, le lieu de ces dernières droites est une surface développable, dit la* développable secondaire *de la surface.*

La *développable primaire* est alors celle formée par les tangentes à une branche de la courbe flecnodale.

2. *Il existe* ∞^1 *surfaces réglées qui ont la même courbe flecnodale que* S. *Ce système de* ∞^1 *surfaces peut être regardé comme une involution, dans laquelle une quelconque des surfaces du système et sa surface flecnodale forment un couple. Les développables primaires et secondaires de la branche considérée de la courbe flecnodale sont les surfaces doubles de cette involution. En effet, les génératrices de ces surfaces, à chaque point de leur courbe flecnodale commune, forment une involution dans le sens usuel.*

Il y a aussi une infinité de surfaces réglées dont chacune contient une courbe arbitraire donnée comme branche de sa courbe complexe.

Veblen (O.). — Théorie des courbes planes dans l'*Analysis situs* non métrique. (83-98).

Jordan était le premier à démontrer le théorème fondamental que chaque courbe simple fermée, située dans un plan, divise ce plan en deux parties. Sa

démonstration n'était pas tout à fait satisfaisante aux géomètres. Dans cet Ouvrage, l'auteur démontre ce théorème sur les hypothèses beaucoup plus générales que celles employées par les auteurs antérieurs (Schœnfliess, Ames, Bliss). La question posée est : Quelle généralité est permise dans l'application de la notion intuitive d'une courbe plane? La discussion s'appuie sur les axiomes 1 à 8 et 11 du système d'axiomes de Géométrie que l'auteur a développé dans sa Thèse (*Transactions*, t. V, 1904, p. 343-384). Il ne fait aucune hypothèse concernant la Géométrie analytique, parallélisme, congruence, ou de points extérieurs du plan. Ses hypothèses sont toutes non métriques et très générales. Il donne d'abord une définition non métrique d'une courbe plane simple, en termes de la notion d'ordre. La démonstration du théorème de Jordan est alors faite, en employant la notion importante d'*accessibilité finie*.

Wilczynski (*E.-J.*). — La théorie générale des courbes gauches au point de vue projectif. (99-133).

Ce Mémoire est un exposé systématique des relations qui relient entre elles la théorie des courbes gauches et la théorie des invariants et covariants d'une équation différentielle linéaire du quatrième ordre,

$$(1) \qquad y^{(4)} + 4p_1 y^{(3)} + 6p_2 y'' + 4p_3 y' + p_4 y = 0,$$

les p_i étant des fonctions de x. Halphen s'est aperçu le premier de ces relations, dont l'auteur a fait ressortir l'importance capitale pour la Géométrie infinitésimale. On trouve dans ce Mémoire, à côté des théorèmes de Halphen, une foule de résultats nouveaux.

Si l'on fait la transformation

$$y = \lambda(x)\bar{y}, \qquad \xi = \xi(x),$$

$\lambda(x)$, $\xi(x)$ étant des fonctions arbitraires, l'équation (1) se transforme en une autre équation de la même forme. On se demande quelles sont les fonctions des coefficients, de leurs dérivées, et de y, y', y'', $y^{(3)}$, qui restent invariantes sous cette transformation. Ces fonctions s'appellent des *invariants* et *covariants* de (1) selon qu'elles contiennent ou non les variables y, y', etc. On trouve d'abord les *seminvariants* :

$$(2) \qquad \begin{cases} P_2 = p_2 - p_1' - p_1^2, \\ P_3 = p_3 - p_1'' - 3p_1p_2 + 2p_1^3, \\ P_4 = p_4 - 4p_1p_3 - 3p_2^2 + 12p_1^2p_2 - 6p_1^4 - p_1^{(3)}, \end{cases}$$

et les *semicovariants* :

$$(3) \qquad \begin{cases} z = y' + p_1 y, \\ \rho = y'' + 2p_1 y' + p_2 y, \\ \sigma = y''' + 3p_1 y'' + 3p_2 y' + p_3 y; \end{cases}$$

c'est-à-dire, les invariants et covariants pour le sous-groupe

$$y = \lambda(x)\bar{y}.$$

Les invariants et covariants propres sont définis par les expressions suivantes :

$$
(4)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\theta_3 = P_3 - \frac{3}{2}P'_1 ; \qquad \theta_4 = P_4 - 2P'_3 + \frac{6}{5}P''_2 - \frac{6}{25}P_2^2 ;\\
&\theta_8 = \theta_{3,1} = 6\theta_3\theta''_3 - 7\theta'^2_3 - \frac{108}{5}P_2\theta_3^2,\\
&C_2 = 10z_2 - 15y\rho - 12P_2y^2,\\
&C_3 = 10z^3 - 3C_2z - 9(5\sigma + 6P_2z + P_3y)y^2,\\
&C_4 = 2\theta_3 z + \theta'_3 y,
\end{aligned}
\right.
$$

où les indices désignent le poids, un nombre caractéristique des fonctions invariantes dont on voit l'importance dans l'énoncé suivant : *Un covariant* C *de degré d et de poids* ω *se transforme en* $\overline{C}$, *où*

$$
(5)\qquad \overline{C} = \frac{\lambda^d}{(\xi')^\omega}C,
$$

en effectuant la transformation

$$
\overline{y} = \lambda(x)y, \qquad \xi = \xi(x).
$$

On peut toujours réduire l'équation (1) à une autre de la même forme pour laquelle on a

$$
p_1 = p_2 = 0.
$$

C'est là la forme canonique de Laguerre et Forsyth. Pour faire cette réduction il faut intégrer une équation de Riccati. Si l'invariant θ_3 est non nul, on peut, au moyen de simples quadratures, transformer (1) en une autre équation pour laquelle $p_1 = 0$, $\theta_3 = 1$. C'est là la forme canonique de Halphen.

Soient y_1, y_2, y_3, y_4 un système fondamental de (1). On peut interpréter ces grandeurs comme des coordonnées d'un point P_y de l'espace, lequel avec la variation de x décrit une courbe C_y. On voit facilement que tout système d'équations invariantes exprime une propriété projective de C_y. Les trois invariants θ_3, θ_4, θ_8, donnés en fonctions de x, caractérisent une courbe gauche à une transformation projective près. Si, pour deux courbes, les θ_4 et les θ_8 sont égaux pendant que les valeurs de θ_3 sont égales en valeur absolue mais de signes contraires, les deux courbes se correspondent par dualité.

Les expressions (3) nous donnent trois points P_z, P_ρ, P_σ et trois courbes C_z, C_ρ, C_σ dont on voudrait connaître la signification. Les quatre points P_y, P_z, P_ρ, P_σ, ne sont pas, en général, dans un même plan et il convient de les choisir comme les sommets du tétraèdre de référence quand il s'agit d'étudier les propriétés de la courbe C_y au voisinage du point P_y.

C'est en faisant usage de ce système de coordonnées qu'on arrive facilement à former les équations de la cubique gauche osculatrice et du complexe linéaire osculateur. Le plan osculateur et la développée de cette cubique ont en commun la tangente comptant pour deux intersections et une conique, la conique osculatrice. Avec ces éléments, on peut construire géométriquement les points P_z, P_ρ, P_σ. En effet, P_z est sur la tangente de C_y à P_y, et par conséquent C_z est une courbe sur la surface développable dont l'arête de rebroussement est C_y. On peut choisir la variable indépendante x de façon que cette courbe

soit une courbe quelconque de cette surface. Cela posé, on démontre facilement que la droite $P_y F_\rho$ est la polaire de P_z par rapport à la conique osculatrice. Considérons la surface réglée dont $P_y P_\rho$ est la génératrice. A chaque point de cette génératrice on peut faire correspondre deux plans, le plan tangent à la surface réglée en ce point et le plan qui correspond à ce point dans la corrélation dualistique définie par le complexe osculateur. Ces deux plans coïncident pour P_y et un seul autre point P_β. Les deux plans polaires par rapport au complexe linéaire osculateur des deux points P_z et P_β ont pour intersection la droite $P_y P_\sigma$. Il reste encore à déterminer les points P_ρ et P_σ sur ces deux droites; mais nous n'insisterons pas sur ces détails.

La surface réglée, lieu des droites $P_y P_\sigma$, est développable si la variable indépendante x est telle que l'on a $P_2 = 0$, et seulement en ce cas. On voit donc quelle est la signification géométrique de la forme canonique de Laguerre et Forsyth.

Si l'on a $\theta_3 = 0$ les tangentes de C_y appartiennent a un complexe linéaire. L'auteur trouve aussi la signification de la condition $\theta_4 = 0$. Si l'on a $\theta_3 = \theta_4 = 0$, la courbe est une cubique gauche. Il y a une quantité de relations, entre ces diverses surfaces réglées et leur élément osculateur, que nous ne discuterons pas pour ne pas rendre trop longue cette analyse.

En introduisant des coordonnées non homogènes choisies convenablement, on trouve des développements en séries pour la courbe C_y de la forme

$$Y = X^2 + A_7 X^7 + \ldots,$$

$$Z = X^3 - X^6 + M_7 X^7 + \ldots,$$

pourvu qu'elle n'appartienne pas à un complexe linéaire. Ces développements en séries sont dus à Halphen qui a basé sur eux toute sa théorie. C'est donc ici que se trouvent naturellement les théorèmes de Halphen sur les courbes gauches. C'est ici aussi qu'on trouve l'interprétation complète des covariants, au moins pour le cas d'une courbe qui n'appartient pas à un complexe linéaire. La discussion des cas exceptionnels est réservée pour une autre occasion.

Fréchet (*M.*). — Sur les opérations linéaires (deuxième Note). (134-140).

D'après un théorème de M. Hadamard, toute opération linéaire U_f portant sur une fonction $f(x)$ continue entre a et b peut se mettre sous la forme

$$U_f = \lim_{n=\infty} \int_a^b K_n(y) f(y)\, dy,$$

où les $K_n(y)$ sont des fonctions continues entre a et b. L'auteur fait remarquer d'abord qu'on peut supposer que les fonctions K_n soient nulles en a et b; et aussi, qu'*on peut supposer que les* $K_n(y)$ *soient des polynomes* $P_n(y)$; mais on ne pourra pas toujours supposer en même temps que $P_n(y)$ soient nuls en a et b. Cette remarque nous fournit un nouveau développement de l'opération linéaire la plus générale portant sur une fonction continue. En effet, posons

$$P_n(y) = a_0^n + a_1^n y + \ldots + a_{p_n}^n y^{p_n};$$

on aura

$$U_f = \lim_{n=\infty} \left[a_0^n U_f^{(0)} + a_1^n U_f^{(1)} + \ldots + a_{p_n}^n U_f^{(p_n)} \right],$$

avec

$$U_f^{(r)} = \int_a^b y^r f(y)\, dy.$$

En s'appuyant sur un développement de M. Borel, on obtient la formule

$$U_f = \lim_{n=\infty} \left[b_0^n f(0) + \ldots + b_r^n f\left(\frac{r}{n}\right) + \ldots + b_n^n f\left(\frac{n}{n}\right) \right],$$

avec

$$b_r^n = \int_a^b f(y)\, R_{r,n}(y)\, dy,$$

où les $R_{r,n}(y)$ sont certains polynomes déterminés indépendamment de la fonction f. Cette représentation est intéressante en ce qu'elle donne un procédé pour calculer effectivement U_f connaissant seulement les valeurs de $f(y)$ en tous les points d'abscisses commensurables.

Soient $f(x)$ une fonction continue de a à b, et c un nombre quelconque compris entre a et b; soient $f_1(x)$, $f_2(x)$ deux fonctions qui coïncident avec $f(x)$ de a à c, et de c à b respectivement. Alors on pourra écrire toute opération linéaire $U_f = V_{f_1} + W_{f_2}$, V et W étant deux opérations linéaires définies respectivement dans les intervalles (a, c), (c, b).

En terminant, l'auteur fait quelques remarques sur l'importance du champ fonctionnel dans lequel on définit une opération linéaire.

Kasner (*E.*). — Surfaces dont les lignes géodésiques sont représentables dans un plan par des paraboles. (141-158).

Le problème général de la représentation géodésique, qui a été discuté antérieurement par l'auteur (*Transactions*, t. IV, 1903, p. 149-152), est essentiellement le même que le *problème inverse des géodésiques*, proposé par Lie. L'équation des géodésiques étant donnée dans la forme $F(u, v, \lambda, \mu) = 0$, déterminer les surfaces correspondantes. Pour qu'une telle surface existe, il est nécessaire que l'équation différentielle du système donné soit de la forme

$$(1) \qquad y'' = Ay'^3 + By'^2 + Cy' + D,$$

où les A, B, C, D sont des fonctions de x, y. Toute équation de cette forme, l'auteur l'appelle de *type cubique;* mais il faut remarquer que la classe des équations géodésiques ne forme qu'une partie de la classe générale d'équations de type cubique. Ce Mémoire est consacré à la considération du problème : Un système de courbes planes dépendantes de trois ou d'un plus grand nombre de paramètres étant donné, déterminer les systèmes à deux paramètres qui sont capables de représenter les géodésiques d'une surface, et étudier ces surfaces.

La partie principale de l'Ouvrage est consacrée au cas le plus simple de ce problème, savoir : le cas du système de paraboles verticales

$$(2) \qquad y = \lambda x^2 + \mu x + \nu.$$

ou de l'équation différentielle correspondante $y''' = 0$. L'auteur trouve d'abord que *les seules équations de type* (1) *qui représentent un système de paraboles* (2) *sont les équations*

$$(3) \qquad (2ty + ax^2 + 2bx + c)y'' = ty'^2 - 2(ax + b)y' - 2(ay - d),$$

contenant quatre constantes a, b, c, d, t. *Le système* (2) *est alors assujetti à la condition*

$$(4) \qquad t(\mu^2 - 4\lambda\nu) - 2c\lambda + 2b\mu - 2a\nu + 2d = 0.$$

Ce système est *linéaire* (équivalent à $y'' = 0$), si le discriminant δ de la relation (4) est nul; si $\delta \neq 0$, *le système est essentiellement quadratique et équivalent à* $2y_1 y_1'' = y_1'^2 - 1$.

Après avoir donné une classification détaillée de ces systèmes de paraboles par rapport à deux groupes finis continus (dont l'un est projectif) et après avoir caractérisé géométriquement ces diverses classes, l'auteur s'approche de la question regardant les surfaces correspondantes. Il trouve, en effet, qu'il y a des surfaces pour les systèmes de paraboles considérés. Dans le premier cas, l'équation est équivalente à $y'' = 0$, de sorte que les surfaces sont simplement celles de courbure constante (théorème de Beltrami). Il reste à discuter le second cas $2yy'' = y'^2 + 1$. L'auteur trouve alors le théorème suivant :

Les seules surfaces représentables ponctuellement sur un plan, de sorte que les lignes géodésiques sont représentées par les paraboles $y = \lambda x^2 + \mu x + \nu$, *sont :*

1° *Des surfaces de courbure constantes. Le système est alors linéaire défini par la relation* (4) *avec* $\delta = 0$.

2° *Des surfaces à courbure variable dont l'élément linéaire est d'une des formes*

$$ds^2 = v(du^2 + dv^2)$$

$$ds^2 = \left(\frac{P}{v^2} + Q\right)(du^2 + dv^2)$$

$$ds^2 = (Pe^v + Qe^{2v})(du^2 + dv^2)$$

$$ds^2 = \frac{P + Q(e^v + e^{-v})}{(e^v - e^{-v})^2}(du^2 + dv^2).$$

Ces surfaces sont équivalentes géodésiquement et sont toutes applicables sur des surfaces de révolution. Le système de paraboles dans ce cas est quadratique défini par (4) *avec* $\delta \neq 0$.

L'auteur trouve aussi les conditions pour que cette représentation soit conforme, et discute le nombre de toutes les représentations possibles. En terminant, l'auteur démontre le théorème suivant plus général :

Si une surface est représentable conformément sur un plan de façon que les courbes représentant ces géodésiques satisfont à une équation de la forme

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \ldots + P_n = 0,$$

(P_i *fonction de* x, y), *alors son élement linéaire est de la forme*

$$ds^2 = f(v)(du^2 + dv^2),$$

de sorte que la surface est applicable sur une surface de révolution.

Mason (*M.*). — Les solutions à deux périodes de l'équation de Poisson à deux variables indépendantes. (159-164).

Toute solution à deux périodes de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se réduit à une constante. C'est l'objet de cet Ouvrage de discuter les solutions à deux périodes de l'équation de Poisson

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

où $f(x, y)$ est une fonction continue avec deux périodes en x et y égales à a et b. L'auteur démontre ce théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution à deux périodes a, b de l'équation (1), *est que l'intégrale*

$$\int_0^b \int_0^a f(x, y)\, dx\, dy$$

soit nulle. Cette condition étant satisfaite, la solution aux deux périodes a, b de l'équation (1) *et égale à* C *pour les valeurs* $x = \alpha$, $y = \beta$ *est unique et s'obtient par la formule*

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^b \int_0^a \mathrm{G}(x, y, \xi, \eta, \alpha, \beta)\, f(x, y)\, dx\, dy + \mathrm{C},$$

où G *est une* fonction de Green *bien déterminée, qui s'exprime au moyen des fonctions* σ.

Veblen (O.). — Définition en terme d'ordre seulement du continu linéaire et des ensembles bien ordonnés. (165-171).

Dans cet Ouvrage, l'auteur donne une définition du continu linéaire par un système de postulats qui s'expriment seulement par la notion d'ordre, ne faisant pas usage des notions d'opération ou de l'égalité des segments. Ce système consiste en quatre postulats d'ordre, un postulat de Dedekind, un postulat pseudo-archimédien, un postulat de densité et un postulat d'uniformité. C'est le dernier qui offre l'élément d'originalité. Ce postulat est le suivant :

Postulat d'uniformité. — Pour chaque élément P d'un ensemble (P) satis-

2ᵉ Partie -

faisant aux postulats précédents et pour chaque ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$), il y a un segment $\sigma_{\nu p}$, de sorte que l'ensemble des segments ($\sigma_{\nu p}$) a les propriétés suivantes :

1° Pour un P fixe, $\sigma_{\nu p}$ contient $\sigma_{\nu+1 p}$;

2° Pour un P fixe, P est contenu par chaque $\sigma_{\nu p}$ et P est le seul élément avec ladite propriété;

3° Pour chaque segment τ il y a un ν, ν_τ, de sorte que $\sigma_{\nu_\tau p}$ ne contient τ pour aucun P.

Ce postulat remplace celui de Cantor concernant un ensemble partiel dense dénombrable. Les deux premiers postulats sont suffisants pour une large partie de la théorie des fonctions d'une variable réelle. En particulier, le théorème de Heine-Borel et sa généralisation se démontrent comme une conséquence de ces deux postulats. Ce système de postulats est comparé avec les définitions antérieures du continu et l'indépendance des postulats est établie. En terminant, l'auteur donne une définition par postulats de la notion générale d'un ensemble bien ordonnée.

Epsteen (*S.*) et *Maclagan-Wedderburn* (*J.-H.*). — Sur la structure des systèmes de nombres hypercomplexes. (172-178).

Dans cet Ouvrage, les auteurs démontrent, pour des systèmes de nombres complexes à n unités, certains théorèmes analogues à ceux de Jordan-Hölder, concernant les groupes facteurs et les séries de composition dans la théorie des groupes finis abstraits. Les méthodes sont toutes rationnelles, et par conséquent les résultats sont applicables à des systèmes de nombres dont ces coefficients sont restreints à des éléments d'un corps donné, fini ou infini.

Par les produits EE_1 d'un système $E \equiv e_1 \ldots e_m \; e_{m+1} \ldots e_n$ et l'un de ses complexes partiels $E_1 \equiv e_{m+1} \ldots e_n$ s'entend l'ensemble d'unités qu'on obtient par la multiplication de chaque unité de E par chaque unité de E_1. Si l'on a $E\,E_1 \leqq E_1$ et $E_1\,E \leqq E_1$, le système partiel E_1 est dit *invariant* en E. D'après Molien (*Math. Annalen*, t. XLI, p. 93), si E_1 est invariant en E, il y a un système K_1, dit *complémentaire* à E_1 par rapport à E.

La série E, E_1, E_2, ... est dite *normale*, si E_s est un système partiel invariant maximal de E_{s-1} ($E_0 = E$), et K_1, K_2, K_3, ... est dite une série *normale complémentaire*, si K_s est complémentaire à E_s par rapport à E_{s-1}. Si n_s est l'*ordre* (le nombre d'unités) de E_s, les nombres entiers l_s sont définis comme suit : $l_s = (n_s$ — l'ordre du système partiel maximal de E_{s-1} contenant $E_s)$, $s = 1, 2, 3, \ldots$; de plus, les nombres k_s sont définis par $k_s = n_{s-1} - n_s$. Si C_s est le système partiel maximal de C_{s-1} invariant en E, la série E_1, C_1, C_2, ... est dite série *principale* de E. On a alors les théorèmes suivants :

1° Si E a deux systèmes partiels invariants E_1, E'_1, E est *réductible* ou bien $E'_1 \leqq E_1$;

2° E_1, E'_1 étant deux systèmes partiels invariants maximals de E, leur partie commune E''_1 est un système partiel invariant de E;

3° La série normale complémentaire k_1, k_2, ... est indépendante, à l'ordre près, de la série normale E, E'_1, E'_2, ...;

4° La série de nombres l_1, l_2, ... et aussi la série k_1, k_2, ... sont indépendantes, à l'ordre près, de la série normale choisie;

5° La série complémentaire principale $k_1^{(c)}$, $k_2^{(c)}$, ... est indépendante, à l'ordre près, de la série principale E, C_1, C_2, ...

Moore (*E.-H.*). — Sur une définition de groupes abstraits. (179-180).

Dans cette Note, l'auteur démontre qu'un de ses postulats pour la définition du groupe abstrait, qu'il a donné antérieurement (*Transactions*, t. III, p. 485-492) est une conséquence des autres postulats, et aussi que ces autres postulats sont indépendants.

Huntington (*E.-V.*). — Note sur les définitions des groupes abstraits et des corps arithmétiques par des postulats indépendants. (181-197).

Dans cet Ouvrage, l'auteur donne une comparaison de toutes les définitions connues des groupes abstraits par des postulats indépendants, et présente un système de six postulats qui est à certains égards plus simple que les systèmes antérieurs comme suit :

P1. Si a, b sont des éléments de la classe, leur *produit ab* est élément de la classe;

P2. La loi associative : $(ab)c = a(bc)$;

P3. Il y a au moins un élément i de sorte que $ii = i$;

P4. Il n'y a plus qu'un élément i. Cet élément unique i s'appelle l'*identité* du groupe;

P5. Si i est l'identité, on a $ia = a$ (ou bien $ai = a$) pour chaque élément a;

P6. Si i est l'identité, il y a pour chaque élément a un élément a'_d de sorte qu'on a $aa'_d = i$ (ou bien un élément a'_g de sorte que $a'_g a = i$). On démontre qu'on a $a'_d = a'_g = a'$ et que cet élément est unique pour chaque a; cet élément a' s'appelle l'*inverse* de a.

Ces six postulats sont suffisants pour la théorie générale des groupes abstraits. Pour que le groupe soit abélien on ajoute;

P7. La loi commutative : $ab = ba$.

Tous les sept postulats sont indépendants, et ils restent indépendants si l'on demande que le groupe soit d'ordre infini. Si, au contraire, on demande que le groupe soit d'ordre fini, les postulats 3 et 6 deviennent redondants.

Pour la définition des corps arithmétiques on obtient alors treize postulats :

A1-A6; qui expriment que le corps est un groupe par rapport à l'addition. L'identité dans ce groupe s'appelle l'élément *zéro;*

M1, M2, M3, M4, M6, M7; qui expriment que le corps est un groupe abélien par rapport à la multiplication. M5 (correspondant à P5) est une conséquence des autres, et par suite n'est pas nécessaire.

D. La loi distributive à droite (ou à gauche).

La loi commutative de l'addition se *démontre* par le moyen des postulats précédents. L'auteur établit l'indépendance de ces treize postulats pour un corps. Il donne alors un système plus court pour la définition d'un corps, ce système consistant en dix postulats; mais il n'en a pas établi l'indépendance. En terminant, il donne une définition du groupe abstrait en terme d'une relation triadique R.

Dickson (L.-E.) — Définition d'un groupe et d'un corps arithmétique par des postulats indépendants (198-204).

La définition simple du groupe général abstrait, que l'auteur donne dans cette Note, est une modification des deux définitions de M. Moore (*Transactions*, t. III, 1902, p. 485-492). Elle a la propriété désirable en ce que les postulats restent indépendants quand on ajoute d'autres postulats de spécialisation, soit par rapport aux nombres d'éléments, soit par rapport à la commutativité.

aob étant une fonction de deux variables a, b, nous dirons qu'un ensemble d'éléments a, b, ... forment un groupe par rapport à o, s'il satisfait aux postulats suivants :

1_1, 1_2, 1_3. Pour chaque paire a, b d'éléments (égaux ou différents) de l'ensemble il y a au moins une détermination aob; il y a au plus une détermination aob; s'il y a une détermination, il y en a une qui est un élément de l'ensemble.

2. On a $(aob)\, oc = ao(boc)$, toutes les fois que a, b, c et toutes les déterminations aob, boc, $(aob)\, oc$, et $ao(boc)$ se trouvent dans l'ensemble.

3. Il y a dans l'ensemble un élément i de sorte que pour chaque élément a de l'ensemble aoi a la détermination a.

4. S'il y a des éléments i, il y a un i particulier de sorte que pour chaque a de l'ensemble il y a un élément a' de sorte que aoa' a la détermination i.

On a comme conséquence de ces postulats, qu'il y a un *seul* élément i, et pour chaque a un seul élément a'. L'auteur démontre alors l'indépendance des postulats 1_1, 1_2, 1_3, 2, 3, 4, 5_k ($k = 1, 2, 3$) où l'on a

5_1. Le nombre d'éléments différents est un entier fixe n, $n > 1$.

5_2. Les éléments différents forment un ensemble dénombrable.

5_3. Les éléments différents forment un ensemble non dénombrable.

L'auteur démontre aussi le théorème suivant :

Soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_\nu^{\alpha_\nu}$, $p_1, \ldots, p_\nu$ étant des nombres premiers distincts et chaque $\alpha_j > 0$. Les conditions nécessaires et suffisantes que tous les groupes d'ordre n soient abéliens sont : (i) chaque $\alpha_j \leqq 2$; (ii) aucun des nombres $p_j^{\alpha_j} - 1$ n'est divisible par un des nombres $p_1, \ldots, p_\nu$.

En terminant, l'auteur donne un système simple de postulats définissant un corps arithmétique, qui a quelques avantages par rapport aux définitions antérieures; il démontre aussi leur indépendance.

Dickson (L.-E.). — Sur les demi-groupes et l'isomorphisme général entre les groupes infinis. (205-208).

Si l'on a une correspondance entre les éléments de deux groupes d'ordre fini, de sorte que le produit de deux éléments de l'un correspond au produit des deux éléments correspondants de l'autre, les éléments de l'un qui correspondent à l'identité de l'autre forment eux-mêmes un groupe. *Ce théorème bien connu n'est plus vrai, en général, si les groupes sont d'ordres infinis.* L'auteur établit ce résultat par des exemples concrets. M. Séguier a cru démontrer ce théorème en général; l'erreur dans sa démonstration est bien subtile. Le théorème général correct fait usage de la notion de *demi-groupe*, qui se réduit à

la notion de groupe, si le nombre d'éléments est fini; mais non, en général, si ce nombre est infini.

Huntington (*E.-V.*). — Un système de postulats pour l'Algèbre ordinaire complexe. (209-229).

C'est l'objet de cet Ouvrage d'analyser les propositions fondamentales, et les hypothèses de l'Algèbre ordinaire complexe. L'auteur considère deux ensembles K, C d'éléments (nombres), deux opérations + et ×, et une relation <. Ces notions sont suffisantes pour caractériser complètement l'Algèbre ordinaire complexe, si elles sont assujetties à des postulats qui s'expriment comme suit en cinq groupes :

I. L'ensemble K est un corps arithmétique par rapport à + et ×.

II. L'ensemble K contient l'ensemble C qui est aussi un corps arithmétique par rapport à + et ×. C correspond à l'ensemble des nombres réels.

III. L'ensemble C est un continu par rapport à <.

IV. Dans l'ensemble C on a : 1° Si l'on a $x < y$, on a $a + x < a + y$; 2° Si l'on a $a > 0$, $b > 0$, on a $a \times b > 0$.

V. Il y a en K un élément; de sorte que $j \times j = -1$; et si i est un élément j, il y a pour chaque élément a de K, deux éléments x, y de C, de sorte qu'on a $x + iy = a$.

Ces cinq groupes contiennent 28 postulats qui sont tous démontrés mutuellement indépendants.

Blichfeldt (*H.-F.*). — Sur les groupes linéaires homogènes imprimitifs. (230-236).

Cette Note est consacrée d'abord à la démonstration d'un théorème fondamental pour la construction des groupes linéaires homogènes *imprimitifs* (au sens donné à ce mot dans deux Ouvrages antérieurs de l'auteur : *Transactions*, t. IV, 1903, p. 387; t. V, 1904, p. 310). Par le moyen de ce théorème et d'autres théorèmes de l'auteur (*voir* les Ouvrages cités), il démontre alors, pour les groupes imprimitifs, le théorème de Jordan, que l'ordre d'un groupe linéaire homogène G en n variables est de la forme λf, où f est l'ordre d'un sous-groupe invariant abélien de G, et λ est plus petit qu'un nombre fixe dépendant seulement de n. L'auteur trouve un nombre dont λ doit être un facteur. En terminant, l'auteur détermine les groupes principaux imprimitifs de collinéations à 4 variables, donnant aussi leurs substitutions génératrices. Il trouve 14 types de ces groupes, dont quatre ont l'invariant $xu - yz = 0$ et qui ont été donnés antérieurement par Goursat (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e sér., t. VI, 1899, p. 9-102).

Poincaré (*H.*). — Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. (237-274).

Cet Ouvrage est consacré à l'étude des lignes géodésiques des surfaces convexes, un problème de grande importance dans l'étude des particularités des solutions du problème des trois corps. M. Hadamard a déjà donné une solution complète du problème des lignes géodésiques des surfaces à courbures oppo-

sées. Mais ce n'est pas aux géodésiques des surfaces à courbures opposées que les trajectoires du problème des trois corps sont comparables; c'est au contraire aux géodésiques des surfaces convexes. Malheureusement, ce problème est beaucoup plus difficile que celui qui a été résolu par M. Hadamard. L'auteur a donc dû se borner à quelques résultats partiels, relatifs surtout aux géodésiques fermées qui jouent ici le rôle des solutions périodiques du problème des trois corps.

Soit S une surface *convexe analytique;* supposons que ses deux rayons de courbures principaux restent constamment compris entre deux limites L_1 et L_2. Soit O un point fixe de la surface S. Envisageons une géodésique OM passant par le point O, soit OH une autre géodésique fixe passant par ce même point O, soit v l'angle sous lequel ces deux géodésiques se coupent en O, soit u l'arc OM compté sur la géodésique; les deux quantités u, v peuvent être regardées comme des coordonnées (*polaires*) du point M sur la surface. Le carré de l'élément d'arc sera alors de la forme

$$ds^2 = du^2 + \lambda dv^2,$$

où λ est une fonction de u et de v.

Si nous envisageons deux géodésiques infiniment voisines issues du point O, elles se recouperont successivement en une infinité de points d'après un théorème de M. Hadamard et les points d'intersections successifs pourront être désignés par F_1, F_2, ..., F_n, ... Le point F_n est ordinairement appelé le $n^{\text{ième}}$ *foyer* du point O; F_p est le $(p-q)^{\text{ième}}$ foyer de F_q. On appelle *caustique* l'enveloppe de toutes les géodésiques issues du point O; la caustique est le lieu des foyers du point O. Cette caustique a pour équation

$$\lambda = 0.$$

L'auteur trouve alors que dans l'équation de la caustique les coordonnées x, y, z d'un point sont des fonctions holomorphes de v et aussi de u. Tous les points singuliers de la caustique sont donc donnés par l'équation $\frac{d\lambda}{dv} = 0$; elles correspondent donc aux minima ou maxima de u, quand on décrit la courbe $\lambda = 0$ dans un *plan* avec des coordonnées polaires u, v. (Cette courbe se compose d'une série d'ovales fermées s'enveloppant mutuellement et enveloppant le pôle $u = 0$.)

Pour nous rendre compte de la nature de ces points singuliers, supposons que λ s'annule ainsi que ces p premières dérivées par rapport à v et que la $(p+1)^{\text{ième}}$ dérivée ne s'annule pas. Nous sommes ainsi amenés à distinguer quatre sortes de foyers :

1° Les *foyers ordinaires*, correspondant aux points non singuliers de la caustique $(p = 0)$;

2° Les *foyers en pointe*, correspondant aux points de rebroussement ordinaires $(p = 1)$, qui sont des minima de u;

3° Les *foyers en talons* $(p = 1)$, qui sont des maxima de u;

4° Les *foyers singuliers*, correspondant aux points singuliers d'ordre plus élevé $(p > 1)$.

L'auteur introduit maintenant la notion de *ligne de partage*. Soit OM une géodésique quelconque passant par O; on pourra trouver sur cette géodésique un point P, tel que le plus court chemin de O à un point Q, sur la géodésique

OM entre O et P, soit précisément l'arc OQ de cette géodésique, mais que cela ne soit plus vrai si le point Q est au delà de P. On dit alors que P est l'*extrémité* du plus court chemin OP. De chaque point P partiront *au moins deux* plus courts chemins, qui auront l'un et l'autre leurs extrémités en P. Les lieux des points qui sont les extrémités de deux ou plusieurs plus courts chemins forment un ensemble de lignes que l'auteur appelle *lignes de partage*. Cet ensemble de lignes ne divise pas la surface S en deux régions; cet ensemble de lignes de partage, ou une partie de ces lignes, ne peut donc jamais constituer un polygone fermé, il formera une sorte de *système rameux*. Les extrémités des rameaux seront des points où deux plus courts chemins partant des points d'une ligne de partage se confondent en un seul.

L'auteur aborde alors le problème des géodésiques d'une surface très peu différente d'une sphère, et il trouve que *le nombre total des géodésiques fermées d'une telle surface est toujours impair*. En appliquant le *principe de continuité analytique*, il démontre alors que :

Le nombre des géodésiques d'une surface Σ qui font *partie de une*, *deux ou plusieurs séries continues déterminées est constamment pair ou constamment impair*.

Il démontre aussi le théorème suivant :

Le nombre de points d'intersection de deux geodésiques appartenant à deux séries continues déterminées est invariable.

S'appuyant alors sur le résultat déjà démontré pour un sphéroïde, on a comme première application de ce principe :

Sur une surface convexe quelconque, *il y a toujours au moins une geodésique fermée sans point double et il y en a toujours un nombre impair.*

L'auteur envisage maintenant des géodésiques peu différentes d'une géodésique fermée. L'équation différentielle d'une telle géodésique G_0 prend la forme simple

$$\frac{d^2 u}{dv^2} = h'' v$$

(u, v étant des coordonnées convenablement choisies). Cette équation admet deux solutions de la forme

$$v = e^{au}\,\Phi(u), \qquad v = e^{-au}\,\Psi(u).$$

Si ces solutions conjuguées sont imaginaires, G_0 est dite *stable;* si les solutions sont réelles, G_0 est dite *instable*. Faisant usage de la notion des foyers successifs développée au début de l'Ouvrage, et introduisant la notion de *foyers-limites*, l'auteur trouve le théorème suivant :

Si sur une surface convexe quelconque on envisage toutes les géodésiques fermées sans point double, l'excès du nombre de celles qui sont stables sur le nombre de celles qui sont instables est constant et égal à 1.

Sur une surface convexe, *il y a donc toujours au moins une géodésique fermée stable sans point double.*

En terminant, l'auteur discute divers types de géodésiques fermés et donne une seconde démonstration du théorème, qu'il y a toujours au moins une géodésique fermée.

Bromwich (*T.-G.*). — La classification des quadriques. (275-285).

Dans un numéro antérieur (t. IV, p. 161) de ce journal, M. Coolidge a donné une classification des quadriques dans l'espace hyperbolique, s'appuyant sur l'Ouvrage de Clebsch regardant les relations mutuelles de deux quadriques. Dans le présent Ouvrage, l'auteur discute ce même problème, faisant usage de la classification des formes quadratiques par le moyen des diviseurs élémentaires de Weierstrass. Il trouve que certains types de M. Coolidge peuvent être simplifiés davantage.

Wright (*J.-E.*). — Sur les invariants différentiels. (286-315).

Cet Ouvrage est consacré à la détermination des invariants différentiels par rapport aux transformations de contact. L'auteur obtient une énumération complète de ces invariants d'un certain type, comme suit :

1° Les expressions envisagées sont : a, des expressions du premier ordre en m variables dépendantes et n variables indépendantes ; b, des expressions de deuxième ordre en une variable dépendante.

2° Les invariants considérés sont seulement de premier ordre ; *i. e.*, ils contiennent seulement les dérivées de premier ordre des expressions différentielles.

Les variables envisagées au cas a, sont :

$$x_1, \ldots, x_n : \text{les variables indépendantes,}$$
$$z_1, \ldots, z_m : \text{les variables dépendantes,}$$

$$p^i_k = \frac{\partial z_i}{\partial x_k} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n);$$

$$p^i_{kl} = \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_k\, \partial x_z} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ k, l = 1, \ldots, n);$$

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k}, \frac{\partial f_\lambda}{\partial z_i}, \frac{\partial f_\lambda}{\partial p^i_k} \qquad (\lambda = 1, \ldots, r;\ i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n);$$

$f_\lambda(x, z, p^k_i)$, $(\lambda = 1, \ldots, r)$ étant les expressions différentielles envisagées.

Dans les invariants du cas b les variables sont les mêmes, sauf qu'on a $m = 1$ et qu'il y a de nouvelles variables

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial p_{kl}} \qquad (\lambda = 1, \ldots, r;\ k, l = 1, \ldots, n),$$

$f_\lambda(x, z, \mathrm{P}_k, \mathrm{P}_{kl})$ étant les expressions différentielles envisagées.

Employant une modification d'une méthode de Lie, l'auteur démontre alors les deux théorèmes suivants :

Dans le cas a, *les seuls invariants relatifs fonctionnellement indépendants de r expressions f sont les alternants* $[f_\lambda f_\mu]$ *si l'on a* $r < 2n+1$; *si l'on a* $r = 2n+1$, *il y a un invariant de plus, à savoir le jacobien des formes par rapport aux variables y contenues.*

Dans le cas b, *tous les invariants de r expressions f de ce type sont :*

1° *Des expressions de type df ; ou bien*

2° *Des invariants ou covariants algébriques des formes quadratiques*

$$\sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial p_{ij}} v_i v_j,$$

les v étant les variables et où l'on a

$$v_k = dp_k - \sum_{i=1}^{n} p_{ki}\, dx_i,$$

pourvu que

$$dz \neq \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i,$$

et les v ne sont pas zéro; ou bien

3° *Des invariants algébriques des formes quadratiques*

$$\sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial p_{ij}} y_i y_j$$

et de la forme linéaire

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\, dx_i,$$

les y etant les variables, pourvu que

$$dz = \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i, \qquad dp_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\, dx_k.$$

Dans ce théorème il y a deux systèmes des conditions sur les y :

1° Les déterminants d'ordre r de la matrice

$$\begin{vmatrix} P_{1,11} & \dots & P_{1,ij} & \dots & P_{1,nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{r,11} & \dots & P_{r,ij} & \dots & P_{r,nn} \end{vmatrix}$$

ne sont pas tous zéro, où

$$P_{r,ij} = \frac{\partial f_r}{\partial p_{ij}};$$

2° L'identité

$$\sum_{i=1}^{r} S_i B_i + AR = 0$$

ne peut être satisfaite pourvu qne les B_i soient des multiples constants de A. Ici $y_1, y_2, \dots, y_n$ étant n variables quelconques, les B_i sont des fonctions linéaires des y_k, K est une fonction quadratique des y_k, et

$$S_i = \sum_{\alpha,\beta} P_{i,\alpha\beta} y_\alpha y_\beta,$$

$$A = \sum_{k} y_k\, dx_k.$$

Neikirk (*L.-D.*). — Les groupes d'ordre p^m contenant des sous-groupes cycliques d'ordre p^{m-3}. (316-325).

Burnside a déterminé tous les groupes d'ordre p^m contenant des sous-groupes cycliques invariants d'ordre p^{m-1} et p^{m-2}, et Miller a déterminé le nombre de groupes d'ordre p^m contenant des sous-groupes cycliques non invariants d'ordre p^{m-2}. Cet Ouvrage donne une liste complète de groupes d'ordre p^m (p premier impair) contenant des sous-groupes d'ordre p^{m-3} et qui n'ont pas d'ordre supérieur. La méthode est abstraite et de telle nature qu'il est possible de donner pour chaque groupe les équations génératrices.

Miller (*G.-A.*). — Les sous-groupes invariants dont l'index est un nombre premier. (326-331).

L'ensemble de tous les éléments d'un groupe (G) quelconque communs à tous les sous-groupes invariants dont l'index p est un nombre premier est un sous-groupe caractéristique de G. et le groupe facteur correspondant est le groupe abélien d'ordre p^λ et de type (1, 1, ...). Ce résultat est dû à M. Bauer (*Nouvelles Annales*, t. XIX, 1900, p. 509). Le nombre des sous-groupes invariants d'index p est donc $\frac{p^\lambda - 1}{p - 1}$. Si G est abélien, λ est égal au nombre d'invariants dans le sous-groupe de Sylow d'ordre p^m contenu dans G. Si G n'est pas abélien, la détermination de λ est beaucoup plus difficile. Ce nombre ne peut dépasser la valeur de λ pour un sous-groupe de Sylow d'ordre p^m contenu en G, mais il peut être plus petit. Par conséquent, il est important de déterminer les valeurs de λ pour les groupes d'ordre p^m, et dans la suite l'auteur suppose que l'ordre de G soit de cette forme. Au lieu de déterminer la valeur de λ pour des groupes donnés, il emploie la méthode inverse de déterminer les groupes possibles pour une valeur donnée de λ. On sait que si $\lambda = 1$, G est cyclique; si $\lambda = m$, G est abélien de type (1, 1, ...). Tous les groupes correspondant à la valeur $\lambda = m - 1$ ont été récemment déterminés par M. Miller (*Mathematische Annalen*, t. LX, 1905); les groupes hamiltoniens appartiennent à cette catégorie.

Le présent Ouvrage est consacré à l'étude d'une classe de groupes appartenant à la valeur $\lambda = m - 2$, savoir, à tous ceux dont le sous-groupe commutateur est d'ordre p. Dans ce qui suit, G est supposé non abélien, parce que les seuls groupes abéliens de cette classe sont des types (3, 1, 1, ...) et (2, 2, 1, 1, ...).

L'auteur démontre d'abord le théorème suivant dont il fait usage dans la suite :

Si l'ordre du sous-groupe commutateur d'un groupe d'ordre p^m est p, chaque élément commun à tous les sous-groupes d'index p est invariant dans le groupe.

Soit K le plus grand sous-groupe de G qui est contenu dans chaque sous groupe d'index p. L'ordre de K est alors p^2. Le travail est divisé en deux parties. Dans la première, l'auteur étudie les groupes G dans lesquels K est cyclique; dans la seconde, ceux dans lesquels K est non-cyclique. Le sous-groupe commutateur d'ordre p est représenté par C.

Les résultats de la première partie peuvent se résumer comme suit : soit I le groupe $\frac{G}{C}$. I est abélien de type (2, 1, 1, ...). Soit alors H le sous-groupe de G

correspondant à tous les éléments de I dont l'ordre ne dépasse *p*. *Quand* H *est donné, il y a toujours deux groupes* G, *pourvu que* H *ait plus de* p^2 *éléments invariants; si* A *n'a que* p^2 *éléments invariants, il y a un seul groupe* G. *La première de ces deux catégories de groupes est composé de* $\frac{1}{2}(m-1)$ *ou* $\frac{1}{2}(m-2)$ *groupes suivant que m est impair ou pair. La seconde catégorie est composée de* $\frac{1}{2}(m-3)$ *ou* $\frac{1}{2}(m-2)$ *groupes suivant que m est impair ou pair.*

Dans la seconde partie (K non-cyclique), l'auteur prouve qu'il y a correspondant à chaque H un seul G qui a le même groupe d'isomorphismes cogrédients que H (H ayant la même signification que dans la première partie). Il reste alors la considération des G dont ce groupe d'isomorphismes est plus large que celui des H. L'auteur trouve que pour chaque H il y a dans cette hypothèse cinq groupes G distincts avec le même groupe d'isomorphismes cogrédients, si ce groupe est d'ordre moindre que p^{m-3}; si cet ordre est p^{m-3}, il n'y a que quatre groupes G distincts de ce type.

Brown (*E. W.*). — Une méthode générale pour traiter les mouvements transmis et son application à des perturbations indirectes. (332-343).

La discussion mathématique d'un problème physique demande la construction d'un problème idéal, dont les conditions sont différentes de celles du problème actuel. En général, ce problème idéal est construit en négligeant d'abord quelques-unes des influences qui en font partie, mais qu'on suppose affecter les résultats moins que celles qu'on retient. Ce problème simplifié, l'auteur l'appelle le problème A. Le problème A étant résolu, il faut déterminer les changements nécessaires dans la solution de A quand quelques-unes ou toutes les influences négligées y sont comprises; ce problème, l'auteur l'appelle problème B. Ce Mémoire est consacré au problème de déterminer une solution de B quand on connaît la solution de A.

Une méthode pour résoudre le problème B est celle dite *la variation des constantes arbitraires*. Dans cette méthode, les constantes du problème A deviennent des variables dans le problème B. La relation entre A et B peut donc être regardée comme un changement de variables introduit dans B pour le simplifier. Le problème A n'est plus regardé comme un problème de Dynamique, mais simplement comme un ensemble de relations qui donnent lieu à des transformations utiles pour la solution de B. L'auteur se propose de discuter un cas particulier de telles transformations différentes de celles qui se posent dans la méthode de variations des constantes, quoique suggérées par elles.

Les équations d'un système dynamique sont supposées écrites sous la forme canonique

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}, \qquad [\Phi = \Phi(x_i, y_i, t)],$$

où, pour fixer les idées, les n variables x_i peuvent être considérées comme coordonnées définissant la position du système, les n invariables y_i comme les moments correspondants, et Φ comme la somme de l'énergie vive et potentielle; ces interprétations ne sont pourtant pas nécessaires.

Supposons qu'on change les x_i, y_i en $2n$ variables nouvelles p_i, q_i liées aux x_i, y_i par les relations

$$y s_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad q_i = \frac{\partial S}{\partial p_i} \qquad [S = S(x, y, t)].$$

Jacobi a démontré que les équations auxquelles satisfont les variables nouvelles sont

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\Phi + \frac{\partial S}{\partial t}\right), \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right).$$

Aucune condition n'est posée relativement à la forme de la fonction S; mais il faut que le déterminant

$$\left|\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \, \partial p_j}\right|$$

soit différent de zéro. Si maintenant les x_i, y_i sont exprimées comme fonctions de t et des p_i, q_i, on trouve les relations

$$\begin{array}{lll} [p_i, q_i] = 1, & [p_i, q_j] = 0 & (i \neq j), \\ [p_i, p_j] = 0, & [q_i, q_j] = 0 & (i = \text{ou} \neq j), \end{array}$$

en posant

$$[\alpha, \beta] = \sum_i \left[\frac{dy_i}{d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta} - \frac{dx_i}{d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta}\right].$$

Supposons maintenant que S ait été choisie de façon à satisfaire à l'équation

$$\Phi + \frac{\partial S}{\partial t} = B,$$

B étant une fonction des p seulement; c'est là une forme très utile dans bien des applications. Les p et, par conséquent, les $\frac{dq}{dt}$ sont alors des constantes. Posons

$$p_i = c_i, \qquad q_i = \omega_i = b_i t + \varepsilon_i, \qquad b_i = -\frac{\partial B}{\partial c_i},$$

les constantes arbitraires étant c_i, ε_i et B étant une fonction des c_i seulement; à présent B n'est pas déterminée, mais elle peut être assujettie à des conditions prochaines regardant les formes de x, y comme fonctions de c, ε, t.

L'auteur suppose résolu ce problème et qu'on emploie la nouvelle forme de S comme fonction des c_i, ω_i, t, qui sont toutes indépendantes. Les équations (1) donnent

$$(2) \qquad y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad \omega_i = \frac{\partial S}{\partial c_i} \qquad [S = S(x, c, t)],$$

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{lll} [c_i, \omega_i] = 1, & [c_i, \omega_j] = 0 & (i \neq j), \\ [c_i, c_j] = 0, & [\omega_i, \omega_j] = 0 & (i = \text{ou} \neq j). \end{array}\right.$$

Supposons maintenant que Φ contient m constantes α_h auxquelles on n'a pas donné de valeurs numériques. Quelques-unes de ces constantes ou toutes appartiendront à toute forme de S. Pour faire plus générale la discussion, il suppose ces constantes remplacées par des variables ou constantes u_h liées aux α_h

par les m relations indépendantes

$$f_k(u_h, \alpha_h, t) = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, m).$$

La fonction S était une fonction de x, c, α, t; elle est maintenant une fonction de x, c, u, t; représentons-la par S′ dans ce dernier cas. Posons

$$U_h = \frac{\partial S'}{\partial u_h}, \qquad \frac{\partial' \Phi}{\partial u_h} = \frac{\partial}{\partial u_h} \Phi(x, y, u, t).$$

On démontre alors la relation

$$\frac{dU_h}{dt} = -\frac{\partial' \Phi}{\partial u_h} - \sum_k U_k \frac{\partial u_k}{\partial u_h} - \frac{\partial B}{\partial u_h},$$

une équation qui permet de trouver U_h. Il résulte alors qu'on a

$$\frac{dU_h}{dc_i} = [u_h, c_i], \qquad \frac{dU_h}{d\omega_i} = [u_h, \omega_i],$$
$$\frac{dU_h}{du_k} - \frac{dU_k}{du_h} =]u_h, u_k].$$

L'auteur suppose maintenant que t ne se trouve pas explicitement ni dans $\Phi(x, y, u, t)$, ni dans les x, y quand elles sont exprimées comme fonctions de c, ω, u, t. On a alors

$$\frac{\partial S'}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_h U_h u_h, \qquad \Phi + \sum_h U_h \dot{u}_h = -B.$$

Dans la méthode ordinaire de la variation des constantes, on suppose qu'après que les équations (1) ont été résolues en termes de c, ω, t, une nouvelle fonction $R(x, y, t)$ soit ajoutée à Φ. On suppose de plus qu'alors x, y sont de la même forme en c, ω, t, de façon que c, ε ne sont plus constantes. Mais cela revient simplement à une transformation des variables x, y en des variables nouvelles c, ω, de sorte que les résultats de la première partie de cet Ouvrage sont immédiatement applicables. En effet, on trouve sans difficulté en employant (3) les équations

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial \omega_i}, \qquad \frac{d\omega_i}{dt} = -\frac{\partial Q}{\partial c_i},$$

où la fonction $Q = \Phi + R + \frac{\partial S}{\partial t}$ est supposée exprimée au moyen de (2) en fonction de c, ω, t. Mais Φ étant une fonction de x, y, t et $\frac{\partial S}{\partial t}$ étant une fonction de x, c, t, et Φ ni $\frac{\partial S}{\partial t}$ ne contenant des dérivées totales par rapport à t, $\Phi + \frac{\partial S'}{\partial t}$ doit être de la même forme quelles que soient les valeurs données à c, ω. On a donc $\Phi + \frac{\partial S}{\partial t} = -B$, une fonction de c seulement, et

$$Q = -B + R.$$

Supposons que R est due au changement d'une des constantes α de Φ en une variable. On a alors

$$Q = -B + \frac{\partial'\Phi}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial'^2\Phi}{\partial\alpha^2}(\delta\alpha)^2 + \ldots,$$

$\delta\alpha$ étant la partie variable ajoutée à α. Si l'on adopte cette méthode, on ne fait pas usage du fait que la *forme* de Φ considérée comme fonction de x, y, α, t ne change pas, et il paraît qu'on devrait en faire usage pour simplifier les résultats. La méthode nouvelle qui suit utilise ce fait et montre des résultats qui seront utiles dans les applications.

L'auteur suppose que les x, y ont les mêmes formes quand les u (remplaçant les α) dans Φ sont considérées comme des fonctions de t différentes de celles avec lesquelles le problème original a été résolu, de sorte qu'on ne remplace pas seulement les c, ω, *mais aussi les* u, par leurs valeurs nouvelles pour obtenir les valeurs nouvelles de x, y. Les valeurs nouvelles de c, ω sont différentes de celles qu'on trouve dans la méthode ordinaire. En effet, on trouve les relations

$$\frac{d\omega_j}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial c_j} - \sum_h [c_j, u_h]\dot{u}_h = \frac{\partial}{\partial c_j}\left(\Phi + \sum_h U_h\dot{u}_h\right) = \frac{\partial Q}{\partial c_j},$$

$$\frac{dc_j}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\omega_j} + \sum_h [\omega_j, u_h]\dot{u}_h = -\frac{\partial}{\partial\omega_j}\left(\Phi + \sum_h U_h\dot{u}_h\right) = -\frac{\partial Q}{\partial\omega_j},$$

si u_h est indépendant de c_j, ω_i, et encore

$$Q = \Phi + \sum_h U_h u_h.$$

Les équations sont donc encore en forme canonique. La forme finale de Q peut alors s'écrire

$$Q = -B + \sum_h U_h\left(\frac{d}{dt}\delta u_h - \delta\dot{u}_h\right).$$

L'auteur fait application de sa méthode au problème des inégalités planétaires indirectes du mouvement de la Lune. Il trouve sans difficulté le théorème suivant :

Si les carrés et les puissances d'ordre supérieur du rapport de la masse d'une planète à la masse du Soleil sont négligeables, le facteur α dû à une inégalité de période longue ne peut être présent dans le terme correspondant dans le mouvement de la Lune à une puissance supérieure à α^2, même si son carré est présent dans l'inégalité correspondante du mouvement de la Terre.

L'importance de ce résultat résulte du fait qu'il nous permet de rejeter d'avance beaucoup de termes à période longue, qu'avec la méthode ancienne on devrait examiner.

Dickson (L.-E.). — Les systèmes de nombres hypercomplexes. (344-348).

Il s'agit dans cette Note d'une généralisation de la notion de *système de nombres*. Dans la théorie ordinaire, on envisage des nombres $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, où les a_i parcourent indépendamment toutes les valeurs réelles ou complexes; par exemple, le système des quaternions réels ou le système des quaternions complexes. Une généralisation immédiate s'obtient quand les a_i sont considérés comme les éléments d'un corps commutatif F quelconque; par exemple, le système des quaternions rationnels. On peut aussi supposer que les a_i prennent des valeurs d'une portion seulement des éléments F; par exemple, le système des quaternions intégraux. Encore, il n'est pas nécessaire que les a_i parcourent tous les éléments d'un même corps.

Si nous faisons ces généralisations en retenant la notion ordinaire des unités e_i, nous n'obtenons que des sous-systèmes des systèmes ordinaires, les cas des systèmes modulaires faisant exception. Il n'en est pas ainsi si nous généralisons la notion des unités elles-mêmes en enlevant la restriction d'être linéairement indépendantes par rapport au système de tous les nombres complexes ordinaires, et en supposant seulement qu'elles soient indépendantes par rapport au corps F. Cette notion d'un système de nombre est alors plus générale que celle de Taber (*Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. V, 1904, p. 309). L'auteur démontre alors que chaque système de nombres hypercomplexes peut se définir comme suit :

Un système de n éléments ordonnés $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de F est dit *un élément n-ple*. On a $a = b$ seulement si l'on a $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$. Soit γ_{ijk} n^3 éléments fixes de F. Un système d'éléments n-ples se dit fermé si les cinq postulats suivants sont satisfaits.

I. Si a, b sont des éléments du système, leur *somme*

$$a + b = \mathrm{S} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

est un élément du système.

II. L'élément $0 = (0, \ldots, 0)$ est dans le système.

III. Si 0 est dans le système correspondant à chaque élément a, il y a un élément a' du système tel qu'on a $a + a' = 0$.

IV. Si a, b sont deux éléments du système, leur *produit* $ab = p$, où l'on a

$$p_i = \sum_{j,k}^{1,\ldots,n} a_j b_k \gamma_{jki} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

est un élément du système.

V. Les γ_{jki} satisfont aux relations

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{rtj}\gamma_{jki} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{tkj}\gamma_{rji} \qquad (r, t, k, i = 1, \ldots, n).$$

Il suit que la multiplication est *associative* et *distributive*. Le système fermé est de n dimensions si l'on a encore :

VI. Si $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sont des éléments de F tel qu'on a

$$\tau_1 a_1 + \ldots + \tau_n a_n = 0$$

pour chaque élément a du système, on a

$$\tau_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \tau_n = 0.$$

Il arrive alors que chaque système fermé à n dimensions est un système de nombres hypercomplexes. L'auteur discute aussi l'indépendance de ses postulats et envisage quelques autres généralisations.

Maclagan-Wedderburn (*J.-H.*). — Un théorème sur les algèbres finies. (349-352).

Frobenius et C.-S. Peirce ont démontré que, dans le domaine de tous les nombres réels, le système des quaternions et ses sous-systèmes sont les seuls systèmes linéaires associatifs de nombres dont chaque nombre (zéro excepté) a un inverse ; et que dans le domaine complexe il n'y a pas de système linéaire associatif avec cette propriété. L'auteur démontre dans cette Note que les corps de Galois sont les seuls systèmes avec un nombre fini d'éléments doués de cette propriété.

Royce (*J.*). — Le rapport des principes de la logique aux principes de la Géométrie. (353-415).

Dans les *Philosophical Transactions* de la Société royale de Londres, A.-B. Kempe a publié en 1886 un Mémoire *Sur la théorie de forme mathématique*, dans lequel il discute les notions fondamentales de la logique symbolique et de la Géométrie. Ces idées, M. Kempe les a encore développées dans un Mémoire *Sur le rapport entre la théorie logique des classes et la théorie géométrique des points* (*Proceedings of the London mathematical Society*, 1890). En dépit du grand intérêt qui se rattache à présent aux principes de la Géométrie, ces Ouvrages de M. Kempe n'ont pas reçu l'attention qu'ils méritent. L'auteur de ce Mémoire s'est donc proposé de discuter de nouveau les conceptions de M. Kempe. Cette discussion l'a amené à des conceptions nouvelles. Les principes de l'Algèbre de la Logique eux-mêmes sont énoncés dans une forme différente de ceux de M. Kempe et de ceux que Huntington a récemment énoncés dans les *Transactions* (Vol. V, p. 288 et 552). Une relation fondamentale, dite o-*relation*, est définie au moyen de postulats. Ces o-relations sont entièrement symétriques et peuvent être satisfaites par des paires, des triples, etc. et par un système d'un nombre quelconque d'éléments. Les relations asymétriques possibles dans l'Algèbre de la logique sont dérivées des propriétés des o-relations. Une nouvelle théorie de l'addition et de la multiplication logique est développée, basée sur celle de M. Kempe, mais plus générale. L'auteur démontre alors comment on peut obtenir les axiomes de Géométrie comme théorèmes de l'Algèbre de la Logique.

Pierpont (*P.*). — Sur les intégrales multiples. (416-434).

La principale difficulté dans la théorie des intégrales multiples se présente dans la considération des points du contour du champ d'intégration $\mathfrak{A}$. La

théorie des ensembles a rendu possible la considération de champs généraux. Stolz, Pringsheim et Cauchy ont fait des contributions importantes dans cette direction. Jordan, en particulier, a traité avec une grande généralité le cas de deux variables. Dans cette théorie, deux théorèmes fondamentaux concernent la réduction d'une intégrale multiple à une intégrale itérée et le changement de variables dans une intégrale multiple. L'auteur du présent Mémoire se propose d'obvier aux difficultés graves des points du contour du champ d'intégration par une généralisation de la définition de l'intégrale. Cette généralisation a été donnée auparavant par Stolz (*Sitzungsberichte der Wiener Akademie,* Vol. CVI, 1837, Abt. II, A, p. 453); mais l'importance de cette définition paraît lui avoir échappé.

Il convient de représenter les points $x=(x_1, \ldots, x_m)$ d'un espace R_m à m dimensions par un ensemble de points sur m lignes. Divisons chacune de ces lignes en des intervalles de longueur $\leqq d$, de manière qu'un segment fini quelconque d'une de ces lignes ne contienne qu'un nombre fini de ces intervalles. Nous dirons que nous avons effectué *une division rectangulaire de* R_m *de norme* d; elle divise R_m en des *cellules* rectangulaires de côté $\leqq d$. Si les longueurs des intervalles sont tous égales, ces cellules deviennent des cubes. La division est alors dite *cubique*. Soient $\mathfrak{A}$ un ensemble de points borné; *i. e.* les coordonnées des points ne dépassant pas en valeur absolue un nombre donné. Soit $f(x_1, \ldots, x_m)$ une fonction uniforme bornée définie pour chaque point de $\mathfrak{A}$. Soit D une division rectangulaire de R_m de norme d. Soient $d_1, d_2, d_3, \ldots$ les cellules de D contenant au moins un point de $\mathfrak{A}$. Sans ambiguïté on peut aussi représenter le volume de ces cellules par les mêmes lettres. Soient

$$M_i = \max. f, \qquad m_i = \min. f, \qquad \text{dans } \alpha_i$$

et

$$|f(x_1, \ldots, x_m)| \leqq F, \qquad \text{dans } \mathfrak{A}.$$

Soient

$$\overline{S}_D = \sum_i M_i d_i, \qquad \underline{S}_D = \sum_i m_i d_i,$$

qu'on peut appeler les *sommes supérieures* et *inférieures* pour la division D. Soit $M_i - m_i = \text{osc.} f_i$ l'oscillation de f dans d_i.

Soit $\mathfrak{B}$ un sous-ensemble de $\mathfrak{A}$. Si la distance

$$\left[\text{dist.}(a, b) = \sqrt{(a_1-b_1)^2+\ldots+(a_m-b_m)^2}\right]$$

d'un point quelconque du contour de $\mathfrak{A}$ à un point quelconque du contour de $\mathfrak{B}$ dépasse $\rho > 0$, nous dirons que $\mathfrak{B}$ est un ensemble intérieur de $\mathfrak{A}$. Un ensemble de points ne contenant aucun de ces points de contour est dite une *région*. Le point x tel que dist. $(a, x) \leqq \delta$ forment un *domaine de a de norme* $\delta = D_\delta(a)$.

Ces définitions posées, l'auteur démontre les théorèmes suivants :

I. *Soit* $f(x_1, \ldots, x_m) \geqq 0$ *définie pour le champ* $\mathfrak{A}$. *Soit* $\overline{S} = \min. \overline{S}_D$ *par rapport à toutes les divisions rectangulaires* D *de norme d. On a* $\lim\limits_{d=0} \overline{S}_D = \overline{S}$. *Aussi*, $\lim\limits_{d=0} \underline{S}_D = \underline{S}$, *si l'on a* $f \geqq 0$ *et* $\underline{S} = \max. \underline{S}_D$.

II. *Si* $f(x_1, \ldots, x_m)$ *est définie pour chaque point de* $\mathfrak{A}$, les limites $\lim\limits_{d=0} \underline{S}_D$ *et* $\lim\limits_{d=0} \overline{S}_D$ *existent et sont finies.*

2de Partie

Ces deux limites sont dites respectivement les intégrales *inférieure* et *supérieure* de f sur $\mathfrak{A}$ et sont représentées par

$$\underline{\int}_{\mathfrak{A}} f\, d\mathfrak{A} \quad \text{et} \quad \overline{\int}_{\mathfrak{A}} f\, d\mathfrak{A}.$$

Si ces deux limites sont égales, on dit que f est intégrable dans $\mathfrak{A}$; la valeur commune de cette limite est alors dite *intégrale* de f sur $\mathfrak{A}$ et se représente par

$$\int f\, d\mathfrak{A}.$$

III. *Soient* D *une division rectangulaire quelconque, de norme* d, *et* ξ_i *un point quelconque de* $\mathfrak{A}$ *dans la cellule* d_i. *Si* f *est intégrable dans* $\mathfrak{A}$ *on a* $\lim\limits_{d=0} \sum f(\xi_i)\, d_i = \int_{\mathfrak{A}} f\, d\mathfrak{A}$; *et réciproquement, si cette limite existe,* f *est intégrable dans* $\mathfrak{A}$.

Soit f définie pour chaque point de $\mathfrak{A}$. Soit D une division cubique de norme $d \leq d_0$. S'il y a un nombre ω tel qu'on ait

$$\sum_i d^{m-1} \operatorname{osc.} f_i < \omega,$$

quelle que soit la division D, nous dirons que f a une *variation limitée* dans $\mathfrak{A}$.

IV. *Si* f *a une variation limitée dans* $\mathfrak{A}$, f *est intégrable dans* $\mathfrak{A}$.

Dans tout ce qui suit dans ce Mémoire, la notion de la *mesure* d'un ensemble est fondamentale. Cette notion a été définie de façons diverses par Cantor, Jordan et par Borel. La définition suivante est équivalente à celle de Cantor et de Jordan, quoiqu'elle paraisse différente. Soient $\mathfrak{A}$ un ensemble borné dans R_m et D une division de R_m de norme d. Soient $d_1, d_2, d_3, \ldots$ les cellules contenant au moins un point de $\mathfrak{A}$; $d'_1, d'_2, d'_3, \ldots$ les cellules dont tous les points sont des points de $\mathfrak{A}$. Alors *les limites* $\overline{\mathfrak{A}} = \lim\limits_{d=0} \sum d_i$ *et* $\underline{\mathfrak{A}} = \lim \sum d'_i$ *existent et sont finis*. Les nombres $\overline{\mathfrak{A}}$, $\underline{\mathfrak{A}}$ sont dits la *mesure supérieure* et *inférieure* de $\mathfrak{A}$. Si l'on a $\overline{\mathfrak{A}} = \underline{\mathfrak{A}}$ leur valeur communes est dite la *mesure* de $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}$ est *mesurable* dans ce cas, et la mesure se représente par mes. $\mathfrak{A}$. *Pour que* $\mathfrak{A}$ *soit mesurable, il est nécessaire que la mesure de ses points de contour soit zéro.*

Il convient d'étendre les notions de cellules, divisions, etc., comme suit : Supposons que les points d'un ensemble $\mathfrak{A}$ soient divisés en des ensembles partiels (cellules) avec les propriétés suivantes :

1° Il n'y a qu'un nombre fini de cellules dans une portion limitée quelconque de R_m;

2° Le contour de chaque cellule est de mesure zéro;

3° Chaque cellule est contenue dans un cube de côté $\leq \delta$. Cette division de $\mathfrak{A}$ est dite de *norme* δ. Soit Δ une telle division; soient $\overline{\mathfrak{A}}_\Delta$ la mesure de toutes les cellules contenant au moins un point de $\mathfrak{A}$, $\underline{\mathfrak{A}}_\Delta$ la mesure de toutes les cellules dont tous les points sont des points de $\mathfrak{A}$. On a alors

$$\lim_{\delta=0} \overline{\mathfrak{A}}_D = \overline{\mathfrak{A}}, \qquad \lim_{\delta=0} \underline{\mathfrak{A}}_\Delta = \underline{\mathfrak{A}}.$$

Après quelques théorèmes généraux sur les intégrations multiples, l'auteur s'approche du problème de la réduction des intégrales multiples aux intégrales itérées. Soit $\mathfrak{A}$ un ensemble de points dans R_m. Soit $x = (x_1, \ldots, x_m)$ un point de $\mathfrak{A}$. L'ensemble de toutes les valeurs x_i des points de $\mathfrak{A}$ forment un ensemble x_i^0 (la projection de $\mathfrak{A}$ dans l'axe des x_i). Les points de $\mathfrak{A}$ pour lesquels x_i a une valeur donnée, $x_i = \xi_i$, forment un ensemble $\mathfrak{p}_i$. Les points

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_m)$$

forment l'ensemble $\mathfrak{x}_i$. L'auteur démontre alors le théorème qui suit :

Soit $f(x_1, \ldots, x_m)$ une fonction bornée définie dans un ensemble mesurable $\mathfrak{A}$. Alors on a

$$(1) \qquad \underline{\int}_{\mathfrak{A}} f\,d\mathfrak{A} \leqq \underline{\int}_{\mathfrak{x}_i} dx_i \underline{\int}_{\mathfrak{p}_i} f\,d\mathfrak{p}_i \leqq \overline{\int}_{\mathfrak{x}_i} dx_i \underline{\int}_{\mathfrak{p}_i} f\,d\mathfrak{p}_i \leqq \overline{\int}_{\mathfrak{A}} f\,d\mathfrak{A},$$

$$(2) \qquad \underline{\int}_{\mathfrak{A}} f\,d\mathfrak{A} \leqq \underline{\int}_{\mathfrak{x}_i} dx_i \overline{\int}_{\mathfrak{p}_i} f\,d\mathfrak{p}_i \leqq \overline{\int}_{\mathfrak{x}_i} dx_i \overline{\int}_{\mathfrak{p}_i} f\,d\mathfrak{p}_i \leqq \overline{\int}_{\mathfrak{A}} f\,d\mathfrak{A},$$

$$(3) \qquad \underline{\int}_{\mathfrak{A}} f\,d\mathfrak{A} \leqq \underline{\int}_{\mathfrak{x}_i} d\mathfrak{x}_i \underline{\int}_{x_i} f\,dx_i \leqq \overline{\int}_{\mathfrak{x}_i} d\mathfrak{x}_i \underline{\int}_{x_i} f\,dx_i \leqq \overline{\int}_{\mathfrak{A}} f\,d\mathfrak{A},$$

$$(4) \qquad \underline{\int}_{\mathfrak{A}} f\,d\mathfrak{A} \leqq \underline{\int}_{\mathfrak{x}_i} d\mathfrak{x}_i \overline{\int}_{x_i} f\,dx_i \leqq \overline{\int}_{\mathfrak{x}_i} d\mathfrak{x}_i \overline{\int}_{x_i} f\,dx_i \leqq \overline{\int}_{\mathfrak{A}} f\,d\mathfrak{A}.$$

La dernière partie de ce Mémoire est consacrée au problème du changement des variables. Soit T une transformation, de déterminant $\neq 0$,

$$x_i = \Phi_i(t_1, \ldots, t_m) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

les Φ_i ayant des dérivées continues dans la région R. La région R est transformée par T en une région R_T, dite l'*image* de R. T est dite *régulière*.

Soit uniforme la correspondance entre R et R_T. Il vient alors que *si $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{A}_T$ est mesurable, l'autre l'est aussi.*

Soit J *le déterminant de* T. *Soit $\mathfrak{T}$ un ensemble intérieur parfait et mesurable de* R *et soit $\mathfrak{X}_i$ l'image de $\mathfrak{T}$. Soit $f(x_1, \ldots, x_m)$ continue en $\mathfrak{X}$. On a alors*

$$\int_{\mathfrak{X}} f(x_1, \ldots, x_m)\,dx_1 \ldots dx_m = \int_{\mathfrak{T}} |J|\,f\,dt_1 \ldots dt_m.$$

Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble intérieur de R *et soit $\mathfrak{X}$ son image. Soit $f(x_1, \ldots, x_m)$ une fonction bornée en $\mathfrak{S}$. Alors on a*

$$\overline{\int}_{\mathfrak{X}} f(x_1, \ldots, x_m)\,d\mathfrak{X}_i = \overline{\int}_{\mathfrak{T}} |J|\,f\,d\mathfrak{T},$$

$$\underline{\int}_{\mathfrak{X}} f(x_1, \ldots, x_m)\,d\mathfrak{X} = \underline{\int}_{\mathfrak{T}} |J|\,f\,d\mathfrak{T}.$$

Fréchet (M.). — Sur l'écart de deux courbes et sur les courbes limites. (435-449).

L'auteur appelle *arc de courbe continue* l'ensemble *ordonné* formé par la suite des points qu'on obtient en faisant croître t de t_0 à t_1 dans les formules

$$(1) \qquad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t),$$

où f, g, h sont trois fonctions de t uniformément continues de t_0 à t_1. Lorsque f, g, h ne sont en même temps constants dans aucun intervalle de valeurs de t, il dit que les formules (1) fournissent une représentation *normale* de la courbe. Si les formules (1) donnent à x, y, z les mêmes valeurs pour deux valeurs différentes de t : t'_0, t'_1, sans que f, g, h soient constants entre ces deux valeurs de t, t'_0 et t'_1 correspondant à deux points de la courbure qui sont considérés comme *distincts* quoiqu'ils occupent la même position dans l'espace; il y a ainsi un point *multiple* de la courbe.

Soient maintenant

$$(2) \qquad x = \varphi(u), \quad y = \psi(u), \quad z = \chi(u)$$

trois formules différentes des formules (1), où φ, ψ, χ sont des fonctions de u uniformément continues dans l'intervalle (u_0, u_1). Les formules (1) et (2) représentent deux ensembles de points ordonnés : C et Γ. Ces formules représentent la même courbe lorsque les ensembles *ordonnés* C et Γ sont superposables. L'auteur entend par là qu'on peut établir entre les points de C et de Γ une correspondance univoque et réciproque de façon que deux points correspondants occupent la même position dans l'espace et que deux points quelconques de C soient trouvés dans le même ordre relatif que les deux points correspondants de Γ quand on parcourt C et Γ dans le sens de t et u croissants. D'après cette définition, les courbes C et Γ peuvent être formées avec les mêmes points de l'espace et être cependant distincts.

L'auteur cherche d'abord les relations qui doivent exister entre f, g, h ; φ, ψ, χ pour que les formules (1) et (2) représentent la même courbe au sens indiqué. Si les représentations (1) et (2) sont normales, il est aisé de voir qu'on doit avoir pour deux points correspondants une relation

$$u = \theta(t),$$

θ étant une fonction continue de t_0 à t_1 et qui croît constamment de u_0 jusqu'à u_1 lorsque t croît de t_0 à t_1, et telle qu'on ait de t_0 à t_1

$$(3) \qquad f(t) = \varphi[\theta(t)], \quad g(t) = \psi[\theta(t)], \quad h(t) = \chi[\theta(t)].$$

Réciproquement, étant donnée la représentation normale d'une courbe C, les formules (1) définiront la même courbe lorsqu'on prendra pour f, g, h les fonctions définies par (3) où $\theta(t)$ est une fonction continue et croissante de t, et la représentation (1) sera normale.

L'auteur suppose maintenant que les représentations (1) et (2) soient choisies arbitrairement, non nécessairement normales, et cherche encore la condition pour que les deux courbes coïncident. Tout d'abord, si l'une se réduit à un seul point, il en sera de même de l'autre. Dans le cas contraire, l'auteur démontre qu'on peut ramener le problème au précédent. Autrement dit, une courbe continue qui ne se réduit pas à un seul point a toujours au moins une représentation normale. En effet, soit I l'ensemble des intervalles qu'on peut supposer sans points communs, où f, g, h sont à la fois constants. Il existe alors une fonction $s = a(t)$ allant sans jamais décroître de 0 à 1 quand t croît

de t_0 à t_1 et qui n'est constante que dans chacun des intervalles de I. Dès lors, à une même valeur de s correspond un seul point de C et l'on peut écrire

$$f(t) = f_0(s), \quad g(t) = g_0(t), \quad h(t) = h_0(t),$$

t variant de t_0 à t_1, et s de 0 à 1, et à deux valeurs de s distinctes correspondront deux points de C distincts (mais qui coïncident peut-être en position). Alors, par un raisonnement de continuité uniforme, l'auteur montre que les formules

$$x = f_0(s), \quad y = g_0(s), \quad z = h_0(s)$$

constituent une représentation normale de C. Il est alors facile de montrer que la condition cherchée peut s'exprimer comme suit :

Lorsqu'aucune des courbes (1) *et* (2) *ne se réduisent à un point, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles représentent la même courbe et qu'il existe deux fonctions* $a(t)$ *et* $\alpha(u)$ *continues allant sans jamais décroître de* 0 *à* 1, *n'étant constante que dans les intervalles où il en est respectivement de même pour* f, g, h *et pour* φ, ψ, χ *et telles que l'égalité :* $a(t) = \alpha(u)$ *entraine*

$$f(t) = \varphi(u), \quad g(t) = \psi(u), \quad h(t) = \chi(u).$$

L'auteur généralise maintenant la notion de voisinage introduite par Weierstrass dans le calcul des variations. Il attache à tout couple C, Γ d'arcs de courbes continues un nombre positif ou nul qu'il désigne par la notation (C, Γ) ou (Γ, C) et qu'il appelle *écart* des arcs C, Γ. Ce nombre sera tel que : 1° l'écart (C, Γ) n'est nul que si C et Γ coïncident; 2° C_1, C_2, C_3 étant trois arcs de courbes continues quelconques, si les écarts (C_1, C_3) et (C_2, C_3) sont infiniment petits, il en est de même de (C_1, C_2). Pour définir cet écart, considérons deux arcs continus quelconques distincts ou non, C et Γ. On peut les représenter d'une infinité de façons par des formules

(4) $\quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \quad (0 \leqq t \leqq 1),$

(5) $\quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (0 \leqq t \leqq 1),$

où f, g, h; φ, ψ, χ sont uniformément continus de 0 à 1. Soit $\delta(t)$ la distance de deux points correspondant à la même valeur de t. $\delta(t)$ est une fonction continue de t qui atteint un maximum absolu d. A chaque système de représentations (normales ou non) de C et Γ correspond une valeur déterminée positive ou nul de d. *L'auteur appelle* écart *de* C *et de* Γ *la limite inférieure* $e = (C, \Gamma)$ *de l'ensemble des valeurs de* d. Ce nombre sera lui-même positif ou nul.

Après quelques remarques consacrées au calcul simplifié de l'écart, il démontre les deux théorèmes suivants :

1. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux arcs de courbes continues coïncident est que leur écart soit nul.*

2. *Étant donnés trois arcs de courbes continues quelconques* C_1, C_2, C_3, *on a toujours* $(C_1, C_2) \leqq (C_1, C_3) + (C_2, C_3)$.

L'auteur définit ainsi la limite d'une suite de courbes :

Une suite d'arcs continus $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$ *a pour limite un arc continu* C *lorsque l'écart* (C, C_n) *tend vers zéro avec* $\frac{1}{n}$.

On peut ramener cette définition à la définition ordinaire au moyen de la proposition suivante :

3. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un arc continu* C_n *tende vers un arc continu déterminé* C *lorsque* n *croît indéfiniment est que, quelle que soit la représentation de* C :

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \quad (0 \leqq t \leqq 1),$$

on puisse choisir celle de C_n

$$x = f_n(t), \quad y = g_n(t), \quad z = h_n(t) \quad (0 \leqq t \leqq 1),$$

de façon que f_n, g_n, h_n *tendent uniformément vers* f, g, h *respectivement.*

L'auteur démontre aussi le théorème suivant :

4. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un arc continu* C_n *tende vers un arc continu déterminé* C *lorsque* n *croît indéfiniment est que, quelle que soit* ε, *on puisse trouver un nombre entier* n *tel que, quel que soit l'entier* p, *l'écart* (C_n, C_{n+p}) *soit inférieure à* ε.

Un ensemble E d'arcs continus est dit *compact* s'il ne comprend qu'un nombre fini d'éléments ou bien, dans le cas contraire, si tout ensemble H formé d'une infinité de courbes de E admet au moins une courbe limite. L'auteur, en terminant son Ouvrage, cherche la condition pour qu'un ensemble de courbes soit compact. Pour y arriver, il introduit l'*indice de compacité* d'un ensemble de courbes. Il appelle ainsi un nombre ν égal à zéro si E ne comprend qu'un nombre fini de courbes distinctes, et défini ainsi dans le cas contraire. Soit S une suite infinie de courbes $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ de l'ensemble E ; appelons ε_n la limite supérieure des écarts (C_n, C_{n+1}), (C_n, C_{n+2}), ..., et λ_S la plus grande des limites de ε_n. Si H est un ensemble formé d'une infinité de courbes de E, à toute suite S contenue dans H correspondra un nombre déterminé λ_S et nous pourrons prendre la limite inférieure μ_H des nombres λ_S. Par définition, l'indice de compacité de E sera la limite supérieure ν de μ_H quand H est quelconque dans E.

Il vient alors :

5. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* E *d'arcs continus soit compact est que son indice de compacité soit nul.*

Eiesland (*J.*). — Sur un système de lignes conjuguées d'une surface liée à la transformation d'Euler. (450-471).

Dans un Mémoire antérieur inséré à l'*American Journal of Mathematics*, t. XXVI, l'auteur a démontré quelques théorèmes relatifs aux courbes et aux surfaces à deux dimensions dans un espace à cinq dimensions qui appartiennent à un complexe asymptotique dont les lignes satisfont aux équations différentielles

$$(1) \quad \begin{cases} dx_0 + x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2 + x_4\,dx_3 - x_3\,dx_4 = 0, \\ dx_1\,dx_2 + dx_3\,dx_4 = 0. \end{cases}$$

Si u et v sont les coordonnées sur une surface d'un tel complexe et si l'on fait usage de la transformation

$$(2)\quad x_1 = \frac{P_1}{2}, \qquad x_2 = X_1, \qquad x_3 = \frac{P_2}{2}, \qquad x_4 = X_2, \qquad x_5 + x_1 x_2 + x_3 x_4 = X,$$

$X_1, X_2, X_3, P_1, P_2, -1$ étant les coordonnées d'un élément de surface dans l'espace ordinaire, on obtient, comme l'a montré l'auteur, une surface dans l'espace à trois dimensions sur laquelle les lignes u et v sont des lignes asymptotiques.

La Géométrie des complexes asymptotiques est par conséquent liée intimement à la théorie générale des surfaces; en effet, dans cinq dimensions, à chaque propriété géométrique d'une variété à deux dimensions appartenant à un complexe asymptotique correspond une propriété des surfaces de l'espace ordinaire. Dans la première partie de ce Mémoire, l'auteur montre qu'une seule transformation projective du complexe (1) donne la transformation classique d'Euler dans l'espace à trois dimensions. Cette transformation transforme les lignes asymptotiques d'une surface en un système bien défini de lignes conjuguées ayant une propriété géométrique caractéristique. L'auteur appelle ces lignes les *lignes d'Euler.*

L'auteur s'approche alors du problème de trouver toutes les surfaces dont les lignes d'Euler sont des lignes de courbure. Il vient que la détermination de ces surfaces dépend sur l'intégration d'une équation différentielle partielle avec des invariants égaux et à des quadratures. Sur une telle surface les lignes de courbure correspondent aux lignes asymptotiques de la surface transformée par la transformation d'Euler.

La seconde Partie de ce Mémoire est consacrée à la définition géométrique des lignes d'Euler et à la dérivation de leur équation différentielle. Ladite définition est contenue dans le théorème suivant :

Si une surface admet un système de lignes conjuguées (u) *et* (v) *tel que le couple de tangentes au point d'intersection de la projection des lignes sur le plan* $X_1 X_2$ *forme avec chaque axe un triangle isoscèle, la transformation d'Euler transformera la surface en une autre sur laquelle les lignes asymptotiques correspondent aux lignes conjuguées données. Un tel système de lignes conjuguées forme les lignes d'Euler.*

Dans la troisième Partie l'auteur démontre que la transformation d'Euler est seulement une des ∞^{10} transformations changeant des lignes asymptotiques d'une surface en des lignes d'Euler sur la surface correspondante. Il considère aussi un groupe de transformations de contact laissant invariantes les lignes d'Euler et montre que ce groupe contient ∞^{10} de ces transformations.

Eisenhart (*L.-P.*). — Les surfaces à courbure constante et leurs transformations. (472-485).

Bianchi a remarqué qu'il y a sur toute surface de courbure totale positive une infinité de systèmes conjugués de lignes caractérisés par la propriété que, si un tel système est paramétrique, les paramètres peuvent être choisis de façon à rendre égale à

$$\lambda(du^2 + dv^2)$$

la seconde forme quadratique générale, λ étant en général une fonction de u

et de v. Bianchi appelle un tel système *isotherme conjugué*. D'une façon analogue on prouve qu'il y a sur toute surface de courbure totale négative une infinité conjuguée telle que la seconde forme quadratique est réductible à

$$\lambda(du^2 - dv^2).$$

C'est ce qu'a fait l'auteur dans un Mémoire antérieur (*American Journal of Mathematics*, t. XXV, 1903, p. 220). Il appelle aussi ces systèmes *isothermes-conjugués*. Quand la courbure totale est constante et positive, la surface est dite *sphérique*. L'auteur trouve que si une surface sphérique est représentée par rapport à un système isotherme-conjugué, les quantités fondamentales de la surface et les équations qu'elles satisfont prennent des formes très simples, qui suggèrent des transformations changeant la surface en une autre surface sphérique. Le présent Mémoire est consacré à la considération de ces transformations.

Soit S une surface sphérique de courbure totale $\frac{1}{a^2}$. Supposons que les courbes paramétriques forment un système isotherme-conjugué et choisissons les paramètres de ces lignes de façon à rendre $D = D''$, $D' = 0$, D, D', D'' étant les coefficients de la seconde forme quadratique de la surface. Les équations de Gauss et de Codazzi s'écrivent sous les formes respectives

$$(1) \qquad D^2 = H\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H}{E}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H}{E}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right)\right]$$

et

$$(2) \qquad \frac{\partial \log D}{\partial u} = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}, \qquad \frac{\partial \log D}{\partial v} = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix},$$

où les symboles de Christoffel $\begin{Bmatrix}rs\\t\end{Bmatrix}$ sont formés par rapport à l'élément linéaire de S :

$$(3) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

et où nous avons mis

$$H = \sqrt{EG - F^2}.$$

En vertu de la relation $K = \frac{D^2}{H^2} = \frac{1}{a^2}$, les équations (2) peuvent être mises sous la forme

$$(4) \qquad 2\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial v}, \qquad 2\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial u}.$$

Il vient alors que F et E — G satisfont à l'équation

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = 0.$$

La solution $F = 0$, $E - G = \text{const}$, de (5), donne le théorème :

Les lignes de courbure sur une surface sphérique forment un système isotherme-conjugué ; ces lignes ne sont isothermes-orthogonales que dans le cas d'une sphère.

La solution $E = G$, $F = \text{const.}$ donne le théorème :

Les lignes caractéristiques sur une surface sphérique sont isothermes-conjuguées.

Ces résultats suggèrent une transformation des surfaces sphériques. Soit S une surface dont l'élément linéaire est (3) et qui satisfait aux équations (4). Remarquons que les équations (4) admettent la transformation

$$(6) \qquad E_1 = G, \qquad F_1 = -F, \qquad G_1 = E.$$

Il vient qu'on a alors

$$H_1 = H$$

et encore que l'équation de Gauss est satisfaite si l'on met $D_1 = D_1'' = D$. On a alors le théorème :

Si une surface sphérique est représentée par rapport à un système isotherme-conjugué et si les paramètres sont choisis de façon qu'on ait $D = D''$, $D' = 0$, *il existe une autre surface sphérique avec la même courbure totale et avec la même seconde forme quadratique dont l'élément linéaire est*

$$(7) \qquad ds_1^2 = G\,du^2 - 2F\,du\,dv + E\,dv^2.$$

Il convient d'appeler la nouvelle surface S_1 la surface *conjuguée* de la surface donnée. La relation entre ces deux surfaces est complètement réciproque.

Soient

$$d\sigma^2 = \overline{E}\,du^2 + 2\overline{F}\,du\,dv + \overline{G}\,dv^2,$$
$$d\sigma_1^2 = \overline{E_1}\,du^2 + 2\overline{F_1}\,du\,dv + \overline{G_1}\,dv^2$$

les éléments linéaires de deux surfaces sphériques conjuguées. On démontre alors aisément qu'on a les relations

$$\overline{E_1} = \overline{G}, \qquad \overline{F_1} = -F, \qquad \overline{G_1} = \overline{E}.$$

Par conséquent, on a le théorème :

Une surface de courbure totale égale à l'unité est applicable à la sphère de rayon égal à l'unité de façon qu'un système isotherme-conjugué de la première correspond à la représentation sphérique du système isotherme-conjugué correspondant de la surface conjuguée. Encore, les lignes de courbure correspondent sur une surface et sa surface conjuguée.

L'auteur démontre alors que la transformation considérée est, dans une forme plus générale, la transformation que Bianchi a appelé la *transformation de Hazzidakis*. L'auteur fait application des résultats précédents aux surfaces de révolution.

Une nouvelle transformation des surfaces sphériques suggérée par les équations (5) est la suivante :

$$(6') \qquad E_1 = \frac{E + G - 2F}{2}, \qquad F_1 = \frac{E - G}{2}, \qquad G_1 = \frac{E + G + 2F}{2}.$$

Il vient aisément qu'on a

$$E_1 G_1 - F_1^2 = EG - F^2.$$

L'auteur démontre alors que *si* S *est une surface sphérique représentée comme auparavant, il existe une autre surface* S_1 *avec la même seconde forme quadratique et dont les coefficients de son élément linéaire sont donnés par les équations* (6). La seconde surface S_1, l'auteur l'appelle la surface *adjointe* de S. Il vient alors que *sur une surface sphérique et son adjointe, les lignes de courbure d'une surface correspondent aux lignes caractéristiques de l'autre.*

Appelons transformation I la transformation changeant une surface en la surface adjointe. On a alors le théorème :

La seule transformation changeant une surface sphérique en une surface sphérique de la même courbure et avec la même seconde forme quadratique et qui échange entre elles les lignes de courbure et les lignes caractéristiques est la transformation I, *ou bien la résultante d'une transformation* I *et de quelques transformations de Hazzidakis.*

L'auteur termine l'Ouvrage par une considération analogue des surfaces de courbure totale négative.

Lennes (N.-J.). — Les volumes et les aires. (486-490).

Dans cette Note l'auteur fait observer qu'une modification dans la théorie des aires de Hilbert (*Festschrift,* 1899) est nécessaire. En ce qui concerne les volumes, il montre que, quoique la théorie de Hilbert, ne faisant usage d'aucun axiome de continuité, est complète par rapport à la mesure des volumes, il n'existe point de théorie par rapport à la congruence géométrique. En effet, si P_1, P_2 sont deux polyèdres tel que P_1 est congruent à une partie de P_2, on sait que $M(P_1)$ — la mesure du volume de P_1 — est moindre que $M(P_2)$. Mais, si l'on a $M(P_1) < M(P_2)$, on ne sait pas que P_1 est congruent à une partie de P_2.

Au moyen de l'axiome d'Archimède, l'auteur démontre alors le théorème suivant : *Si l'on a* $M(P_1) < M(P_2)$, P_1 *est congruent à une partie de* P_2. Il démontre aussi que ce théorème ne peut être démontré sans employer l'axiome d'Archimède. Il pose alors ces définitions : $P_1 < P_2$, si P_1 est congruent à une partie de P_2; $P_1 = P_2$, si P_1 n'est pas congruent à une partie de P_2, ni P_2 congruent à une partie de P_1. Il démontre alors que deux polyèdres quelconques satisfont à une des relations : $P_1 < P_2$, $P_1 = P_2$, $P_2 < P_1$.

Lovett (E.-O.). — Sur un problème comprenant celui de *n* corps et admettant une intégrale de plus. (491-495).

Bertrand a introduit dans le problème des trois corps certaines fonctions quadratiques des coordonnées des corps et des quantités proportionnelles aux projections des vélocités sur les axes des coordonnées. Bour (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXI, 1856, p. 35-58) a alors démontré que les variables de Bertrand satisfont à un système S d'équations différentielles ordinaires de premier ordre et a remarqué que le problème des trois corps peut être considéré

comme solution particulière d'un problème plus général dont les équations sont celles de S et dont une intégrale est connue.

Dans cette Note, l'auteur étend ces résultats aux problèmes d'un nombre quelconque de corps.

Sharpe (*F.-R.*). — Sur la stabilité du mouvement d'un liquide visqueux. (496-503).

Reynolds a établi un criterium d'énergie pour la stabilité du mouvement d'un liquide visqueux et l'a appliqué au cas d'un liquide se mouvant entre deux plans parallèles. Pour un liquide dont la densité est ρ et la viscosité est μ, se mouvant entre deux plans dont la distance mutuelle est $2b$ avec une vélocité moyenne égale à U, il a démontré que le mouvement est instable si l'on a $\frac{2b\rho U}{\mu} > 517$. En employant le principe que la vélocité critique est inversement proportionnelle à la profondeur moyenne hydraulique, il a obtenu le résultat que la vélocité critique pour un conduit cylindrique de rayon a est donnée par $\frac{2a\rho U}{\mu} > 1034$. Dans cette Note, l'auteur discute directement le cas d'un conduit cylindrique et il trouve que le mouvement est instable si l'on a $\frac{2a\rho U}{\mu} > 470$. Il trouve aussi, en employant une solution différente de l'équation de continuité, que le mouvement entre deux plans parallèles est instable si l'on a $\frac{2b\rho U}{\mu} > 167$, au lieu de 517 trouvé par Reynolds.

Lœwy (*A.*). — Sur les groupes complètement réductibles appartenant à un groupe de substitutions linéaires homogènes. (504-533).

Soit $\mathfrak{G}$ un groupe de substitutions linéaires homogènes assujetties à aucune condition. Le groupe peut être continu ou discontinu, mais, par la supposition que le résultant actuel de deux substitutions soit dans le groupe, le cas que $\mathfrak{G}$ soit un groupe de congruences est exclu. Un groupe $\mathfrak{G}$ à n variables est dit *réductible* si l'on peut trouver une matrice constante T de déterminant non nul, de façon que toutes les matrices du groupe $\overline{\mathfrak{G}} = T\mathfrak{G}T^{-1}$ semblable à $\mathfrak{G}$ soient simultanément de la forme

$$\begin{matrix} \mathfrak{G}_{11} & 0 \\ \mathfrak{G}_{21} & \mathfrak{G}_{22} \end{matrix}$$

où $\mathfrak{G}_{11}$ représente un ensemble de matrices avec $\nu < n$ lignes et colonnes; autrement dit, on peut, par l'intervention de variables nouvelles, transformer $\mathfrak{G}$ en un groupe $\overline{\mathfrak{G}}$ de façon que toute substitution de $\overline{\mathfrak{G}}$ soit de la forme

$$y_i = \sum_{j=1}^{\nu} g_{ij} y'_j, \qquad y_k = \sum_{j=1}^{n} g_{kj} y'_j \qquad (i = 1, \ldots, \nu; \qquad k = \nu + 1, \ldots, n).$$

Un groupe $\mathfrak{G}$ réductible quelconque peut toujours se transformer en un groupe semblable $\mathfrak{A} = R\mathfrak{G}R^{-1}$, R étant une matrice constante, de façon que

toutes les matrices de $\mathfrak{A}$ soient de la forme

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\ a_{\lambda_1} & a_{\lambda_2} & a_{\lambda_3} & a_{\lambda_4} & \ldots & a_{\lambda\lambda} \end{array}$$

Si les λ groupes isomorphes à $\mathfrak{G}$ déterminés par les matrices $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{\lambda\lambda}$ sont tous irréductibles, *ce qui peut toujours se faire*, nous dirons que $\mathfrak{G}$ *est transformé en un groupe semblable en faisant sortir ses composantes irréductibles*. Les groupes $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{\lambda\lambda}$ nous les appellerons *les composantes irréductibles de* $\mathfrak{G}$. Dans un Mémoire antérieur, l'auteur a démontré le théorème fondamental (aussi dans la théorie d'équations différentielles linéaires homogènes) que, si l'on ne considère comme distincts les groupes semblables, *les composantes irréductibles d'un groupe* $\mathfrak{G}$ *sont déterminées uniquement à l'ordre près* (*Transactions of the american Mathematical Society*, t. IV, 1909, p. 44).

Parmi les groupes $\mathfrak{G}$, ceux que l'auteur appelle *complètement réductibles* méritent surtout la considération. Un groupe $\mathfrak{G}$ est dit complètement réductible s'il existe une matrice constante R de déterminant non nul telle que le groupe $R\mathfrak{G}R^{-1}$ soit de la forme

$$(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{\lambda\lambda}) : \left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{\lambda\lambda} \end{array} \right.$$

Un groupe $\mathfrak{G}$ complètement réductible est donc caractérisé par la propriété qu'après la transformation des variables, les variables nouvelles se partagent en des systèmes tels que les variables de chaque système se transforment entre elles et que les groupes de ces systèmes sont tous irréductibles. Dans la classe des groupes complètement réductibles sont compris aussi les groupes irréductibles; pour ces groupes, on a $\lambda = 1$.

Dans la première Partie de ce Mémoire, l'auteur démontre qu'*un groupe qui laisse invariante une forme hermitienne définie est complètement réductible*. Il résulte du théorème (démontré par E.-H. Moore et l'auteur) que tout groupe fini $\mathfrak{G}$ laisse invariante une telle forme, qu'un groupe fini quelconque de substitutions linéaires homogènes est complètement réductible, théorème qui a été démontré auparavant par Frobenius et Maschke.

Il est évident qu'on peut transformer un groupe $\mathfrak{G}$ quelconque en un groupe semblable $S\mathfrak{G}S^{-1}$ de la forme

$$\mathfrak{A} \left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & a_{\varepsilon\varepsilon} & 0 \\ A_{\varepsilon+1,1} & A_{\varepsilon+1,2} & \ldots & A_{\varepsilon+1,\varepsilon} & A_{\varepsilon,\varepsilon} \end{array} \right.$$

$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{\varepsilon\varepsilon}$ étant des composantes irréductibles. Il peut arriver qu'on a $\varepsilon = 1$.

S'il est *impossible* de transformer $\mathfrak{G}$ de façon que le groupe prenne la forme

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_{22} & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{a}_{\varepsilon+1,\varepsilon+1} & 0 \\ \mathrm{A}_{\varepsilon+2,1} & \mathrm{A}_{\varepsilon+2,2} & \dots & \mathrm{A}_{\varepsilon+2,\varepsilon+1} & \mathrm{A}_{\varepsilon+2,\varepsilon+2} \end{matrix}$$

l'auteur dit que $\mathfrak{A}$ est une représentation de $\mathfrak{G}$ en faisant sortir le *groupe complètement réductible maximal* $\{ \mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \dots, \mathfrak{a}_{\varepsilon\varepsilon} \}$. Ce groupe étant représenté par $\mathfrak{A}_{11}$, la représentation $\mathfrak{a}$ peut aussi s'écrire

$$\mathfrak{A} \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{A}_{11} & 0 \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{matrix} \right.$$

La représentation d'un groupe $\mathfrak{G}$, en faisant sortir le groupe complètement réductible maximal n'est nullement unique. Mais si l'on a deux représentations de cette nature

$$\mathfrak{A} \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{A}_{11} & 0 \\ \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{22} \end{matrix} \right. \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{B} \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{B}_{11} & 0 \\ \mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{B}_{22} \end{matrix} \right.$$

l'auteur démontre qu'il existe toujours une matrice Q telle qu'on ait

$$\mathfrak{B}_{11} = \mathrm{Q}\,\mathfrak{A}_{11}\,\mathrm{Q}^{-1},$$

c'est-à-dire *les groupes complètement réductibles maximaux* $\mathfrak{A}_{11}$ *et* $\mathfrak{B}_{11}$ *sont semblables*. Si l'on ne considère pas comme distincts deux groupes semblables, il vient que *le groupe complètement réductible maximal d'un groupe* $\mathfrak{G}$ *est déterminé uniquement.*

Soit à présent $\mathfrak{A}^{\star}_{11} = \mathrm{P}\mathfrak{G}\mathrm{P}^{-1}$ une représentation de $\mathfrak{G}$ de la forme

$$\mathfrak{A}^{\star} \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{A}^{\star}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \mathfrak{A}^{\star}_{21} & \mathfrak{A}^{\star}_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ \mathfrak{A}^{\star}_{\mu 1} & \mathfrak{A}^{\star}_{\mu 2} & \dots & \mathfrak{A}^{\star}_{\mu\mu} \end{matrix} \right.$$

telle que $\mathfrak{A}^{\star}_{11}$ soit le groupe complètement réductible maximal de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}^{\star}_{22}$ soit le groupe complètement réductible maximal de

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}^{\star}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & . & \dots & . \\ \mathfrak{A}_{\mu 1} & 0 & \dots & \mathfrak{A}_{\mu\mu} \end{matrix}$$

et ainsi de suite. L'auteur dit alors que $\mathfrak{G}$ *est représenté de façon à faire sortir la suite des groupes complètement réductibles maximaux appartenant à* $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{A}^{\star}_{11}$ est dit le premier, $\mathfrak{A}^{\star}_{22}$ le second, ..., groupe complètement réductible maximal de $\mathfrak{G}$. L'auteur démontre alors le théorème fondamental :

Si l'on ne considère pas comme distincts les groupes semblables, la suite des groupes complètement réductibles maximaux est déterminée uniquement et dans toute représentation de $\mathfrak{G}$ *en faisant sortir la suite des groupes com-*

plètement réductibles maximaux appartenant à $\mathfrak{G}$, l'ordre de ces groupes est le même.

En terminant cet Ouvrage, l'auteur étend les résultats précédents à des groupes $\mathfrak{G}$ dont les coefficients appartiennent à un corps Ω.

Carver (*W.-B.*). — Sur les configurations de Cayley-Veronese. (534-545).

Cayley a porté l'attention aux figures qu'on obtient en prenant la section par un plan ou par un espace S_3 à trois dimensions du n point complet $\left[\text{i. e. } n \text{ points et les } \binom{n}{2} \text{ droites, } \binom{n}{3} \text{ plans, etc., déterminés par eux}\right]$ dans un S_ν (*Collected Papers*, t. I, p. 327). Après Cayley, Veronese a considéré la nature de ces configurations discutant en général les configurations obtenues de la manière indiquée dans un S_r (*Mathematische Annalen*, t. XIX, 1882). Parmi les Mémoires posthumes de Caporali, il y en a un (*Memorie de Geometria*, 1879) qui donne sans démonstration un nombre de théorèmes relatifs à une classe de configurations planes. Dans le présent Mémoire, l'auteur donne quelques théorèmes relatifs aux configurations de Cayley-Veronese dans un S_r; la plupart sont des généralisations des théorèmes de Caporali. Nous en donnons quelques-uns ci-dessous :

Soit S_ν un espace linéaire de points à ν dimensions. Les expressions *co-point*, *co-plan*, etc., représentent les éléments réciproques du point, plan, etc., dans S_ν; un co-point est un $S_{\nu-1}$ et un n co-point complet est la figure réciproque du n point complet. Le nombre de combinaisons de n choses prises ν à la fois est représenté par $\binom{n}{\nu}$, avec $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Soit alors $\Gamma_{n,r}^{\nu}$ la configuration obtenue dans S_r par la section d'un n point complet dans S_ν par S_r. Les relations d'incidence de cette configuration peuvent se représenter par la matrice d'ordre r

$$(\alpha_{pq}) \qquad (p, q = 0, 1, \ldots, r-1),$$

dans laquelle α_{pp} représente le nombre des S_p dans la configuration et α_{pq} ($p \neq q$) représente le nombre des S_p incidents avec chaque S_q. Pour la $\Gamma_{n,r}^{\nu}$ on a

$$\alpha_{pp} = \binom{n}{p+\nu-r+1},$$

$$\alpha_{pq} = \binom{q+\nu-r+1}{p+\nu-r+1} \qquad (q > p),$$

$$\alpha_{pq} = \binom{n-q-\nu+r-1}{p-q} \qquad (p > q).$$

Si l'on représente chacun des n points de S_ν par une lettre, chaque S_p de $\Gamma_{n,r}^{\nu}$ se représente par une combinaison de $p+\nu-r+1$ de ces n lettres, et un S_p et S_q quelconques de la configuration sont incidents si les $q+\nu-r+1$ lettres représentant S_q se trouvent parmi les $p+\nu-r+1$ lettres représentant S_p.

Supposons, réciproquement, que l'on commence avec un n co-point complet

dans S_ν et qu'on le projette sur un S_r, avec un co-S_r (i. e. un $S_{\nu-r+1}$) comme centre de projection. La configuration obtenue de cette façon est évidemment la réciproque de $\Gamma^{\nu}_{n,r}$; représentons-la par $C^{\nu}_{n,r}$. Les relations d'incidence de $C^{\nu}_{n,r}$ sont données par la matrice (a_{pq}) en posant

$$a_{pp} = \binom{n}{\nu - p},$$

$$a_{pq} = \binom{n-\nu+q}{q-p} \qquad (q > p),$$

$$a_{pq} = \binom{\nu - q}{\nu - p} \qquad (p > q).$$

Chaque élément S_p d'une $C^{\nu}_{n,r}$ est représenté par une combinaison de $\nu - p$ lettres prises d'un ensemble de n lettres. Si l'on donne une nouvelle représentation à chaque élément en le représentant par la combinaison des $n+p-\nu$ lettres qui ne se trouvent pas parmi les lettres de sa représentation originale, il vient que la $C^{\nu}_{n,r}$ devient sous la nouvelle représentation identique à une $\Gamma^{n-\nu+r-1}_{n,r}$. Soit maintenant $n-\nu+r-1=\mu$. Les configurations $C^{\nu}_{n,r}$ et $C^{\mu}_{n,r}$ sont alors des figures réciproques, de même que les $\Gamma^{\nu}_{n,r}$ et $\Gamma^{\mu}_{n,r}$. De plus, $\Gamma^{\nu}_{n,r}$ et $C^{\nu}_{n,r}$ sont réciproques à eux-mêmes si l'on a $2\nu = n+r-1$.

Les notations $C^{\nu}_{n,r}$ et $\Gamma^{\mu}_{n,r}$ représentent donc la même figure. Mais il convient pourtant de les employer tous deux. On peut se servir de $\Gamma^{\mu}_{n,r}$ si l'on considère la figure comme section d'une figure à μ dimensions, et de $C^{\nu}_{n,r}$ si on la considère comme projection d'une figure à ν dimensions. L'auteur donne alors sans démonstration les théorèmes suivants :

1. *Si dans une $C^{\nu}_{n,r}$ on sépare les éléments dont les représentations contiennent une lettre donnée des éléments dont les représentations ne contiennent pas cette lettre, les éléments de la première sorte forment une $C^{\nu-1}_{n-1,r}$ et ceux de la seconde sorte forment une $C^{\nu}_{n-1,r}$. Tout S_p de la $C^{\nu}_{n-1,r}$ $(p=1, 2, \ldots, r-1)$ est incident avec un S_{p-1} de la $C^{\nu-1}_{n-1,r}$.*

Une $C^{\nu}_{n-1,r}$ et une $C^{\nu-1}_{n-1,r}$ avec la propriété énoncée dernièrement l'auteur, les appelle *chiastiques*.

2. *Par rapport à deux lettres a, b, la $C^{\nu}_{n,r}$ se sépare en une $C^{\nu}_{n-2,r}$: dont les représentations des éléments contiennent ni a ni b; deux $C^{\nu-1}_{n-2,r}$, l'une contenant a, mais non b; l'autre contenant b, mais non a; et une $C^{\nu-2}_{n-2,r}$ contenant a et b.*

Les deux $C^{\nu-1}_{n-2,r}$ sont toutes deux chiastiques avec la $C^{\nu}_{n-2,r}$ et aussi avec la $C^{\nu-2}_{n-2,r}$. De plus, chaque S_p de la $C^{\nu}_{n-2,r}$ $(p=2, 3, \ldots, r-1)$ est incident avec un S_{p-2} de la $C^{\nu-2}_{n-2,r}$. Ces deux configurations, l'auteur les appelle encore *chiastiques*. En général, deux configurations $C^{\nu}_{n,r}$ et $C^{\nu-k}_{n,r}$ se disent *chiastiques* si chaque S_p de $C^{\nu}_{n,r}$ est incident (dans un certain ordre) avec un S_{p-k} de $C^{\nu-k}_{n,r}$. Cela ne se peut que sous la condition $k \leq r-1$.

3. *La séparation d'une $C^{\nu}_{n,r}$ par rapport à s lettres données se représente*

symboliquement par la formule

$$C^{\nu}_{n,r} \equiv C^{\nu}_{n-s,r} + s\,C^{\nu-1}_{n-s,r} + \binom{s}{2} C^{\nu-2}_{n-s,r} + \ldots + \binom{s}{2} C^{\nu-s+2}_{n-s,r} + s\,C^{\nu-s+1}_{n-s,r} + C^{\nu-s}_{n-s,r}.$$

Une $C^{\nu-k}_{n-s,r}$ quelconque dans cette formule est formée par les éléments de $C^{\nu}_{n,r}$ dont les représentations contiennent un ensemble de k parmi les s lettres et non pas les autres $s-k$.

5. *Il existe* $\binom{n}{s}\binom{s}{k}$ $C^{\nu-k}_{n-s,r}$ dans chaque $C^{\nu}_{n,r}$.

6. *Si l'on a s configurations* $C^{\nu-1}_{n-s,r}$ *chiastiques avec une* $C^{\nu}_{n-s,r}$, *deux quelconques des* $C^{\nu-1}_{n-s,r}$ *déterminent une* $C^{\nu-2}_{n-s,r}$ *avec laquelle elles sont toutes deux chiastiques; trois quelconques des* $C^{\nu-1}_{n-s,r}$ *déterminent donc trois* $C^{\nu-2}_{n-s,r}$ *qui sont chiastiques avec et déterminent une* $C^{\nu-3}_{n-s,r}$, ..., *et ainsi de suite; finalement, les s configurations* $C^{\nu-1}_{n-s,r}$ *déterminent s configurations* $C^{\nu-s+1}_{n-s,r}$ *qui sont chiastiques avec et déterminent une* $C^{\nu-s}_{n-s,r}$; *et la figure complète ainsi déterminée est une* $C^{\nu}_{n,r}$.

Le cas $\nu = n - s$ de ce théorème donne le théorème de Veronese relatif à la *pyramide perspective*.

Après quelques autres théorèmes relatifs au cas général, l'auteur fait application des résultats pour $\Gamma^{3}_{5,2}$ et pour $\Gamma^{4}_{6,3}$ à la construction des réciprocités du plan et dans l'espace à trois dimensions. En terminant, il discute un système intéressant de coniques défini par la $\Gamma^{\nu}_{n,2}$.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE. Tome XXXVII; 1909 (¹).

Rémy (*L.*). — Sur le nombre des intégrales doubles de seconde espèce de certaines surfaces algébriques. (3-11).

D'après un théorème fondamental de M. Picard, toute surface algébrique $F(x, y, z) = 0$ possède un nombre limité ρ_0 d'intégrales doubles de seconde espèce distinctes. La présente Note a pour objet de déterminer la valeur de cet invariant ρ_0 pour les surfaces algébriques (S_n) liées à une courbe hyperelliptique (C_n) de genre n, de telle sorte qu'à tout couple de points de (C_n) corresponde *un* point de (S_n) et qu'inversement à tout point de (S_n) correspondent *deux* couples de (C_n), les points du premier couple étant conjugués-hyperelliptiques de ceux du second. Ces surfaces, dont font partie les surfaces du type de Kummer ($n = 2$), sont celles dont les points admettent une correspondance $(1, 2)$ avec les couples de points de la courbe (C_n).

L'auteur établit que *le nombre* ρ_0 *est égal à* $2n^2 - n - 1$ *pour les surfaces dont les points admettent une correspondance* $(1, 2)$ *avec les couples de points d'une courbe hyperelliptique de genre n, supposée non singulière,*

(¹) Voir *Bulletin*, t. XXXIII_2, p. 172.

c'est-à-dire telle qu'il n'existe entre les périodes de ses intégrales abéliennes de première espèce aucune relation *singulière* à coefficients entiers.

Lecornu (*L.*). — Sur l'équilibre d'un système de plans soumis à l'action du vent. (11-31).

L'auteur étudie au point de vue mathématique l'action du vent sur un système quelconque d'aires planes formant un ensemble rigide (*éléments* du système). Il admet la loi du sinus, d'après laquelle un vent de vitesse V, rencontrant sous un angle i une aire plane de surface S, exerce sur celle-ci une pression qui lui est normale et dont la valeur est proportionnelle à $SV^2 \sin i$. Il suppose en outre le système disposé de telle sorte que chaque élément soit sollicité par le vent de la même manière que s'il était isolé et assez petit pour qu'on puisse négliger les déplacements du centre de pression avec la direction du vent.

En composant les actions élémentaires, on arrive à des quadriques dont les rayons vecteurs représentent les projections sur la direction du vent de la résultante des pressions et du moment résultant et l'on définit ce qu'il faut entendre par *systèmes équivalents* au point de vue de l'action du vent, quelles que soient l'intensité et la direction de celui-ci.

On peut toujours trouver un système de trois éléments plans équivalents à un système donné et faire en sorte que les plans de ces trois élements passent par un point arbitrairement choisi. Il y a un nombre simplement infini de semblables trièdres; les normales à tous les éléments forment un cône du second degré.

Pour que l'action du vent sur un système de trois éléments puisse avoir un moment nul par rapport au point de concours des plans de ces éléments, il faut, ou bien que ces plans passent par une même droite, ou bien que les normales aux trois éléments rencontrent une même droite passant par le point de concours.

Appliquant ces théories à l'aéroplane rigide dont le moteur ne fonctionne pas, M. Lecornu conclut qu'il ne peut, quelle que soit sa forme, demeurer immobile si le vent est horizontal; l'équilibre n'est possible que dans un vent ascendant. De plus, l'aéroplane indéformable privé de moteur n'est jamais en équilibre stable; il éprouve de lents mouvements de rotation autour d'un axe passant par son centre de gravité et parallèles au vent. Sous certaines conditions, précisées par l'auteur, le système possède le maximum de stabilité dont il est susceptible, c'est-à-dire qu'en dehors de la rotation continue autour de l'axe parallèle à la direction du vent, ses mouvements présentent le caractère oscillatoire.

Le Mémoire se termine par la recherche des conditions d'équilibre d'un système d'éléments plans possédant un point fixe ou un axe fixe.

Maluski. — Sur la continuité des racines d'une équation algébrique. (32-37).

Raffy (*L.*). — Sur certaines transformations de contact. (37-50).

Certaines transformations de contact classiques ont en commun une propriété remarquable : à une surface *quelconque* elles font correspondre une autre sur-

face telle que les normales aux points homologues (x, y, z) et (x_1, y_1, z_1) de ces deux surfaces sont toujours dans un même plan. Tel est le cas de l'*inversion*, de la transformation *apsidale*, de la transformation *podaire* et de la *dilatation*.

En quelques pages, visiblement destinées à signaler un sujet de recherches analytiques et géométriques à la fois, M. Raffy pose le problème général qui consiste à trouver toutes les transformations de contact jouissant de la propriété ci-dessus, *quelle que soit* la surface lieu du point (x, y, z). Il forme les équations dont ce problème dépend et se contente d'en indiquer des solutions étendues.

I. Pour les *transformations ponctuelles*, on obtient six équations aux dérivées partielles du premier ordre entre les trois fonctions x_1, y_1 z_1 des trois variables x, y, z. Si l'on ajoute la condition supplémentaire que le plan des deux normales passe par l'origine des coordonnées, on trouve

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z} = \theta(x^2 + y^2 + z^2),$$

θ étant une fonction arbitraire de son argument. Quand θ varie en raison inverse de $x^2 + y^2 + z^2$, la transformation est une inversion. L'inversion est d'ailleurs la seule transformation ponctuelle dans laquelle les normales concourent en un point également distant de leurs points d'incidence. Si l'on veut que le plan des deux normales reste parallèle à l'axe des z, on trouve l'unique transformation

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = f(z);$$

d'où une interprétation géométrique évidente de la condition qui consiste dans l'évanouissement du déterminant fonctionnel de deux fonctions $z(x, y)$ et $z_1(x, y)$.

II. Pour les transformations de contact à *deux équations directrices*,

$$\psi_1(x, y, z; x_1, y_1, z) = 0, \qquad \psi_2(x, y, z; x_1, y, z_1) = 0,$$

les fonctions ψ_1 et ψ_2 doivent vérifier trois équations aux dérivées partielles du premier ordre. Parmi les transformations de cette nature pour lesquelles le plan des deux normales passe constamment par l'origine, figurent celles qu'on définit en écrivant que des trois expressions

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \omega = xx_1 + yy_1 + zz_1, \qquad \rho = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

deux sont des fonctions *arbitraires* de la troisième. Elles donnent lieu à une construction géométrique simple qui fournit, comme cas très particulier, les surfaces apsidales.

III. Pour les transformations de contact à *une seule équation directrice*

$$\psi(x, y, z; x_1, y_1, z_1) = 0$$

la fonction ψ vérifie l'équation

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \\ y - y_1 & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y_1} \\ z - z_1 & \frac{\partial\psi}{\partial z} & \frac{\partial\psi}{\partial z_1} \end{vmatrix} = 0,$$

homogène et du second degré, qui s'intègre par les méthodes classiques. L'auteur signale deux solutions du même ordre de généralité : l'une conduit à une transformation dans laquelle les normales correspondantes sont constamment parallèles; l'autre qu'on obtient en prenant pour ψ une fonction arbitraire de ces trois expressions ρ, ϖ et ρ_1, définit toutes les transformations dans lesquelles les deux normales correspondantes appartiennent à un plan passant constamment par l'origine. Si l'on prend en particulier $\psi = \varpi - \rho_1$, on obtient la surface podaire, par rapport à l'origine, de la surface lieu du point (x, y, z). A la solution

$$\psi = \rho - 2\varpi + \rho_1 + \text{const.}$$

correspond la dilatation.

Goursat (E.). — Sur les surfaces à courbure constante négative. (51-58).

M. Hilbert a démontré qu'il n'existe aucune surface analytique, à courbure constante négative, n'ayant aucun point singulier à distance finie. M. Goursat, en restreignant un peu l'énoncé, en donne une démonstration beaucoup plus simple.

Soit S une surface analytique à courbure constante égale à -1, sans point singulier à distance finie, correspondant point par point à un plan (u, v), de manière à représenter complètement l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}\,dv^2.$$

Les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point de cette surface satisfont aux équations

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1, \qquad S\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \qquad S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = e^{2u}.$$

L'auteur montre qu'il ne peut exister aucun système de transformations analytiques, régulières dans tout le plan des variables réelles u et qui vérifient les équations. Son raisonnement n'exige pas d'ailleurs l'analycité des fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$; il suffit que ces fonctions soient continues et admettent des dérivées continues jusqu'au troisième ordre.

Hadamard. — Sur une propriété fonctionnelle de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. (59-60).

L'auteur indique, entre autres équations fonctionnelles, vérifiées par la fonction $\zeta(s)$, les deux suivantes :

$$1 - \zeta(s)(1 - 2^{1-s}) = \frac{s}{1}\,\frac{\zeta(s+1)}{2^{1+1}} - \frac{s(s+1)}{1.2}\,\frac{\zeta(s+2)}{2^{s+2}} + \frac{s(s+1)(s+2)}{1.2.3}\,\frac{\zeta(s+3)}{2^{s+3}} - \ldots,$$

$$\zeta(s)(1 - 2^{1-s}) = \frac{s}{1}\,\frac{\zeta(s+1)}{2^{s-1}} - \frac{s(s+1)}{1.2}\,\frac{\zeta(s+2)}{2^{s+2}} + \frac{s(s+1)(s+2)}{1.2.3}\,\frac{\zeta(s+3)}{2^{s+3}} + \ldots.$$

Chacune de ces équations, jointe à la condition supplémentaire

$$\lim_{x \pm \infty} \zeta(s+n) = 1,$$

suffit à caractériser la fonction $\zeta(s)$. On a ainsi deux définitions de cette fonction, analogues à la définition fonctionnelle bien connue de $\Gamma(s)$.

Barré (*E.*). — Étude sur le déplacement d'une hélice de forme variable. (61-93).

Les équations d'une hélice rapportée à des axes mobiles étant prises sous la forme

$$x = \int_0^s \cos\chi(s,t)\,dt, \qquad y = \int_0^s \sin\chi(s,t)\,ds, \qquad z = s\psi(t),$$

l'auteur établit des formules générales concernant le mouvement de cette hélice et les éléments qu'elle engendre.

Il étudie ensuite les surfaces dont une famille d'asymptotiques ou de géodésiques est formée par des hélices. Voici quelques-uns de ses résultats :

Les seules surfaces engendrées par des hélices de même direction d'axes et dont la base varie d'après la loi définie par la relation

$$\chi(s,t) = \xi(t)\eta_1(s) + \zeta(t)$$

et qui admettent ces hélices comme asymptotiques sont : 1° des hélicoïdes gauches à plan directeur; 2° une famille de surfaces engendrées par des hélices dont les tangentes coupent sous un angle constant les générations d'un cylindre qui se déplace sans se déformer.

L'hélicoïde gauche à plan directeur est la seule surface admettant pour asymptotiques une famille d'hélices circulaires.

Les cylindres sont les seules surfaces admettant comme géodésiques une famille d'hélices de même direction d'axes; le cylindre circulaire droit est la seule surface admettant comme géodésiques une famille d'hélices circulaires.

Si une famille d'hélices mobiles engendre une surface dont ces hélices sont toutes des asymptotiques ou des géodésiques, ces hélices admettent une enveloppe.

Pellet (*A.*). — Des équations majorantes. (93-101).

L'auteur appelle *équation majorante* d'une équation

$$x^m - f(x, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

toute équation

$$X^m - F(X, X_1, \ldots, X_n) = 0$$

où F est une fonction majorante de f, supposée holomorphe. De la considération des fonctions majorantes il tire une nouvelle démonstration de l'existence des fonctions implicites. Il envisage ensuite l'équation

$$x^m - f(x) = 0$$

où $f(x)$ est une série entière ayant pour coefficients des fonctions holomorphes d'une variable t, dont les $n+1$ premiers s'annulent avec t; il établit qu'on peut assigner un nombre τ, tel que pour $|t| < \tau$ on ait

$$x^n - f(x) = e^{g_0 + G(x)}\,P_n(x),$$

sous la seule condition que $|x|$ soit inférieur à un certain nombre positif ξ, résultat dû à Weierstrass.

Il traite ensuite des fonctions entières du genre zéro et donne un exemple d'une telle fonction qui est du même ordre de grandeur que $z^{\frac{1}{\mu}}$ quel que soit l'argument de n, quantité de module égal à z, et cela pour une infinité de valeurs de z.

De Montessus (R.). — Recherche effective des racines réelles des séries hypergéométriques. (101-108).

L'auteur définit des suites de Sturm qui résolvent le problème du calcul effectif des racines de la série hypergéométrique

$$F(\alpha, \beta, \gamma, -x) = 1 - \frac{\alpha\beta}{1.\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} x^2 - \ldots .$$

Cette série converge si $-1 < x < 1$, elle est positive quand x est négatif; elle n'a donc de racines qu'entre 0 et 1.

Il y a quatre hypothèses différentes sur les grandeurs réciproques et les signes de α, β, γ.

Premier cas : $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < \gamma$; l'équation n'a pas de racine réelle.

Deuxième cas : $0 < \alpha < 1$, $\beta > \gamma > 0$.

Troisième cas : $\alpha > 1$, $\beta > \gamma > 0$.

Quatrième cas : l'un au moins des nombres α, β, γ est négatif.

Dans chacun de ces trois derniers cas, l'auteur enseigne à constituer la suite de Sturm dont dépend la solution du problème.

Buhl (A.). — Sur la croissance des coefficients des séries trigonométriques analytiques. (108-115).

Les séries trigonométriques définissent *en général* des fonctions non analytiques.

Néanmoins, à une série de Laurent représentant une fonction analytique définie dans une certaine couronne, on fait par un changement de variable bien connu correspondre une série de Fourier valable dans une bande du champ complexe. On arrive ainsi à ce théorème classique :

Soit $f(z)$ une fonction satisfaisant à la relation $f(z+2\omega) = f(z)$ et qui n'ait aucun point critique dans la bande comprise entre deux droites parallèles L, L' *faisant avec l'axe réel un angle égal à l'argument de* 2ω. *On aura dans cette bande*

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\omega} \int_l \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \cos \frac{m\pi}{\omega}(\alpha - z)\right] f(\alpha)\, d\alpha,$$

l désignant une droite de longueur 2ω parallèle à L *et* L' *et située arbitrairement dans la bande.*

M. Buhl étudie directement ce théorème, en supposant $\omega = \pi$ et n'envisageant

que des séries trigonométriques

$$(2) \qquad \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots$$

dont les coefficients sont réels. Il montre que si la série (2) a une bande de convergence parallèle à l'axe réel et contenant cet axe, les dérivées, formées terme à terme et jusqu'à un ordre quelconque k de la série (2) admettent la même bande de convergence; les intégrales, formées terme à terme et jusqu'à un ordre quelconque k de la série (2), admettent la même bande de convergence.

Comme exemple, l'auteur examine la série

$$1 + 2a \cos x + 2a^2 \cos 2x + \ldots \qquad (0 < a < 1)$$

dont la bande de convergence s'étend de part et d'autre de l'axe réel sur une largeur égale à $-\log a$.

Il fait voir que la recherche de séries trigonométriques convergeant dans tout le champ complexe est liée à celles des fonctions de m (entier positif) qui croissent plus rapidement qu'une exponentielle.

Il donne en terminant un exemple élémentaire et explicite de fonction analytique représentée dans une fonction bien définie du champ complexe, soit par une série de polynomes, soit par une série d'autres fonctions continues.

Zoretti (*L.*). — Un théorème de la théorie des ensembles. (116-119).

Dautheville. — Sur les systèmes non holonomes. (120-132).

On sait que les équations du mouvement d'un système non holonome peuvent être mises sous une forme analogue à celle des équations de Lagrange, les seconds membres contenant des termes correctifs. On a ainsi les *équations de Lagrange corrigées.*

L'auteur rappelle les résultats dus à M. Appell à ce sujet, et effectuant la transformation de Poisson-Hamilton, il obtient les *équations canoniques corrigées*, qui diffèrent des équations canoniques ordinaires par des termes ajoutés aux seconds membres. On peut étendre à ces équations certains théorèmes relatifs aux systèmes holonomes, notamment le théorème des forces vives; d'autres doivent être modifiés : c'est le cas du célèbre théorème de Poisson.

M. Dautheville prouve, en effet, que, si l'on connaît deux intégrales des équations canoniques corrigées, on peut encore en former une troisième. Mais il faut, pour cela, trouver une solution particulière d'un système d'équations différentielles linéaires; en outre, l'intégrale obtenue n'a pas la forme simple qui convient aux systèmes holonomes.

Lattès (*S.*). — Sur les multiplicités invariantes par une transformation de contact. (137-163).

Introduction. — La détermination des courbes, des surfaces ou, en général, des multiplicités invariantes par un *groupe continu* de transformations (transformations ponctuelles on transformations de contact) est un des problèmes

fondamentaux de la théorie de Lie : on obtient ces multiplicités invariantes, dans certains cas, par des calculs purement algébriques, et dans d'autres cas par l'intégration d'équations différentielles ou de systèmes complets d'équations aux dérivées partielles.

Si l'on considère, au contraire, une transformation *isolée*, la détermination des multiplicités invariantes se fait à l'aide d'équations fonctionnelles. J'ai commencé cette étude, dans un travail antérieur, pour les transformations ponctuelles à deux ou trois variables et pour les transformations de contact du plan (*Annali di Matematica*, 1906). Certains des résultats peuvent s'étendre aux transformations ponctuelles à un nombre quelconque de variables, ainsi que je l'indique dans la deuxième Partie du présent Mémoire.

Mais, les résultats obtenus à ce sujet étant encore assez incomplets, le but que je me propose actuellement est surtout de montrer le lien qui existe entre les deux problèmes, le premier relatif aux transformations ponctuelles et le deuxième relatif aux transformations de contact. Pour les transformations ponctuelles, les ensembles invariants qu'on se propose de déterminer sont des *variétés*, c'est-à-dire des familles quelconques de points dépendant d'un certain nombre r de paramètres ; pour les transformations de contact, ce sont des *multiplicités*, c'est-à-dire des familles d'éléments à r paramètres assujetties à vérifier l'équation de Pfaff :

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \ldots - p_n dx_n = 0.$$

Une transformation de contact T de l'espace E à $n+1$ dimensions porte sur un élément de contact $(x_1, x_2, \ldots, x_n; z; p_1, p_2, \ldots, p_n)$ de cet espace qu'elle transforme en un élément $(X_1, X_2, \ldots, X_n; Z; P_1, P_2, \ldots, P_n)$. Mais les formules qui définissent X_i, Z, P_i en fontion de x_i, z, p_i définissent en même temps une simple transformation ponctuelle $\mathfrak{T}$ d'un espace $\mathcal{E}$ à $2n+1$ dimensions pour lequel $(x_1, x_2, \ldots, x_n; z; p_1, p_2 \ldots, p_n)$ seraient les $2n+1$ coordonnées d'un point.

Lorsqu'on passe de l'espace $\mathcal{E}$ à l'espace E, un point devient un élément; une famille de points formant une *variété* $\mathfrak{M}_r$ à r paramètres devient une famille d'éléments dépendant de r paramètres : mais cette famille ne constituera pas, en général, une *multiplicité* M_r de l'espace E, car ses éléments ne vérifieront pas l'équation de Pfaff.

Or il se trouve, et c'est ce que je me propose de démontrer par le présent Mémoire, que *lorsqu'il s'agit des variétés* $\mathfrak{M}_r$ *invariantes par* $\mathfrak{T}$, *il y a certaines de ces variétés qui fournissent nécessairement des multiplicités* M_r *invariantes par* T : *la relation de Pfaff se trouve vérifiée d'elle-même.*

Ces variétés sont des variétés invariantes passant par un point double de la transformation ; mais toutes les variétés invariantes passant par le point double ne remplissent pas la condition demandée, et voici par quoi sont caractérisées celles qui la remplissent.

Généralisant un résultat que j'avais établi précédemment pour les transformations de contact du plan, j'établis une relation entre les racines S_1, S_2, S_3, ... de l'équation caractéristique relative à un point double : les racines s'associent deux à deux de façon que deux racines *associées* aient un produit constant C.

Je démontre cette proposition dans la première Partie.

Or, à chaque variété $\mathfrak{M}_r$ invariante correspond, ainsi que je l'établis dans la deuxième Partie, un groupe de racines S_1, S_2, ..., S_r : la variété correspon-

dant à ce groupe vérifie l'équation de Pfaff si parmi les quantités S_1, S_2, ..., S_r ne figurent ni C, ni des groupes de racines associées. Tel est le résultat que j'établis dans la troisième Partie. J'ai appliqué enfin ce qui précède à un exemple relatif à une transformation de contact de l'espace (x, y, z).

Dans les démonstrations, j'ai dû supposer les données et les solutions cherchées analytiques; certains des résultats pourraient être établis sous des hypothèses plus larges, mais à condition d'admettre certains résultats de l'étude des transformations ponctuelles que j'indique dans la deuxième Partie et que je n'ai établis jusqu'ici que dans l'hypothèse où je me place; j'ai cru donc indispensable de faire cette hypothèse, afin de n'avoir à m'appuyer que sur des résultats rigoureusement établis.

Bioche (*Ch.*). — Sur les surfaces desmiques du quatrième ordre. (163-167).

Trois tétraèdres sont dits former un *système desmique*, s'ils constituent trois surfaces appartenant à un système linéaire de surfaces du quatrième ordre. Les tétraèdres se coupent deux à deux suivant seize *droites desmiques* qui constituent la base du faisceau linéaire de surfaces du quatrième ordre; ces droites concourent quatre par quatre en douze points *desmiques*.

On appelle *surface desmique du quatrième ordre* toute surface faisant partie d'un faisceau linéaire qui contient trois tétraèdres : les points desmiques sont des points doubles de ces surfaces dont l'auteur donne l'équation et diverses propriétés.

Le plan tangent en un point d'une droite desmique, est tangent tout le long de cette droite; par suite, il y a seize coniques sur la surface. La surface est déterminée lorsqu'on connaît les seize droites desmiques et le plan tangent le long de l'une d'elles.

Lorsqu'on passe d'une surface du faisceau à une autre, la conique qui complète l'intersection de la surface avec le plan tangent le long d'une droite desmique D décrit la quadrique contenant les droites desmiques qui ne rencontrent pas D.

Il existe vingt-quatre quadriques dont chacune coupe une surface desmique suivant quatre coniques.

Maillet (*Edm.*). — Sur les quantités complexes. (168-175).

Des symboles ou unités principales e_1, e_2, ..., e_n sont assujettis à la seule condition que l'hypothèse

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0,$$

les λ étant réels, entraîne $\lambda_1 = \lambda_2 \ldots = \lambda_n = 0$. Toute expression de la forme

$$\omega_1 = \alpha_1^1 e_1 + \alpha_1^2 e_2 + \ldots + \alpha_1^n e_n$$

représente un point $P_1(\alpha_1^1, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_1^n)$ de l'espace à n dimensions. Soient p points pareils P_1, ..., P_p définis par les quantités complexes ω_1, ω_2, ..., ω_n. L'auteur considère l'ensemble des points Q représentés par

$$\Omega = m_1 \omega_1 + \ldots + m_p \omega_p = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n.$$

Si l'on peut toujours trouver un système de valeurs de m_1, ..., m_p tel qu'un des points Q soit aussi voisin qu'on veut de tout point y_1, ..., y_p de l'espèce à n dimensions, M. Maillet dit que *les points* Q *remplissent tout l'espace*. Il établit le théorème suivant :

Soit T *le tableau rectangulaire*

$$\begin{matrix} \alpha_1^1, & \dots, & \alpha_p^1 \\ \dots, & \dots, & \dots \\ \alpha_1^n, & \dots, & \alpha_p^n \end{matrix}$$

à n lignes et p colonnes $p > n$. Soit Δ *le déterminant formé par les n premières colonnes de ce tableau et* Δ_i^j *ce que devient* Δ *quand on y remplace la* $i^{\text{ième}}$ *colonne par la* $j^{\text{ième}}$ *du tableau* (T).

Pour que les points Q *ne remplissent pas tout l'espace à n dimensions, il faut et il suffit, ou bien que tous les déterminants d'ordre n formés avec n colonnes du tableau* (T) *soient nuls, ou bien, si l'un d'eux,* Δ *par exemple, n'est pas nul, qu'il existe entre* Δ *et les* Δ_i^j *des relations en nombre de* $p-n$ *de la forme*

$$C_1\Delta_1^s + \dots C_n\Delta_n^s = C_s\Delta \qquad (s = n+1,\ n+2,\ \dots,\ p)$$

à coefficients entiers, non tous nuls.

Autonne (*L.*). — Sur la fonction monogène d'une variable hypercomplexe dans un groupe commutatif. (176-196).

Introduction. — Dans un groupe (ε) de quantités hypercomplexes aux n symboles ε_α ($\beta, \alpha = 0, 1, \dots, n-1$), prenons deux quantités

$$x = \sum_\beta \varepsilon_\beta x_\beta, \qquad y = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha y_\alpha,$$

où les x_β et les y_α sont des nombres ordinaires (ou *scalaires*), réels ou complexes, variables. Si les y sont fonctions des x, $y_\alpha = y_\alpha\ (x_0, x_1, \dots)$, on peut dire que y est une *fonction* de la *variable hypercomplexe* x.

Dans deux Mémoires précédents, j'ai cherché ce que devenait la monogénéité, car la définition ordinaire de cette dernière ne subsiste que pour les groupes commutatifs (ou à multiplication commutative).

Lorsque (ε) est un groupe simple de r^2 — *ions* ($n = r^2$), la monogénéité est remplacée par un ensemble de propriétés passablement compliqué.

Revenant maintenant aux groupes commutatifs, j'ai résolu d'une façon complète le problème de la monogénéité, c'est-à-dire construit toutes les fonctions y de la variable hypercomplexe x, telles que $dy = y'dx$, où y' est aussi une quantité du groupe (ε), avec

$$dy = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha dy_\alpha, \qquad dx = \sum_\beta \varepsilon_\beta dx_\beta.$$

M'appuyant sur certains résultats dus à MM. Frobenius et Cartan, j'ai ra-

mené la question au cas où les $n = m + 1$ symboles $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m$ suivent les règles suivantes de multiplication :

$$\varepsilon_\alpha \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha, \qquad \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \varepsilon_\gamma \varepsilon_\beta = \sum_\rho \varepsilon_\rho a_{\rho\beta\gamma}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \rho = 0, 1, \ldots, m),$$

les constantes scalaires $a_{\rho\beta\gamma}$ étant assujetties à certaines égalités qui expriment que la multiplication est associative dans le groupe (ε). Enfin

$$a_{\rho\beta\gamma} = a_{\rho\gamma\beta} = 0$$

pour $\rho < \beta, \rho < \gamma$.

La proposition suivante donnera alors la solution du problème :

Théorème. — *Toute fonction monogène y de la variable hypercomplexe*

$$x = \varepsilon_0 x_0 + t, \qquad t = \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m,$$

est fournie par la formule

$$(o) \qquad y = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=m} \frac{t^\gamma}{\gamma!} \frac{d^\gamma u}{dx_0^\gamma},$$

où

$$u = \varepsilon_0 u_0(x_0) + \ldots + \varepsilon_m u_m(x_0)$$

est une quantité hypercomplexe qui ne dépend que de x_0.

y et u se définissent mutuellement sans ambiguïté et l'on écrira $y = \Phi(u)$.

La formule (o) est fournie symboliquement par le développement taylorien de l'expression

$$u(x) = (\varepsilon_0 x_0 + t),$$

où t est l'accroissement donné à la variable $\varepsilon_0 x_0$. D'ailleurs, $t^\mu = 0$ pour $\mu > m$.

Les dérivées partielles de y, de tous ordres, par rapport aux $m + 1$ variables scalaires $x_0, x_1, \ldots, x_m$ sont encore des fonctions monogènes de x, suivant la formule

$$\frac{\partial^h y}{\partial x_0^{\rho_0} \ldots \partial x_m^{\rho_m}} = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \frac{\partial^h y_\alpha}{\partial x_0^{\rho_0} \ldots \partial x_m^{\rho_m}} = \varepsilon_1^{\rho_1} \ldots \varepsilon_m^{\rho_m} \Phi\left(\frac{d^h u}{dx_0^h}\right)$$

$$(h = \rho_0 + \rho_1 + \ldots + \rho_m).$$

Si l'on a posé $dy = y' dx$, la dérivée $y' = \frac{dy}{dx}$ de y par rapport à x n'est pas autre chose que $\frac{dy}{dx_0}$; y possède des dérivées de tous ordres.

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{\partial^p y}{\partial x_0^p} = \Phi\left(\frac{d^p u}{dx_0^p}\right).$$

y possède aussi une *fonction primitive*

$$z = \Phi\left(\int u \, dx_0\right),$$

telle que

$$y = \frac{dz}{dx}.$$

Dans un travail ultérieur, j'espère étudier d'une façon approfondie certaines fonctions monogènes particulières, par exemple la fonction algébrique.

Goursat (*E.*). — Sur quelques points de la théorie des équations intégrales. (197-204).

La proposition capitale de la théorie des équations intégrales consiste en ce que la solution $\varphi(\lambda)$ de l'équation

$$(1) \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

est une fonction méromorphe du paramètre λ. Elle est due à M. Fredholm, qui l'obtient par le calcul. M. Goursat l'établit presque sans calcul, en ramenant le cas général où le noyau K est continu à celui où il est de la forme

$$\sum_{p=1}^{p=n} \alpha_p(x, \lambda)\,\beta_p(s, \lambda),$$

les fonctions α_p et β_p étant des fonctions régulières de λ dans un cercle ayant pour centre l'origine.

A cet effet, il emploie la méthode de M. Schmidt, qui repose sur les lemmes suivants :

1° Le rayon de convergence de la série

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-1} K^{(n)}(x, y),$$

où $K^2, \ldots, K^{(n)}$ sont les noyaux qu'on déduit de $K(x, y)$ par des itérations successives, a un rayon de convergence au moins égal à l'inverse de $\sqrt{L}$, si l'on pose

$$L = \int_a^b \int_a^b [K(x, y)]^2\,dx\,dy.$$

2° Étant donné un noyau continu $K(x, y)$, on peut toujours trouver n couples et fonctions $\alpha_p(x)$, $\beta_p(y)$ tels qu'on ait

$$\int_a^b \int_a^b \left[K(x, y) - \sum_{p=1}^{p=n} \alpha_p(x)\,\beta_p(y)\right]^2 dx\,dy < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif quelconque.

Les noyaux de la forme particulière $p(x)\,q(y)$, $S(x, y)$, où S est une fonction symétrique de x et y, se présentent dans plusieurs questions importantes de Physique mathématique. Lorsque le produit $p(x)\,q(x)$ conserve un signe constant, on a démontré de diverses manières que tous les pôles de $\Gamma(x, y; \lambda)$ sont réels et du premier ordre. M. Goursat montre qu'on arrive facilement à cette conclusion en partant de la remarque suivante, qui est presque intuitive :

Si la fonction $\varphi_i(x)$ vérifie l'équation

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b p(x)\,q(s)\,S(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

où λ_i est un pôle de $\Gamma(x, y; \lambda)$, l'équation

$$\psi_i(x) = \lambda_i \int_a^b p(s)\, q(x)\, S(s, x)\, \psi_i(s)\, ds$$

est vérifiée par la fonction

$$\psi_i(x) = \frac{q(x)}{p(x)} \varphi_i(x)$$

et réciproquement.

Cotton (Émile). — Sur les équations différentielles dépendant de paramètres arbitraires. (204-214).

Étant donné un système d'équations différentielles où figurent des paramètres arbitraires $\mu_1, \ldots, \mu_r$, les solutions $x, \ldots, x_n$ déterminées par les valeurs initiales $a_1, \ldots, a_n$ sont fonctions de ces valeurs initiales et des paramètres μ. M. Cotton établit que, sous certaines conditions bien déterminées, *les fonctions* $x_1, \ldots, x_n$ *admettent*, par rapport aux variables $a_1, \ldots, a_n, \mu_1, \ldots, \mu_r$, *des dérivées jusqu'à un certain ordre*.

M. Poincaré a prouvé que, quand certaines hypothèses sont réalisées, les x sont des fonctions analytiques des a et des μ. Les hypothèses de M. Cotton sont plus larges que celles de M. Poincaré, de sorte que ses conclusions, valables quand le théorème de M. Poincaré est applicable, le sont encore dans des cas où l'on ne peut plus invoquer ce théorème. D'ailleurs elles conduisent souvent aux mêmes conséquences que le théorème de M. Poincaré, notamment en ce qui concerne les solutions périodiques.

La proposition dont il s'agit a été signalée soit dans des cas particuliers, soit sous son énoncé général, par divers auteurs, dont M. Cotton rappelle les recherches. Il en donne deux démonstrations : la première, très rapide, est celle de ses devanciers, présentée avec des perfectionnements de détail ; la seconde, qui semble nouvelle, repose sur des hypothèses beaucoup moins restrictives ; elle se rattache à un résultat général concernant les approximations successives, que voici :

Soit donnée une suite de fonctions $F_1(x, t), F_2(x, t), \ldots, F_n(x, t)$ *uniformément convergente lorsque le point* (x, t) *reste dans un domaine* (D). *On suppose que ces fonctions, continues dans ce domaine, satisfont à une même condition de Lipschitz. Soit* $x = y_0(t)$ *une fonction continue, le point* $[y_0(t_0), t_0]$ *étant intérieur à* (D). *On peut déterminer un intervalle* $I(t_0 - t < t_1)$, *tel que dans cet intervalle toutes les fonctions* $y_i(t)$ *données par la formule de récurrence*

$$y_i(t) = y_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} F_i(y_{i-1}, t)\, dt$$

soient définies et que $y_i(t)$ *converge uniformément vers une limite.*

Bioche (Ch.). — Sur les dégénérescences des surfaces desmiques. (215-216).

De la représentation des surfaces desmiques au moyen des fonctions elliptiques, M. G. Humbert a déduit une dégénérescence de ces surfaces. M. Bioche

retrouve cette dégénérescence et en obtient d'autres par un procédé direct et très élémentaire.

Raffy (*L.*). — La méthode de la coordonnée isotrope dans le problème de la déformation des surfaces. (217-243).

Ossian Bonnet, pour former l'équation des surfaces qui admettent un élément linéaire donné, a pris comme variables (*Journ. Éc. Polyt.*, XLIIe Cahier, 1867) les paramètres des lignes de longueur nulle et comme inconnue l'une des coordonnées isotropes des surfaces considérées. Mais son analyse est peu symétrique, elle se prête malaisément aux applications (lui-même n'en a fait qu'une seule, relative aux surfaces minima) et l'on ne saurait en tirer parti dans le cas général où l'élément linéaire est exprimé au moyen de coordonnées curvilignes quelconques.

D'autre part, le procédé direct par lequel M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. III, p. 261) a établi l'équation qui convient à ce cas ne montre pas ce qu'il faut faire, connaissant une solution de cette équation, pour déterminer la surface correspondante.

Il y avait d'ailleurs à rechercher si les solutions *illusoires* reconnues par Bour et expliquées par M. Darboux, qui vérifient l'équation à laquelle satisfont les coordonnées non isotropes d'une surface dont l'élément linéaire est donné, sans fournir de pareille surface, ont leurs analogues dans la méthode de la coordonnée isotrope.

Enfin il restait à présenter cette méthode sous une forme propre aux applications et à l'appliquer soit pour rapprocher des résultats connus, soit pour en obtenir de nouveaux.

M. Raffy commence par former, en reproduisant un raisonnement dû à M. Darboux, l'équation de la déformation des surfaces pour une coordonnée quelconque, non isotrope ou isotrope, et prouve à la fois l'existence de solutions illusoires dans les deux cas.

Il établit ensuite l'équation de Bonnet, à l'aide de calculs symétriques, grâce à l'introduction d'une inconnue auxiliaire dont la signification est invariante : si l'on désigne par ξ et η les deux coordonnées isotropes $x+iy$ et $x-iy$, par $\Delta\xi$ le premier paramètre et par $\Delta(\xi, \eta)$ le paramètre mixte relatif à l'élément linéaire donné, cette inconnue auxiliaire est le rapport

$$\theta = \frac{\sqrt{1-\Delta(\xi, \eta)}}{\sqrt{\Delta\xi}}.$$

Son emploi permet à l'auteur d'obtenir l'équation de déformation pour une coordonnée isotrope dans le cas des coordonnées curvilignes quelconques, par une analyse qui indique l'usage à faire des solutions (non illusoires) de cette équation pour déterminer les surfaces correspondantes; le problème s'achève par trois quadratures de différentielles exactes, de sorte que la connaissance de l'élément linéaire et d'une coordonnée isotrope détermine complètement la forme de la surface.

M. Raffy fait ensuite l'application de ces principes aux éléments linéaires de la forme

$$ds^2 = 4e^{2m(u-v)}f^2(u+v)\,du\,dv,$$

qui conviennent, comme on sait, aux surfaces spirales quand m est différent

de zéro et aux surfaces de révolution et aux hélicoïdes quand $m = 0$. Si l'on pose

$$d\xi = p\,du + q\,dv, \qquad dp = r\,du + s\,dv, \qquad dq = s\,du + t\,dv,$$

l'équation à laquelle satisfait la coordonnée isotrope ξ est la suivante :

$$(frt - s^2) - 2(f' - mf)rq - 2(f' + mf)tp + 4(f'' - m^2 f)pq = 0,$$

les accents désignant les dérivées prises par rapport à $w = u + v$. Les premières solutions étudiées sont celles de la forme

$$\xi = e^{k(u-v)}\varpi(w) = e^{k(u-v)}e^{\int \mathfrak{Z}(w)\,dw}.$$

Elles dépendent de l'équation

$$[f\mathfrak{Z} - k(k-m)f]\mathfrak{Z}' + [f'\mathfrak{Z} - f'' - m(k-m)f](\mathfrak{Z}^2 - k^2) = 0,$$

qui appartient à un type bien connu, mais n'est intégrable que dans des cas très particuliers.

La constante k étant d'abord supposée nulle, on trouve, si $m = 0$, *les surfaces quasi de révolution* de M. Demoulin ; si $m \neq 0$, les spirales particulières que M. Raffy avait signalées (*Comptes rendus*, t. CXII, 1891); les unes et les autres sont coupées suivant des paraboles par les plans isotropes $\xi = \text{const.}$

Supposons ensuite $k \neq 0$ et $m = 0$, on peut obtenir l'intégrale générale qui est

$$\frac{f\mathfrak{Z} - f'}{\sqrt{\mathfrak{Z}^2 - k^2}} = \text{const.}$$

et qui conduit au théorème classique de Bour sur les hélicoïdes.

Dans le cas général $km \pm 0$, l'équation en $\mathfrak{Z}$ n'est pas intégrable ; mais elle permet d'établir le théorème de M. Maurice Levy sur la déformation des surfaces spirales.

L'auteur examine ensuite les solutions plus générales pour lesquelles ξ est une fonction de l'argument

$$\tau = u - v + \int \mathfrak{Z}(w)\,dw.$$

Elles dépendent d'une équation qui est de la forme

$$M\xi''(\tau) + N\xi'(\tau) = 0.$$

En supposant qu'elle se réduit à une identité ($M = N = 0$), on obtient les déformations dépendant d'une fonction arbitraire qu'admettent les surfaces dont on connaît toutes les déformations.

Quand les coefficients M et N sont tous les deux différents de zéro, le rapport $\xi'' : \xi'$ est constant et différent de zéro, et l'on est ramené aux solutions précédemment étudiées. Il reste donc à supposer $\xi'' = 0$ avec $N = 0$, ce qui conduit à l'équation

$$(f'\mathfrak{Z} + mf)\mathfrak{Z}' - (f'' - m^2 f)(\mathfrak{Z}^2 - 1) = 0.$$

L'hypothèse particulière $m = 0$ qui permet de l'intégrer donne une série sim-

plement infinie de surfaces qu'on détermine par quadratures et qui admettent l'élément linéaire d'une surface de révolution quelconque; ces surfaces sont engendrées par des cubiques gauches.

Rémoundos (G.). — Sur la représentation uniforme des surfaces algébriques. (244-250).

L'auteur prend pour point de départ l'identité

$$\sum_{1}^{m} c_i e^{H_i(x, y)} = 0$$

qui exige la nullité de tous les coefficients c_n, si les fonctions $H_i(x, y)$ sont des fonctions entières de deux variables complexes indépendantes : c'est une extension immédiate d'un théorème dû à M. Borel.

Il en déduit une classe étendue de représentations uniformes transcendantes de surfaces algébriques dont l'existence entraîne celle de représentations rationnelles et montre, par suite, que les surfaces sont unicursales. Telles sont celles que représentent les formules

$$x = N_1, \quad y = N_2, \quad z = N_3,$$

où les N_i sont des expressions telles que

$$p_1(u, v) e^{Q_1(u, v)} + \ldots + p_n(u, v) e^{Q_n(u, v)} + p_0(u, v),$$

les coefficients des exponentielles (qui sont les mêmes pour les trois coordonnées) étant des fonctions rationnelles de u et v, et les fonctions Q_i des fonctions entières quelconques entre lesquelles n'existe aucune relation linéaire à coefficients numériques et entiers.

M. Rémoundos généralise ensuite considérablement ce premier résultat.

L. R.

THE QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS.

Tome XXXV; 1904 [1].

Basset (A.-B.). — Sur les points sextactiques d'une quartique. (1-9).

Relations entre ces points et les tangentes doubles.

Cunningham (A.). — Grands nombres premiers $p = 4\varpi + 1$, $6\varpi + 1$, et factorisation. (10-21).

---

[1] Voir *Bulletin*, même Tome, p. 22.

Trois Tables donnent respectivement 57, 169, 143 nombres premiers plus grands que 9000000 et des formes $\frac{1}{2}(y^2+1)$, y^2+1, $y^2 \pm y + 1$.

Hardy (*G.-H.*). — Recherches sur la théorie des séries divergentes et des intégrales divergentes. (22-66).

La première Partie du Mémoire de M. Hardy fait suite au Chapitre III des *Leçons* de M. Borel *sur les séries divergentes* et au Mémoire de l'auteur *On differentiation and integration of divergent series* (*Cambridge Philosophical Transactions*, t. XIX, p. 297). L'auteur y étudie successivement la relation entre la convergence et la sommabilité absolue, la suppression ou l'introduction de termes dans une série divergente, la condition de consistance pour les définitions autres que la définition originelle de M. Borel, la relation entre les limites généralisées et les moyennes valeurs. Dans une autre Partie, M. Hardy résume une théorie analogue pour les intégrales divergentes.

Brill (*J.*). — Suggestions pour la constitution d'une théorie générale des équations de Pfaff, 5e partie. (67-86).

Hardy (*G.-H.*). — Un théorème sur les nombres cardinaux infinis (87-94).

On a, dans le symbolisme de M. Cantor,

$$2^{\alpha_\beta} = \alpha_{\beta+1},$$

β étant un nombre ordinal quelconque et α_β le $\beta^{\text{ième}}$ nombre cardinal dans la suite bien ordonnée des nombres cardinaux de M. Cantor.

Woodal (*H.-J.*). — Sur une extension de la méthode de décomposition des grands nombres, se rapportant principalement aux nombres de la forme y^2+1. (95-101).

M. Woodal montre comment on peut reculer la limite au-dessous de laquelle s'applique la méthode du lieutenant-colonel Cunningham pour décomposer en facteurs les nombres de la forme y^2+1.

Young (*W.-H.*). — Analyse des ensembles linéaires de points. (102-116).

L'auteur reprend et complète une théorie fondée par M. G. Cantor, mais exposée par lui sous une forme très abstruse, où les nombres transfinis tiennent une très grande place. Au contraire l'exposition de M. Young est d'une nature élémentaire. Le point de départ est la considération des points L' d'un ensemble tel que, aux environs de chacun d'eux, il y ait toujours une infinité non dénombrable de points de l'ensemble. Un ensemble qui ne possède pas de points L' est dénombrable. L'ensemble des points L' d'un ensemble E constitue le noyau

de E; ce noyau est dense en lui-même, non dénombrable; c'est un ensemble parfait si E est clos. On étudie ensuite l'*adhérence* et la *cohérence* d'un ensemble E; l'adhérence E_a est l'ensemble des points isolés de E; dont chacun est dit *adhérent;* la cohérence E_c est l'ensemble des points de E_i qui sont des points d'accumulation, lesquels sont dits *cohérents*. L'ensemble E_c peut être décomposé comme E_i. Ces décompositions successives donnent lieu à une étude intéressante.

Lovett (E.-O.). — Solutions périodiques du problème des quatre corps. (116-155).

Lagrange a indiqué deux cas où le problème des trois corps se résout; soit que les trois corps forment toujours un triangle équilatéral, soit qu'ils restent en ligne droite. Supposons qu'à trois corps, animés d'un des mouvements considérés par Lagrange, vienne s'ajouter un quatrième corps, de masse infiniment petite, qui ne trouble pas le mouvement des trois premiers. M. Lovett détermine les centres de libration et construit les orbites périodiques dans le voisinage immédiat de ceux de ces centres pour lesquels des orbites périodiques peuvent exister.

Barnes (E.-W.). — Sur les coefficients de capacité de deux sphères. (155-175).

L'auteur, dans une suite de Mémoires, a développé la théorie de la fonction Γ double. Il montre ici comment les expressions des coefficients de capacité de deux sphères électrisées qui ne se coupent pas dépendent de cette fonction. Il considère aussi la fonction entière de la variable α, définie par l'égalité

$$L(\alpha \mid \varpi) = \prod_{s=0}^{\infty} (1 - e^{-\alpha - s\varpi}),$$

où ϖ est un paramètre, fonction qu'il désigne sous le nom de *fonction de Lambert* et qu'il exprime au moyen des fonctions Γ, simple et double.

Barnes (E.-W.). — La généralisation de la formule sommatoire de Maclaurin et le domaine où elle s'applique. (175-192).

Étude de la formule asymptotique, où l'on suppose n très grand,

$$\sum_{m=0}^{n=1} \varphi(a + m\omega) = -\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{S'_{1+k}(a)}{1+k}$$
$$+\sum_{m=\omega}^{\infty} \frac{S'_m(a)}{m!} \left[\frac{d^m}{dx^m}\int_0^x \varphi(x)\,dx\right]_{x=n\omega}:$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

2e Partie.

est une fonction entière en x; quant à

$$\frac{S'_k(a)}{k!},$$

c'est le coefficient de $(-1)^{k+1} z^k$ dans le développement de

$$\frac{-ze^{-az}}{1-e^{-az}}.$$

La formule démontrée, lorsque la fonction entière $\varphi(z)$ est d'ordre moindre que 1, s'étend, grâce à la considération des séries divergentes sommables, au cas où l'ordre de $\varphi(z)$ est égal ou supérieur à 1 et à d'autres cas.

Young (*W.-H*). — Note sur la condition d'intégralité pour une fonction d'une variable réelle. (189-192).

Cette condition concerne la nature de l'ensemble des points pour lesquels la fonction est continue : il doit être l'ensemble complémentaire de l'ensemble limite d'une suite d'ensembles clos de contenu égal à 0.

Hardy (*G.-H.*). — Note sur l'intégrale $\int_x^\infty e^{\frac{1}{2}(x^2-t^2)}\,dt$. (193-197).

Cauchy a désigné sous le nom de *fonctions réciproques de première espèce*, des fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, liées par les relations

$$\psi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos\alpha x\,\varphi(x)\,dx,$$

$$\varphi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos\alpha x\,\psi(x)\,dx,$$

dont la première, sous certaines conditions imposées à $\varphi(x)$, entraîne la seconde en vertu d'une formule bien connue de Poisson; il a nommé de même *fonctions réciproques de seconde espèce* des fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ liées par des relations pareilles où les cosinus sont remplacés par des sinus. Il a observé que la fonction $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ est sa propre réciproque de seconde espèce; M. Hardy signale la fonction

$$\varphi(x) = \int_x^\infty e^{\frac{1}{2}(x^2-t^2)}\,dt$$

comme étant sa propre réciproque de seconde espèce; il indique, à ce propos, d'intéressantes relations entre certaines intégrales définies.

Hobson (*E.-M.*). — Sur les conditions d'intégrabilité des fonctions d'une valeur réelle. (208-209).

Démonstration du théorème de M. Young au moyen d'un théorème de M. Osgood.

Jeans (*J.-H.*). — Un théorème général de dynamique et son application à la théorie cinétique des gaz. (209-224).

Dans un Mémoire intitulé *The kinetic Theory of Gases developped from a new standpoint* (*Philosophical Magasine*, 6e série, t. V, p. 597), l'auteur s'est efforcé de développer la théorie cinétique en la fondant sur la Mécanique rationnelle; il supposait le gaz tel qu'il n'y eût pas dissipation d'énergie. L'objet du présent Mémoire et du suivant est de reprendre la théorie générale et de la pousser aussi loin que possible sans faire cette hypothèse : puis, lorsque notre ignorance sur la structure des molécules ne permet pas de continuer, d'examiner un cas particulier simple et d'essayer d'en tirer quelques conclusions relatives à la nature des molécules.

Jeans (*J.-H.*). — Sur la répartition de l'énergie dans un système de sphères pipées. (224-238).

Mathews (*G.-B.*). — Une correspondance géométrique dans l'espace. (239-248).

Les points P, P′ se correspondent lorsqu'on a $PA = P'A'$, $PB = P'B'$, $PC = P'C'$; A, B, C et A′, B′, C′ formant un système de trois points fixes (*Voir* Jacobi, *Œuvres*, t. VII, p. 42).

Brill (*J.*). — Sur un point de vue quasi-géométrique pour la résolution d'une équation de Pfaff : 2e partie. (249-261).

Hardy (*G.-H.*). — Solution asymptotique de certaines équations transcendantes. (261-282).

Il s'agit d'équations du type

$$\varphi(x)e^{x} = \psi(x),$$

où $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont des polynomes; M. Birger Lindgren avait obtenu quelques résultats concernant ces équations, M. Hardy montre qu'on peut en obtenir de beaucoup plus précis en utilisant la méthode élémentaire qu'il a développée dans le *Messenger of Mathematics* (t. XXXII, XXXIII) pour obtenir la solution asymptotique des équations

$$e^{x} = P(x), \qquad \sin x = P(x).$$

Il examine différents cas particuliers.

Dixon (*A.-C.*). — Sur le potentiel newtonien. (283-296).

L'auteur montre comment certains quaternions variables jouent par rapport au potentiel newtonien un rôle analogue à celui des fonctions d'une variable complexe par rapport au potentiel logarithmique. Il rencontre en particulier certaines fonctions triplement périodiques dont les propriétés rappellent celles des fonctions elliptiques.

Roberts (*R.-A.*). — Sur les foyers et les courbes planes confocales. (297-384).

I. Sur quelques courbes dont les foyers sont liés d'une certaine manière. — II. Sur les foyers de certaines courbes du troisième et du quatrième ordres. — III. Sur la détermination des foyers d'une cubique plane nodale dans un certain cas. — IV. Sur les foyers de quelques cubiques planes non singulières. — V. Sur les courbes confocales à une cubique plane. — VI. Sur certaines courbes confocales aux quartiques trinodales et binodales. — VII. Sur la détermination de la quartique nodo-bicuspidale dont les foyers sont donnés. — VIII. Sur un système confocal de cubiques nodales.

Tome XXVII; 1905.

Dixon (*A.-L.*). — Sur les fonctions hyperelliptiques de genre deux (1-43).

Exposition des propriétés fondamentales des fonctions hyperelliptiques de genre deux, faite à peu près parallèlement à celle qu'Halphen a donnée pour les fonctions elliptiques dans la première Partie de son *Traité*.

Basset (*A.-B.*). — Sur quelques propriétés des courbes du cinquième degré. (43-51).

Propriétés des quintiques nodales analogues à celles des quartiques nodales.

Miller (*G.-A.*). — Sur les racines des opérateurs d'un groupe. (51-55).

Soit G un groupe fini d'ordre g. Si s, s_1 sont des opérateurs de G tels qu'on ait $s_1^m = s$, on peut dire que s_1 est la racine $m^{\text{ième}}$ de s; à chaque opérateur correspond une racine $m^{\text{ième}}$ et une seule si m est premier à g. Il n'en est plus de même quand m et g ont un diviseur commun, M. Miller étudie spécialement le cas où G est un groupe abélien.

Teixeira (*G.*). — Sur la rectification de l'ellipse et de l'hyperbole logarithmiques de Booth. (56-60.)

Il s'agit des deux courbes gauches définies par les équations

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad 2kz = x^2 + y^2.$$

Jourdain (*Ph.*). — Sur les équations générales de la Mécanique. (61-79).

Dans une courte Note insérée dans *The mathematical Gazette*, t. II, 1903, l'auteur a montré comment le principe de la moindre contrainte de Gauss,

conduisait à une forme des équations générales de la Mécanique, valable pour les systèmes non holonomes. Ces équations avaient été étudiées antérieurement par M. Appell. Elles équivalent à des équations données par M. Ferrer. Dans le présent Mémoire, l'auteur établit et étudie une troisième forme des équations générales de la Mécanique, valable aussi pour les systèmes non holonomes, qu'on doit à M. Routh.

Mac-Mahon (*P.-A.*). — Note sur l'inégalité diophantienne $\lambda x \geqq \mu y$. (80-93).

Addition au Mémoire de l'auteur sur le même sujet inseré dans les *Cambridge philosophical Transactions*, t. XIX, première Partie, 1901.

Hardy (*G.-H.*). — Sur certaines séries de fonctions discontinues liées aux fonctions modulaires. (94-123).

Les recherches de M. Hardy se relient à celles de Riemann, de Smith et de M. Dedekind sur la façon dont se comportent certaines séries en q, qui se présentent dans la théorie des fonctions elliptiques quand le paramètre τ ($q = e^{\tau\pi i}$) tend vers un nombre rationnel. Diverses formules qui se rapportent à ce sujet s'obtiennent plus facilement par la considération d'intégrales prises le long d'un contour du type

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{x-\alpha},$$

où $\varphi(x)$ est quelqu'une des fonctions

$$\frac{1}{\sin a\pi x \sin b\pi n}, \quad \frac{1}{\cos a\pi x \cos b\pi x}, \quad \frac{1}{\sin a\pi x \cos b\pi x},$$

$$\frac{\operatorname{tang} a\pi x}{\sin b\pi x}, \quad \frac{\operatorname{tang} a\pi x}{\cos b\pi x}, \quad \frac{\cot a\pi x}{\sin b\pi x}, \quad \frac{\cot a\pi x}{\cos b\pi x},$$

$$\operatorname{tang} a\pi x \operatorname{tang} b\pi x, \quad \operatorname{tang} a\pi x \cot b\pi x, \quad \cot a\pi x \cot b\pi x.$$

Quelques-unes des formules établies par M. Hardy avaient été publiées par M. Lerch.

Elliot (*E.-B.*). — Un théorème d'intégration pour les fonctions rationnelles entières et ses relations avec la théorie des formes. (124-140).

Glaisher (*J.-V.*). — Sur les angles des *pedal* triangles et sur quelques questions arithmétiques qui s'y rapportent. (140-161).

Le triangle *pédal* $A_1B_1C_1$ du triangle ABC a pour sommets les pieds des hauteurs. Soient $A_2B_2C_2$ le triangle pédal de $A_1B_1C_1$, $A_3B_3C_3$ le triangle pédal de $A_2B_2C_2$, etc.; les angles de $A_nB_nC_n$ s'expriment simplement au moyen des angles de ABC. Lorsque les angles A, B, C sont commensurables à π, les angles des triangles successifs finissent par se reproduire périodiquement; c'est cette périodicité qu'étudie en particulier M. Glaisher.

Roberts (*R.-A.*). — Sur certains systèmes confocaux de courbes de troisième et de quatrième classes qui se coupent orthogonalement. (162-171).

L'auteur étudie en particulier les systèmes de courbes définies respectivement par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} p^2 = c^2\cos^2\omega - m^2 + a^2\,\mathrm{tang}(\omega-\alpha),\\ p^2 = c^2\cos^2\omega + m'^2 + a^{2\prime}\cot(\omega-\alpha); \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} p\cos\omega = m + c\,\mathrm{tang}(\omega-\alpha),\\ p\cos\omega = m' - c\cot(\omega-\alpha). \end{cases}$$

Les lettres p, ω désignent les coordonnées polaires du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur une tangente quelconque à la courbe considérée. Les deux courbes d'un même système sont orthogonales.

Muir (*T.-H.*). — Une troisième liste d'écrits sur les déterminants. (171-267).

Cette troisième liste d'écrits concernant la *théorie* ou l'*histoire* des déterminants correspond à l'époque de 1748 à 1900. Les deux listes précédentes avaient paru dans les Tomes XVIII et XXI du *Quarterly Journal*. Elle est dressée par ordre chronologique et se termine par un index alphabétique des noms d'auteurs.

Basset (*A.-B.*). — Sur le mouvement dans un liquide d'un cylindre dont la section droite est une quartique bicirculaire. (267-279).

L'auteur reprend des recherches sur ce sujet, qu'il a publiées vingt-deux ans auparavant, et qui ont passé en partie dans son *Traité d'Hydrodynamique*. Il les étend et corrige quelques inexactitudes.

Young (*W.-H.*). — Les puissances des ensembles clos et parfaits. (280-284).

L'auteur démontre d'une façon simple que la puissance d'un ensemble linéaire parfait est celle du continu linéaire. Il en est de même pour un système clos non dénombrable. Ces propositions sont ensuite étendues aux ensembles dans l'espace à n dimensions.

Jourdain (*Ph.*). — Formes alternatives des équations de la Mécanique. (284-296).

Campbell (*D.-F.*). — Sur les relations quadratiques homogènes entre les solutions d'une équation différentielle linéaire du quatrième ordre. (296-304).

L'auteur reprend la question pour la traiter d'une façon plus directe et qui s'applique plus aisément au sujet qu'il a déjà développé dans le *Quarterly Journal*, t. XXXI, p. 161.

Glaisher (*J.-W.*). — Sur la représentation d'un nombre comme somme de quatre carrés et sur quelques fonctions arithmétiques liées à ce sujet. (305-358).

On sait que le nombre de représentations d'un nombre impair m comme somme de quatre carrés est égal à huit fois la somme des diviseurs de m et que le nombre de représentations de $4m$ comme somme de quatre carrés est égale à quatre fois la même somme. Le nombre de représentations de m comme somme de quatre carrés est ainsi la moitié du nombre de représentations de $4m$ comme somme de quatre carrés impairs. On est amené à supposer que les deux modes de représentation peuvent être transformés l'un dans l'autre; c'est en effet ce qui arrive. M. Glaister étudie en détail les relations entre les deux représentations. Il est amené à introduire les fonctions arithmétiques $\lambda(m)$, $P(m)$, $Q(m)$, $\Omega(m)$ qui sont les coefficients respectifs de $16q^m$ dans les développements suivant les puissances de q des fonctions

$$k^2k'^2\rho^3, \quad k^2k'\rho^4, \quad k^2k'^2\rho^5, \quad k^2k'^2\rho^6,$$

où

$$\rho = \frac{2K}{\pi}.$$

Basset (*A.-B.*). — Singularités composées des courbes du cinquième degré. (359-372).

M. Basset étudie les *point singularities* (points multiples) qui proviennent exclusivement de la réunion de points doubles et de rebroussements, les *line singularities* (tangentes multiples) qui proviennent exclusivement de la réunion de tangentes doubles et de tangentes stationnaires, enfin, les *mixed singularities* qui sont composées de points multiples et de tangentes multiples. Il est à remarquer qu'une même singularité mixte peut être obtenue de diverses façons.

Dikson (*L.-E.*). — Détermination de tous les sous-groupes des trois plus hautes puissances de p contenus dans le groupe G de toutes les transformations m-aires linéaires et homogènes (mod p). (373-384).

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO.

Torino, C. Clausen, in-8 [1].

Tome XLI; 1905-1906.

Boccardi (*G.*) [U]. — Méthode pour la détermination des constantes de l'instrument méridien. (9-20).

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXXIII_2, p. 182.

Zanotti-Bianco (*O.*) [U 10 *a*]. — Les idées modernes sur la figure mathématique de la Terre. Notes pour l'Histoire de la Géodésie. Note III : La gravité dans les îles et l'hypothèse de Pratt. (21-43).

La Note I est dans le Tome XXXIX, p. 689.
La Note II dans le Tome XL, p. 18.
Il y a une Note IV dans ce même Tome XLI, p. 288.

Jorio (*C.*) [K 21]. — Sur les raccordements bicentriques. Théorie générale. (44-59).

Somigliana (*C.*) [T 2]. — Sur la propagation des ondes dans les milieux isotropes. (60-71).

M. Lowe, dans les *Proceedings of the London mathematical Society*, 1904 (*The propagation of wave motion*, etc.), a étendu, aux intégrales des équations générales des mouvements vibratoires, la formule sur laquelle Kirchhoff a fondé la théorie de la propagation des rayons lumineux, et il arrive à la solution en partant des intégrales de Lorentz relatives aux mouvements produits dans un milieu indéfini par des forces agissant dans un champ fini, en supposant que ce champ se réduise à un point, et en déterminant ainsi ce que l'auteur appelle *intégrales élémentaires*. L'auteur donne un procédé direct au moyen d'une intégrale de l'équation

$$(D_t^2 - a^2\Delta_2)\Delta_2\varphi = 0,$$

qui est

$$\varphi_a(r, t, \chi) = \frac{1}{r}\int_0^r dr \int_0^r \chi\left(t - \frac{r}{a}\right) dr,$$

χ étant une fonction arbitraire.

De la même manière qu'au moyen de l'intégrale

$$\frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{a}\right)$$

de l'équation

$$(D_t^2 - a^2\Delta_2)\varphi = 0,$$

on peut construire la théorie des *potentiels retardés*

$$U = \int_S f\left(t - \frac{r}{a}\right)\frac{dS}{r};$$

l'auteur forme avec la fonction $\varphi_a(r, t, \chi)$ des *potentiels retardés du second ordre*

$$V(t, x_0, y_0, z_0) = \int_S \varphi_a(r, t, \chi)\, dS,$$

pour lesquels on a

$$(D_t^2 - a^2\Delta_2)\Delta_2 V = 4\pi a^2 \chi(t),$$

formule analogue à celles de Lorentz pour les potentiels retardés ordinaires.

A l'aide de ces potentiels on peut exprimer les intégrales des équations

$$(a^2-b^2)\frac{\partial\theta}{\partial x}+b^2\Delta_2 u+X=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$
$$(a^2-b^2)\frac{\partial\theta}{\partial y}+b^2\Delta_2 v+Y=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$
$$(a^2-b^2)\frac{\partial\theta}{\partial z}+b^2\Delta_2 w+Z=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

qui sont les équations du mouvement produit dans un milieu indéfini par des forces agissant dans un espace fini, a et b étant les constantes du milieu, u, v, w les composantes du déplacement, X, Y, Z, celles des forces, et

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Les intégrales sont données par

$$u=\frac{\partial\Theta}{\partial x}-\frac{\partial\Theta'}{\partial x}+\Delta_2\varphi',$$
$$v=\frac{\partial\Theta}{\partial y}-\frac{\partial\Theta'}{\partial y}+\Delta_2\psi',$$
$$w=\frac{\partial\Theta}{\partial z}-\frac{\partial\Theta'}{\partial z}+\Delta_2\chi',$$

où

$$\Theta=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial z},$$
$$\Theta'=\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\psi'}{\partial y}+\frac{\partial\chi'}{\partial z},$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi a^2}\int_S\varphi_a(r,t,X)\,dS,\qquad \varphi'=\frac{1}{4\pi b^2}\int_S\varphi_b(r,t,X)\,dS,$$
$$\psi=\frac{1}{4\pi a^2}\int_S\varphi_a(r,t,Y)\,dS,\qquad \psi'=\frac{1}{4\pi b^2}\int_S\varphi_b(r,t,Y)\,dS,$$
$$\chi=\frac{1}{4\pi a^2}\int_S\varphi_a(r,t,Z)\,dS,\qquad \chi'=\frac{1}{4\pi b^2}\int_S\varphi_b(r,t,Z)\,dS.$$

De là, l'auteur déduit les *vibrations élémentaires*, dues à une seule force $X(t)$ agissant en un seul point de la masse, suivant une direction constante, et retrouve pour u, v, w les expressions de Love.

Tedone (*O.*) [T 2]. — Sur le problème de l'équilibre électrique à deux dimensions. Ellipse. (86-101).

Les principes que l'auteur a introduit pour la résolution des problèmes d'équilibre élastique, et qui sont fondés sur les propriétés des fonctions harmoniques, se trouvent exposés et appliqués dans les *Annali di Matematica*, 3e série, t. VIII, 1902, p. 129, pour le cas où les forces de masse sont nulles, et dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XVII, 1903, p. 241, pour le cas où cette condition n'est pas satisfaite. Ici, il les applique au cas de l'ellipse, en

supposant donnés les déplacements au contour, et aussi en supposant données les tensions.

Giambelli (*G.-Z.*) [N_4 2]. — Sur les variétés représentées par l'annulation de mineurs d'un déterminant général de formes symétrique ou hémisymétrique. (102-125).

Burali-Forti (*C.*) [B 12 ref. M_1]. — Sur la courbe des probabilités. (155-157).

Construction au moyen d'une courbe logarithmique et d'une parabole.

Severi (*F.*) [B 9]. — Sur certaines propriétés des modules de formes algébriques. (205-223).

1. Si les formes $F_0, F_1, \ldots, F_r$ à $r+1$ variables $x_0, x_1, \ldots, x_r$ et des ordres $n_0, n_1, \ldots, n_r$ respectivement, n'ont pas de zéros communs, toute forme d'ordre $\geqq n_0 + n_1 + \ldots + n_r - r$ *appartient au module* $(F_0, F_1, \ldots, F_r)$, c'est-à-dire qu'elle peut s'exprimer par une combinaison linéaire de ces formes, les coefficients étant des formes en $x_0, x_1, \ldots, x_r$.

2. Si les $h+1$ formes $(h \leqq r)$

$$\Phi, \quad F_1, \quad \ldots, \quad F_h$$

n'ont que ∞^{r-h-1} zéros en commun, et si le produit de Φ par une forme arbitraire F appartient au module $(F_1, \ldots, F_h)$, la forme F appartient aussi à ce module.

Ces théorèmes de Lasker (*Math. Ann.*, t. LX, 1905) sont démontrés ici en partant d'une extension aux espaces non linéaires d'un théorème de M. Bertini, suivant lequel une hypersurface générale d'un système linéaire ne peut avoir de points multiples qu'aux points de base.

Suit l'extension à r formes du théorème $Af + B\varphi$ de Nœther, extension que M. König avait donnée au moyen des séries de puissances.

Torelli (*R.*) [B 9]. — Sur certaines extensions du théorème de Nœther $Af + B\varphi$. (224-234).

Conditions pour qu'une forme à $r+1$ variables puisse se représenter comme une combinaison linéaire de $h \leqq r$ formes ayant ∞^{r-h} zéros en commun.

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme puisse s'exprimer comme forme de degré s en $F_1, \ldots, F_h$, la variété ∞^{r-h} des zéros communs étant dépourvue de parties multiples. Nombre des conditions linéaires (postulation) pour un hyperespace d'ordre donné qui doit contenir cette variété comme s-uple.

Giambelli (*G.-Z.*) [M_2 1 ref. Q 2]. — Quelques extensions du *Fundamentalsatz* de Nœther aux hyperespaces. (235-258).

Extension au cas où la variété par laquelle l'hyperespace doit passer est représentée par l'annulation de tous les déterminants du deuxième ordre

contenus dans une matrice générale (de formes) à deux lignes. Autre extension au cas du passage multiple par une variété qui est l'intersection complète d'hyperespaces.

Zanotti-Bianco (*O.*) [U 10 *a*]. — Les idées modernes sur la figure mathématique de la Terre. Notes pour l'Histoire de la Terre. Note IV : La gravité dans les îles et l'hypothèse de Pratt. (288-308).

Voir la Note III dans ce Tome à la page 21, et la Note V dans le Tome XLII, p. 25.

Pieri (*M.*) [K 7]. — Appendice au Mémoire *Nouveaux principes de Géométrie projective complexe*. (339-342).

Le Mémoire est dans les *Memorie delle R. Accad. di Torino*, 2ᵉ série, t. LV, 1905. La proposition énoncée dans ce Mémoire comme Postulatum XXVIII, peut se déduire des postulata précédents.

Guidi (*C.*) [T 2 *b*]. — Influence de la température pour les constructions en maçonnerie. (359-370, 1 planche).

Guareschi (*G.*) [K 7 ref. Q 2]. — Sur la géométrie d'une forme quadratique et d'une forme d'Hermite à variables conjuguées. (405-414.)

Soient, dans l'espace S_{n-1}, la quadrique

$$\Sigma a_{lm} x_l x_m = 0 \qquad (a_{lm} = a_{ml}),$$

fondamentale de la polarité

$$\Sigma a_{lm} x_l y_m = 0,$$

et la quadrique *hyperalgébrique* (dénomination de M. Segre) [*Un champ nouveau de recherches géométriques* (*voir* ces *Atti*, t. XXV, XXVI, XXVIII)].

$$\Sigma b_{lm} x_l \bar{x}_m = 0 \qquad (b_{lm} = \bar{b}_{ml}),$$

fondamentale de l'*antipolarité*

$$\Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m = 0,$$

$\bar{a}$ étant le nombre complexe conjugué de a. L'auteur étudie les pyramides autopolaires communes aux deux quadriques, et l'intersection de ces dernières, et particulièrement le cas de $n = 3$ (conique et conique hyperalgébrique dans un plan).

Barbieri (*U.*) [R 5 *a*]. — Sur une comparaison entre l'expression de Helmert et celle de Pizzetti pour le potentiel de la gravité (503-519).

Morera (*G.*) [R 5 *a*]. — Sur l'attraction des couches ellipsoïdales et sur les fonctions harmoniques ellipsoïdales. (520-531, 538-541).

Posons

$$\mu = 1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s},$$

$$\mathfrak{R}(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)},$$

et indiquons par s_0 zéro ou la plus grande racine de $\mu = 0$ suivant que le point x, y, z est intérieur ou extérieur à l'ellipsoïde

$$\mu_0 = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Alors, Q étant un polynome harmonique homogène de degré n, le symbole

$$\pi abc\, Q\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right)\int_{s_0}^{\infty}\frac{\mu^n\, ds}{\mathfrak{R}(s)}$$

représente une fonction harmonique ellipsoïdale, qui est la fonction potentielle de la couche de densité

$$h = -(-2)^{n-1}\, n!\, P.\, Q\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right),$$

où

$$P = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4}}}.$$

Les fonctions harmoniques ellipsoïdales ont été aussi étudiées par l'auteur dans le Mémoire : *Sulla attrazione degli ellissoidi* (*Mém. de Turin*, 2e série, t. LV).

Boggio (*T.*) [T 2]. — Sur la déformation d'une sphère élastique isotrope (579-587).

L'idée de supposer provisoirement connue la dilatation cubique θ, et de la déduire ensuite, après avoir calculé les déplacements, avait été déjà employée par Cesarò (*Introduzione alla teoria matematica dell' elasticità*, Torino, 1894), mais θ y comparaissait dans des intégrales de surface. L'auteur, en suivant la même idée, trouve (pour le cas où l'on connaît les déplacements à la surface) les expressions des déplacements

$$(1)\quad \begin{cases} \xi = \xi' + \dfrac{R^2-\rho^2}{4(1-2m)}\dfrac{d}{dx}\left(\rho^{-\frac{1}{2}}\displaystyle\int_0^{\rho}\rho^{-\frac{1}{2}}\theta\, d\rho\right), \\ \eta = \eta' + \dfrac{R^2-\rho^2}{4(1-2m)}\dfrac{d}{dy}\left(\rho^{-\frac{1}{2}}\displaystyle\int_0^{\rho}\rho^{-\frac{1}{2}}\theta\, d\rho\right), \\ \zeta = \zeta' + \dfrac{R^2-\rho^2}{4(1-2m)}\dfrac{d}{dz}\left(\rho^{-\frac{1}{2}}\displaystyle\int_0^{\rho}\rho^{-\frac{1}{2}}\theta\, d\rho\right), \end{cases}$$

ξ', η', ζ' étant les fonctions harmoniques qui prennent à la surface les valeurs données, ρ le rayon vecteur, R le rayon de la sphère, et m une constante. La fonction θ se détermine au moyen des équations (1) et de

$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz},$$

et l'on a ainsi les relations qui donnent définitivement ξ, η, ζ.

Suit le cas où l'on donne les tensions, qui est traité par une méthode analogue.

Palatini (*F.*) [Q 2]. — Sur les surfaces algébriques dont les espaces S_h $(h+1)$ — sécants ne remplissent pas l'espace environnant (634-640).

Les espaces S_h doivent avoir en commun avec la surface $h+1$ points linéairement indépendants.

M. Severi (*Rend. del Circ. mat. di Palermo,* 1901) a traité le cas des surfaces dans S_5, et a trouvé que la seule surface ayant la propriété énoncée est celle de Veronese. L'auteur (*Rend. dei Lincei,* 1903) a traité le cas des surfaces représentées sur le plan par le système de toutes les courbes d'un ordre donné. Ici il trouve que les surfaces en question sont :

1° La surface S_{3h+2}, représentée sur le plan par le système des courbes d'ordre $2h$ avec un point fondamental $2(h-1)$-uple et $h-1$ points doubles;

2° dans le cas de $h=4$, la surface représentée par le système des quartiques du plan.

Gatti (*E.*) [T 3 *a*]. — Propriété relative aux lentilles cylindriques biconvexes symétriques. (701-727).

Rimondini (*F.*) [C 2 *j*]. — Sur les intégrales définies d'un champ convexe. (728-738).

Extension de la recherche précédente relative à un champ rectangulaire (*voir* ces *Atti*, t. XL, 1904-1905, p. 5) et application au calcul approché des volumes.

Levi (*B.*) [I 12 *a* ref. M_1 5]. — Essai pour une théorie arithmétique des formes cubiques ternaires. (739-764).

La résolution en nombres rationnels de

$$y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$$

coïncide avec la recherche des points rationnels situés sur une cubique plane, et bien que l'équation ait une forme particulière, on peut y réduire le cas général, par une transformation birationnelle à coefficients rationnels, lorsqu'on connaît un point rationnel de la courbe. L'auteur trouve les conditions d'équivalence de deux cubiques par rapport aux transformations birationnelles à coefficients rationnels. Étant

$$xz^2 + a\varphi_3(xy) = 0$$

la cubique, où

$$\varphi_3(xy) = m_0x^3 + 3m_1x^2y + 3m_2xy^2 + y^3,$$

et ayant posé

$$i = m_1 - m_2^2,$$
$$j = m_0 - 3m_1 m_2 + 2m_2^3,$$

les deux invariants arithmétiques, dont dépend l'équivalence rationnelle de deux cubiques, sont $\frac{i^3}{j^2}$ et le plus grand facteur non quadratique de $\frac{aj}{i}$. Il y a exception pour les cubiques harmonique et équianharmonique.

Puis l'auteur étudie les successions de points rationnels d'une cubique, qu'on peut déduire rationnellement d'un ou de plusieurs points rationnels, c'est-à-dire par intersection de la cubique avec des courbes à coefficients rationnels, déterminées par les points donnés et par des paramètres rationnels. En particulier, tous les points déduits d'un point A, de coordonnée elliptique α, correspondent aux coordonnées elliptiques $(3n+1)\alpha$, avec n entier, positif ou négatif. A la question de savoir si l'on a ainsi *tous* les points rationnels existant sur la courbe, on doit répondre négativement, et c'est cette considération de la totalité des points rationnels qui a donné à Sylvester et à Poincaré l'occasion d'introduire le *rang* de la courbe. L'auteur en modifie la définition en la donnant comme il suit : considérons une cubique quelconque, équivalente à la cubique donnée, et ayant un point d'inflexion rationnel ; s'il est possible de déterminer un groupe de points rationnels, différents du point d'inflexion, et tels qu'aucun d'eux ne puisse se déduire rationnellement du point d'inflexion et d'autres points du groupe, mais que *tout autre* point rationnel de la courbe puisse s'en déduire, un tel groupe s'appelle une *base* du système de points rationnels, et le nombre des points de ce groupe est le *rang* de la cubique.

Suit le cas des cubiques à birapport rationnel.

Voir une autre Note sur ce même sujet, dans le Tome XLIII, 1907-1908, p. 99.

Laura (*E.*) [J 4]. — Sur les transformations orthogonales à trois variables. (765-776).

Étant

$$x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

une transformation orthogonale dextrorse, les équations que l'on obtient en résolvant par rapport aux dérivées des angles d'Euler sont

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \chi \sin\varphi - \pi \cos\varphi, \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \chi \dfrac{\cos\varphi}{\sin\theta} + \pi \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \rho + \cot\theta(\pi \sin\varphi + \chi \cos\varphi), \end{cases}$$

π, χ, ρ étant les composantes de la rotation instantanée suivant les axes mobiles. C'est un système de Lie, lié au groupe

$$(2)\qquad \begin{cases} X_1 f = -\cos\varphi \dfrac{\partial f}{\partial\theta} + \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta} \dfrac{\partial f}{\partial\psi} + \cot\theta \sin\varphi \dfrac{\partial f}{\partial\varphi}, \\ X_2 f = \sin\varphi \dfrac{\partial f}{\partial\theta} + \dfrac{\cos\varphi}{\sin\theta} \dfrac{\partial f}{\partial\psi} + \cot\theta \cos\varphi \dfrac{\partial f}{\partial\varphi}, \\ X_3 f = \dfrac{\partial f}{\partial\varphi}, \end{cases}$$

qui est semblable au groupe

$$(3)\quad \begin{cases} Y_1 f = -i\dfrac{1-\xi^2}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \xi} - i\dfrac{1-\eta^2}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \eta} - i\dfrac{1-\zeta^2}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \zeta}, \\ Y_2 f = \dfrac{1+\xi^2}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \xi} + \dfrac{1+\eta^2}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \eta} + \dfrac{1+\zeta^2}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \zeta}, \\ Y_3 f = -i\xi\dfrac{\partial f}{\partial \xi} - i\eta\dfrac{\partial f}{\partial \eta} - i\zeta\dfrac{\partial f}{\partial \zeta}; \end{cases}$$

et d'égale composition; la transformation

$$(4)\quad \begin{cases} \theta = \theta(\xi, \eta, \zeta), \\ \varphi = \varphi(\xi, \eta, \zeta), \\ \psi = \psi(\xi, \eta, \zeta), \end{cases}$$

qui réduit (2) à (3), réduit le système (1) à la forme

$$\frac{d\xi}{dt} = -i\pi\frac{1-\xi^2}{2} - \chi\frac{1+\xi^2}{2} - i\rho\xi,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -i\pi\frac{1-\eta^2}{2} - \chi\frac{1+\eta^2}{2} - i\rho\eta,$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = -i\pi\frac{1-\zeta^2}{2} - \chi\frac{1+\zeta^2}{2} - i\rho\zeta,$$

et l'intégration de (1) se réduit à celle d'une seule équation de Riccati.

L'auteur exprime les a_{ik} en fonction des ξ, η, ζ sans déterminer les formules (4). La résolution du problème est fondée sur le théorème suivant :

Si

$$X_i f = \lambda_{i1}\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_{i2}\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_{i3}\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sont les transformations infinitésimales d'un groupe simplement transitif, et si l'on a

$$(X_1, X_2)f = X_3 f, \qquad (X_2, X_3)f = X_1 f, \qquad (X_3, X_1)f = X_2 f;$$

si

$$Y_i f = \mu_{i1}\frac{\partial f}{\partial x} + \mu_{i2}\frac{\partial f}{\partial y} + \mu_{i3}\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sont celles du groupe réciproque, et

$$(Y_1, Y_2)f = -Y_3 f, \qquad (Y_2, Y_3)f = -Y_1 f, \qquad (Y_3, Y_1)f = -Y_2 f,$$

et, en exprimant les $Y_i f$ par les $X_i f$, si l'on a

$$Y_i f = a_{i1}X_1 f + a_{i2}X_2 f + a_{i3}X_3 f,$$

la transformation a_{ik} est orthogonale dextrorse, et l'on a aussi

$$\frac{dx}{dt} = p\mu_{11} + q\mu_{21} + r\mu_{31},$$

$$\frac{dy}{dt} = p\mu_{12} + q\mu_{22} + r\mu_{32},$$

$$\frac{dz}{dt} = p\mu_{13} + q\mu_{23} + r\mu_{33}.$$

où

$$p = a_{21}\frac{da_{31}}{dt} + a_{22}\frac{da_{32}}{dt} + a_{23}\frac{da_{33}}{dt},$$

$$q = a_{31}\frac{da_{11}}{dt} + a_{32}\frac{da_{12}}{dt} + a_{33}\frac{da_{13}}{dt},$$

$$r = a_{11}\frac{da_{21}}{dt} + a_{12}\frac{da_{22}}{dt} + a_{13}\frac{da_{23}}{dt}.$$

Somigliana (C.) [T 2]. — Sur quelques formules fondamentales de la dynamique des milieux isotropes. Note I (869-885), Note II (1070-1080).

Il y a une Note III dans le Tome XLII, p. 765.

Dans un Mémoire publié dans le *Nuovo Cimento*, 3e série, t. XVIII, XIX et XX, l'auteur a démontré qu'en prenant pour point de départ la formule de Green, et sans faire usage du théorème de Betti, on peut trouver des formules de représentation pour les composantes du déplacement dans un corps élastique isotrope en équilibre; de là, par de simples dérivations, on peut déduire les formules pour la dilatation et les composantes de la rotation élémentaire. Ici il trouve par un procédé analogue les formules correspondantes pour le cas du mouvement. Il se fonde sur la formule de Kirchhoff, complétée par le terme intégral d'espace qui résulte du théorème de Lorentz, formule correspondant à celle de Green lorsqu'on se reporte à l'équation

$$(1)\qquad (D_t^2 - a^2\Delta_2)\varphi = \Phi,$$

Φ étant une fonction de t et de x, y, z. Si $\varphi(x, y, z, t)$ est une fonction régulière dans l'espace S limité par la surface s, et satisfaisant à (1), si l'on pose

$$[\varphi]_a = \varphi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right),$$

où r est la distance de (x, y, z) au point (x', y', z') intérieur à S, et si n indique la normale intérieure, la formule est la suivante :

$$4\pi\varphi(x', y', z') = \int_s \left\{ [\varphi]_a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_a - \frac{1}{ar}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_a \right\} ds - \frac{1}{a^2}\int_S [\Phi]_a \frac{dS}{r}.$$

L'auteur donne à cette formule la forme

$$(2)\qquad 4\pi\varphi(x', y', z') = \int_s \left\{ [\varphi]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_a \right\} ds - \frac{1}{a^2}\int_S [\Phi]_a \frac{dS}{r},$$

ayant posé

$$[\varphi]_a^* = \left[\varphi - \frac{r}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_a,$$

et cette formule (2) est la base de la méthode suivie par l'auteur. Il représente, au moyen de cette formule, les composantes u, v, w du mouvement, par

la dilatation θ et les éléments fondamentaux, c'est-à-dire les forces de masse X, Y, Z, les pressions superficielles extérieures L, M, N, les valeurs de u, v, w à la surface et leurs dérivées premières par rapport à t. A cette fin, il emploie aussi la formule

$$\int_s \left[\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial n}\right]_b \frac{ds}{r} = \int_s [U]_b^* \left(\frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right) ds,$$

qu'il déduit en égalant les résultats d'une double transformation d'une intégrale d'espace en intégrales de surface. Ensuite, en posant

$$U_n = u\frac{\partial x}{\partial n} + v\frac{\partial y}{\partial n} + w\frac{\partial z}{\partial n},$$

$$\varphi = \int_s [U_n]_b \frac{ds}{r},$$

et étant

$$\Phi = \int_S [\theta]_b \frac{ds}{r}$$

et k la densité, il trouve

$$4\pi b^2 u(x', y', z', t) = (a^2 - b^2)\frac{\partial \Phi}{\partial x} - b^2\frac{\partial \varphi}{\partial x'} + A,$$

où

$$A = \int_S [X]_b \frac{dS}{r} + \frac{1}{k}\int_s [L]_b \frac{ds}{r} + b^2 \int_s [u]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds$$
$$+ b^2 \int_s \left\{ [u]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [v]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [w]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right\} \frac{\partial x}{\partial n} ds,$$

et deux autres formules semblables pour v, w, où entrent des expressions B, C analogues à A.

De là on déduit, pour la rotation élémentaire,

$$8\pi b^2 \xi = \frac{\partial C}{\partial y'} - \frac{\partial B}{\partial z'},$$

$$8\pi b^2 \eta = \frac{\partial A}{\partial z'} - \frac{\partial C}{\partial x'},$$

$$8\pi b^2 \zeta = \frac{\partial B}{\partial x'} - \frac{\partial A}{\partial y'}.$$

Dans la Note II l'auteur représente la dilatation θ par les éléments fondamentaux, toujours en s'appuyant exclusivement sur le théorème de Kirchhoff, et dans la Note III (*voir* t. XLII, p. 765) il exprime directement par les éléments fondamentaux la fonction

$$\Phi = \int_S [\theta]_b \frac{dS}{r},$$

en complétant ainsi le problème de l'expression de u, v, w.

Balbi (*L.*) et *Nicolis* (*U.*) [U]. — Éphémérides stellaires et phénomènes astronomiques pour 1907. (886-911).

Perazzo (*U.*) [K 22 ref. Q 2]. — Sur la géométrie descriptive d'un espace d'un nombre quelconque de dimensions. (923-945).

Extension de la projection bicentrale d'un espace ordinaire sur un plan, c'est-à-dire projection $(l+1)$-centrale d'un S_{m+l} sur un S_m qui y est renfermé. Cas particuliers de S_4 et de S_5.

Pascal (*E.*) [C 3 *a*]. — Sur une propriété des déterminants wronskiens. (1081-1083).

La condition

$$W = 0$$

pour que les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ satisfassent à une relation linéaire, est équivalente à celle-ci

$$\sum_1^n (-1)^{i-1} y_i \int W_i \, dx = 0,$$

où W_i est le wronskien de $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ et où l'on doit entendre que, pour y satisfaire, on puisse déterminer convenablement les constantes d'intégration.

Padoa (*A.*). — Qu'est-ce qu'une relation? (1084-1092).

Du nombre des idées primitives on peut supprimer celle de *relation*, qui y avait été comprise par M. Russell (*Revue de Mathématiques*, t. VII, Turin, 1901). La même chose a lieu pour l'idée d'*identité*.

Tome XLII; 1906-1907.

Tedone (*O.*) [T 2 *a*]. — Sur quelques formules fondamentales de la dynamique des milieux isotropes. (6-13).

Les formules pour les déplacements, données par l'auteur dans son Mémoire *Sulle vibrazioni dei corpi solidi omogenei e isotropi* (*Mém. de Turin*, 2e série, t. XLVII, 1897, p. 181), contiennent, comme cas particulier, celles de Love, *The propagation of wave-motion in an isotropic elastic solid medium* (*Proceedings of the London M. S.*, 2e série, 1893, t. I).

Voir aussi la Note à la page 516.

Balbi (*V.*) [U]. — Position du cratère Mötting A et passage des bords de la Lune, observés au cercle méridien de Turin en 1903. (14-24).

Zanotti-Bianco (O.) [U 10 *a*]. — Les idées modernes sur la figure mathématique de la Terre. Notes pour l'histoire de la Géodésie. Note V : Les procédés pour la détermination de la forme et grandeur de la Terre à la moitié du XIXe siècle. (25-46).

Voir la Note IV dans le Tome XLI de ces *Atti*, p. 288, et une Note VI dans ce Tome, p. 167.

Chisholm-Young (W.-H. et G.) [M_1 1 ref. P6]. — Note sur la transformation de Bertini d'une courbe en une autre ne possédant que des nœuds. (82-86).

La transformation de Bertini (*Rivista di Matematica*, t. I; Torino, 1891, p. 22, et *Math. Ann.*, t. XLIV, p. 158) est faite au moyen d'une transformation plane double, dans laquelle aux droites du plan double correspondent dans le plan simple (plan de la courbe) les cubiques passant par sept points. Il faut pourtant que ces sept points de base soient choisis en dehors de certains lieux A_1, A_2, A_2, A_4. L'auteur montre qu'il est nécessaire d'y joindre un autre lieu A_5, qui d'autre part rend inutile la considération d'un des quatre lieux mentionnés.

La Note est écrite en anglais.

Torelli (R.) [M_2 1]. — Sur les systèmes algébriques de courbes appartenant à une surface algébrique. (86-99).

Extension, aux séries plusieurs fois infinies, du théorème démontré par M. Castelnuovo [*Sulle serie algebriche*, etc. (*Rend. dei Lincei*, 5e série, t. XV, 1er semestre 1906)], suivant lequel une série algébrique irréductible ∞^1, d'ordre ν et d'indice n, sur une courbe de genre π, a au plus $2n(\nu+\pi-1)$ points doubles, et ce nombre maximum a lieu lorsque la série est contenue dans une série linéaire de même ordre.

L'auteur démontre qu'une série algébrique irréductible ∞^r, d'ordre ν et d'indice n, sur une courbe de genre π, a au plus $n(r+1)(\nu+r\pi-r)$ points $(r+1)$-uples, et qu'on a ce maximum si la série est contenue dans une série linéaire de même ordre.

Sur une surface F, dont I est l'invariant de Zeuthen-Segre, un système algébrique irréductible ∞^1 de courbes de genre p, généralement irréductibles et sans points multiples variables (simples pour F), a au plus $\nu(n+\sigma+4p-I)$ courbes à point double, $\nu\,(>1)$ étant l'indice, σ le nombre des points de base, et n le degré du système. On a ce maximum lorsque le système est contenu totalement dans un système linéaire.

Burali-Forti (C.) [B 12 *c*]. — Sur certaines opérations projectives applicables en Mécanique (100-120).

Homographies vectorielles, ou transformations linéaires de vecteurs en vecteurs ou bivecteurs, et applications à l'hydromécanique et à l'élasticité. Très remarquable la simplicité des expressions et des calculs.

Voir l'autre Note à la page 417.

Zanotti-Bianco (*O.*) [U 10 *a*]. — Les idées modernes sur la figure mathématique de la Terre. Notes pour l'histoire de la Géodésie. Note VI : Les procédés pour la détermination de la forme et grandeur de la Terre à la moitié du XIXe siècle. (167-191).

Voir la Note V dans ce Tome, p. 25, et une Note VII dans le Tome XLIII, p. 648.

Laura (*E.*) [R 4 *a*]. — Sur les systèmes de quatre forces en équilibre. (210-215).

Quatre forces appliquées aux sommets d'un tétraèdre et proportionnelles aux faces. De ce système, qui est en équilibre, on déduit le système le plus général en y ajoutant des paires de forces égales et directement opposées.

Burali-Forti (*C.*) [B 12 *c*]. — Sur les homographies vectorielles (417-426).

Suite de la Note précédente (p. 100). A toute homographie vectorielle correspond une autre homographie, que l'auteur appelle *conjuguée*, au moyen de laquelle on peut exprimer les dérivées des produits de vecteurs et les invariants de l'inverse d'une homographie.

Tedone (*O.*) [T 2 *a*]. — Sur l'extension de l'intégrale de Poisson, relative à l'équation des potentiels retardés, au cas de l'isotropie élastique (516-521).

Transformations des formules que l'auteur a trouvées dans ce Tome, p. 6, et qui donnent l'intégrale générale des équations des vibrations d'un milieu élastique isotrope.

Lebesgue (*H.*) [K 6 *c* ref. L_1 8 *b*]. — Sur les transformations ponctuelles, transformant les plans en plans, qu'on peut définir par des procédés analytiques. (532-539).

Extrait d'une lettre à M. Segre (en français).

La question se rattache aux recherches de M. Segre (*voir* ces *Atti*, t. XXV, XXVI) et se ramène à chercher une relation

$$Z = \varphi(z)$$

entre deux variables complexes, satisfaisant aux conditions

$$\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2),$$
$$\varphi(z_1 z_2) = \varphi(z_1)\varphi(z_2).$$

Les trois solutions

$$Z = 0, \qquad Z = z, \qquad Z = \bar{z},$$

où $\bar{z}$ est la conjuguée de z, sont évidentes. En admettant les raisonnements de M. Zermelo (*Math. Ann.*, t. LIX), que l'auteur appelle *idéalistes*, suivant lesquels tout ensemble peut être bien ordonné, il y aurait une infinité d'autres solutions ; mais il n'y a pas d'autre solution qui soit exprimable analytiquement.

Segre (*C.*) [N_2 1 *g*]. — Les congruences rectilignes W adhérentes à deux surfaces réglées. (539-550).

Une congruence, ayant pour surfaces focales deux surfaces réglées non développables G, H, est une *congruence* W lorsque la correspondance qui en résulte entre les points de ces surfaces (les foyers d'un même rayon étant correspondants entre eux) fait correspondre entre elles les génératrices. Ces congruences ont été complétées par M. Bianchi (*Lezioni di Geom. differenziale*, 1894, p. 299 ; et 2ᵉ édition, t. II, 1903, p. 51) ; sur leurs nappes focales se correspondent les lignes asymptotiques. L'étude et la construction de ces congruences sont faites ici au moyen de la représentation de l'espace de rayons par les points d'une variété quadratique à quatre dimensions dans S_5.

Morera (*G.*) [T 2 *a*]. — Sur l'équilibre des corps élastiques isotropes. (676-686).

Q_1, Q_2, Q_3 étant trois fonctions harmoniques arbitraires et R une fonction biharmonique satisfaisant à l'équation

$$\Delta_2 R = \frac{1}{1-\eta}\left(\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q_3}{\partial z^2}\right)$$

(où η est le rapport de la contraction transversale à la dilatation longitudinale dans le cas d'une barre tendue uniformément), et si l'on pose

$$\alpha = R - Q_1, \qquad \beta = R - Q_2, \qquad \gamma = R - Q_3,$$

les formules

$$X_x = \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$Y_z = -\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y\, \partial z},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

donnent les expressions les plus générales des pressions. Pour expression de R on peut prendre

$$R = \frac{1}{2(1-\eta)}\left(x\frac{\partial Q_1}{\partial x} + y\frac{\partial Q_2}{\partial y} + z\frac{\partial Q_3}{\partial z}\right).$$

Applications.

Somigliana (*C.*) [T 2 *a*]. — Sur quelques formules fondamentales de la dynamique des milieux isotropes. Note III. (765-779).

Voir ci-dessus les Notes I et II (ces *Atti*, t. XLI, p. 869 et 1070).

Gatti (*E.*) [T 3 *a*]. — Recherches sur la succession des points cardinaux dans les lentilles sphériques. (881-895).

Predella (*P.*) [Q 2 ref. P 1 *c* ref. B 10 *b*]. — Recherches sur les couples de quadriques d'un espace de n dimensions. (937-958).

Si, dans une quadrique h fois spécialisée de S_n, on regarde l'espace double S_{h-1} comme le soutien d'une étoile (formée par tous les S_h renfermant S_{h-1}), les S_{h-1} de cette étoile qui constituent la quadrique forment (considérés dans l'étoile) une quadrique non spécialisée ; c'est ce que M. Segre appelle le *noyau* de la quadrique spécialisée donnée.

Alors, soient Q, Q′ deux quadriques, non spécialisées en S_n, et O l'homographie qui en résulte déterminée, en regardant comme correspondants deux points qui ont même hyperespace polaire, et soient $S_{h_1-1}, \ldots, S_{h_p-1}$, p espaces fondamentaux superposés de O. Soient encore C le noyau de la quadrique du faisceau (Q, Q′) ayant S_{h_1-1} pour espace double, et $Q_1^\star$ le noyau de la quadrique du système (Schaar) [Q, Q′] ayant pour espace double l'espace fondamental de plans Σ_{h_1-1}, conjugué à S_{h_1-1}. L'auteur appelle quadriques *associées* à Q et Q′ la quadrique $Q_1^\star$ et les deux Q_1, Q'_1, polaires de C par rapport à Q, Q′ ; et il en relève l'importance dans l'étude du couple donné de quadriques et de l'homographie qui en dépend. Au moyen de ces quadriques associées il démontre aussi le théorème de Weierstrass sur la transformation simultanée de deux formes quadratiques en deux autres, en le complétant par d'autres résultats; par exemple le suivant :

Il y a $\infty^{\sum\frac{h(h-1)}{2}}$ projectivités qui transforment un couple de quadriques en un autre, la caractéristique de l'homographie étant pour chacun des deux couples

$$[h_1-1, \ldots, h_p-1, \ldots].$$

Segre (*C.*) [Q 2 ref. O 5]. — Sur une classe de surfaces des hyperespaces, liée aux équations linéaires aux dérivées partielles du deuxième ordre. (1047-1079).

En supposant que les coordonnées $x^{(i)}$ soient des fonctions de deux paramètres u, v, on appelle surfaces Φ celles pour lesquelles on peut trouver six quantités A, B, ..., fonctions de u, v, telles que tous les points satisfassent à la condition

$$(1) \qquad A\frac{\partial^2 x^{(i)}}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2 x^{(i)}}{\partial u\,\partial v} + C\frac{\partial^2 x^{(i)}}{\partial v^2} + D\frac{\partial x^{(i)}}{\partial u} + E\frac{\partial x^{(i)}}{\partial v} + F.x^{(i)} = 0,$$

la même pour toutes les fonctions $x^{(i)}$. Géométriquement on a que, pour ces surfaces, les ∞^2 plans osculateurs aux courbes de la surface en tout point général, au lieu de former un cône V_4^2, constituent un S_4 qu'on appelle l'espace *hyperosculateur* en ce point. Les surfaces de l'espace ordinaire S_3 rentrent dans cette espèce, et pour chacune de ces surfaces on a un nombre infini d'équations analogues à (1). La même chose a lieu pour toute surface de S_4, mais avec une seule équation (1). Dans S_n, n étant $\geqq 5$, une surface

$$x^{(i)} = x^{(i)}(u, v)$$

est une surface Φ lorsque la matrice de $n+1$ lignes

$$\left\| \frac{\partial^2 x^{(i)}}{\partial u^2} \quad \frac{\partial^2 x^{(i)}}{\partial u\, \partial v} \quad \frac{\partial^2 x^{(i)}}{\partial v^2} \quad \frac{\partial x^{(i)}}{\partial u} \quad \frac{\partial x^{(i)}}{\partial v} \quad x^{(i)} \right\|$$

est nulle ; pour $n \geqq 4$, exception faite pour le cas des développables, l'équation (1) est unique.

Ces surfaces Φ ont des propriétés géométriques remarquables, particulièrement relatives aux lignes caractéristiques qui sont les ∞^1 lignes intégrales de l'équation

$$C\,du^2 - B\,du\,dv + A\,dv^2 = 0,$$

et qui dans le cas parabolique $B^2 - 4AC = 0$ se comportent comme les asymptotiques des surfaces ordinaires.

Dans S_5, on obtient comme surfaces Φ celles dont les ∞^2 plans tangents forment une variété qu'on peut aussi définir corrélativement comme enveloppe de ∞^2 hyperplans. La variété V_4, lieu des plans tangents à une surface Φ, admet ∞^2 espaces S_4 tangents (au lieu de ∞^3). Cette propriété, en dehors des surfaces Φ, n'appartient qu'à la surface de Veronese.

Enfin, l'auteur indique deux sens dans lesquels ses recherches peuvent être généralisées : ou en considérant des équations différentielles d'un ordre plus élevé, ou en passant du cas de deux variables u, v, à celui de trois ou plusieurs.

Scorza (*G.*) [Q 2 ref. M_1 2]. — Les correspondances (p, p) sur les courbes de genre p, et quelques applications. (1080-1089).

Ce travail est en relation avec les Notes que l'auteur a publiées dans ces *Atti*, t. XXXV, 1899-1900, p. 443 et 765, et avec le Mémoire de M. Severi : *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica*, etc. (*Memorie della R. Acc. d. Sc. di Torino*, 1903).

En toute correspondance (p, p), à valence -1, sur une courbe de genre p, x et y' étant deux points correspondants, les $p-1$ points homologues de x, autres que y', et les $p-1$ points homologues de y' dans la correspondance inverse, autres que x, constituent ensemble un groupe canonique.

Dans le cas d'une courbe (canonique) d'ordre $2p-2$ dans un espace de $p-1$ dimensions, appelons p-gone *correspondant* au point x pour la correspondance donnée T, le polygone gauche ayant pour sommets $y', y'', \ldots, y^{(p)}$, et p-gone correspondant à y' pour la correspondance T^{-1} celui dont les sommets sont $x', x'', \ldots, x^{(p)}$; du théorème précédent on déduit que les faces opposées à y' et à x dans les deux p-gones coïncident, et par cela :

L'enveloppe Γ des faces des p-gones correspondant aux points de la courbe C pour la correspondance T, coïncide avec l'enveloppe des faces des p-gones correspondant aux points de C pour T^{-1}. L'enveloppe est de la classe $2p(p-1)$ et du genre $3p(p-1)+1$.

Ces enveloppes ont une importance particulière dans le cas des quartiques planes, et l'on arrive à établir d'une façon très simple le théorème de Lüroth : *Dans une quartique, ou il n'y a aucun pentalatère complet inscrit, ou il y en a un nombre infini.*

Laura (*E.*) [H 4 *j*]. — Sur l'intégration d'un système de quatre équations différentielles linéaires à déterminant gauche, au moyen de deux équations de Riccati. (1089-1118).

Soit

$$x_i = \sum_{k=1}^{4} a_{ik}\,\xi_k$$

une transformation orthogonale dextrorse. En supposant que les a_{ik} soient des fonctions du temps, les x_i les coordonnées orthogonales d'un point de S_4 et les ξ_k celles du même point par rapport à un système mobile de coordonnées, les (1) sont les équations du mouvement d'un système rigide en S_4, autour d'un point. Posons

$$p_{hk} = a_{h1}a'_{k1} + a_{h2}a'_{k2} + a_{h3}a'_{k3} + a_{h4}a'_{k4},$$

où

$$a'_{kj} = \frac{da_{kj}}{dt}.$$

Comme on a

$$p_{hh} = 0, \qquad p_{hk} = -p_{kh},$$

il n'y a dans les p que six paramètres indépendants, et l'on trouve que les a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, a_{4k} satisfont, quel que soit k, au système

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \qquad\quad - p_{12}y - p_{13}z - p_{14}u,\\
\frac{dy}{dt} &= p_{12}x \qquad\quad - p_{23}z - p_{24}u,\\
\frac{dz}{dt} &= p_{13}x + p_{23}y \qquad\quad - p_{34}u,\\
\frac{du}{dt} &= p_{14}x + p_{24}y + p_{34}z,
\end{aligned}$$

qui possède l'intégrale

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = \text{const.}$$

Ce système (système *de Lie* suivant une dénomination de M. Bianchi ; voir *Lezioni, sulla teoria dei gruppi,* Pisa, p. 696), est lié au groupe des rotations autour d'un point de S_4, et peut se réduire à la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{dt} &= a + b\xi_1 + c\xi_1^2 + \alpha\frac{(\xi_1 - \eta_1)(\xi_1 - \zeta_1)}{\zeta_1 - \eta_1},\\
\frac{d\eta_1}{dt} &= a + b\eta_1 + c\eta_1^2 + \beta\frac{(\eta_1 - \zeta_1)(\eta_1 - \xi_1)}{\xi_1 - \zeta_1},\\
\frac{d\zeta_1}{dt} &= a + b\zeta_1 + c\zeta_1^2 + \gamma\frac{(\xi_1 - \zeta_1)(\eta_1 - \zeta_1)}{\eta_1 - \xi_1},
\end{aligned}\right.$$

où

$$-a = \frac{p_{14} + p_{23} - ip_{13} - ip_{12}}{2}, \qquad \alpha = \frac{-p_{14} + p_{23} - ip_{24} + ip_{13}}{2},$$

$$-b = i(p_{24} - p_{13}), \qquad -\beta = \frac{-p_{14} + p_{23} - ip_{24} - ip_{13}}{2},$$

$$c = \frac{p_{14} + p_{23} - ip_{13} - ip_{12}}{2}, \qquad -\gamma = -p_{14} + p_{23} - ip_{13} + ip_{12}.$$

La transformation projective

$$\xi_1 = \frac{A - B\xi_2}{C + \xi_2},$$

$$\eta_1 = \frac{A - B\eta_2}{C + \eta_2},$$

$$\zeta_1 = \frac{A - B\zeta_2}{C + \zeta_2},$$

où

$$A = e^{\int (b+2c\tau)\,dt} - \tau \int c e^{\int (b+2c\tau)\,dt}\,dt,$$

$$B = \tau,$$

$$C = -\int c e^{\int (b+2c\tau)\,dt}\,dt,$$

τ étant une solution particulière de l'équation de Riccati

(3) $$\frac{d\tau}{dt} = a + b\tau + c\tau^2,$$

réduit le système (2) au suivant

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \alpha\,\frac{(\xi_2 - \eta_2)(\xi_2 - \zeta_2)}{\zeta_2 - \eta_2},$$

$$\frac{d\eta_2}{dt} = \beta\,\frac{(\eta_2 - \zeta_2)(\eta_2 - \xi_2)}{\xi_2 - \zeta_2},$$

$$\frac{d\zeta_2}{dt} = \gamma\,\frac{(\zeta_2 - \xi_2)(\zeta_2 - \eta_2)}{\eta_2 - \xi_2},$$

dont l'intégrale dépend de celle d'une équation de Riccati, qui, par suite d'une erreur corrigée ensuite dans une seconde Note de l'auteur (t. XLIII, p. 358), est ici

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\alpha + i\gamma + 2i\beta\sigma - (\alpha + i\gamma)\sigma^2,$$

mais qui doit être

(4) $$\frac{d\sigma}{dt} = \alpha + \beta - \frac{\gamma}{2} + (\alpha - \beta)\sigma + \frac{\gamma}{2}\sigma^2.$$

L'équation du système (1) se réduit à celle des deux équations (3) et (4).

Balbi (*V.*) [U]. — Positions apparentes d'étoiles du Catalogue de Newcomb pour 1908. (1166-1186).

Tome XLIII; 1907-1908.

Jadanza (*N.*) et *Baggi* (*V.*) [U 10]. — Un niveau donnant avec sûreté la visuelle horizontale. (3-12).

Burali-Forti (C.) [B 12 *c*]. — Fonctions vectorielles. (13-24).

Si *u'* est un vecteur fonction du point P, l'auteur définit les deux opérations D_u, K_u par les conditions

$$(D_u x) \times a = x \times \text{grad.}(u \times a),$$
$$(K_u x) \times y = (D_u y) \times x.$$

Ces deux opérations ont, entre autres, les propriétés suivantes :

$$D_u \, dP = du,$$
$$(K_u x) \times dP = x \times du,$$

et l'on peut, au moyen de D_u, K_u, définir la *rotation* et la *divergence*, étant

$$(\text{rot.}\, u) \wedge x = D_u x - K_u x,$$
$$(\text{div.}\, u) a = D_u a - \text{rot.}(u \wedge a).$$

Autres fonctions et formules vectorielles.

Boccardi (G.) [U]. — Ascensions droites de quelques étoiles fondamentales du Catalogue de Newcomb. (75-91).

Giudice (F.) [M_2 3 *d*]. — Une démonstration de l'inséparabilité par radicaux des 27 droites d'une surface cubique. (92-93).

Levi (B.) [I 12 *a* ref. M_1 5]. — Essai pour une théorie arithmétique des formes cubiques ternaires. (99-120).

Cette Note se rattache à celle de même titre que l'auteur a publiée dans le Tome XLI de ces *Atti*, 1905-1906, p. 739.

On rapporte à un paramètre elliptique les points d'une cubique plane, de manière que la somme des valeurs relatives à trois points en ligne droite soit nulle. Alors d'un point A on déduit rationnellement une succession de points, qui est finie lorsque la valeur du paramètre en A est un diviseur d'une période. L'auteur étudie les successions finies obtenues par des tangentes tirées successivement, puis les conditions sous lesquelles les points obtenus peuvent être rationnels.

La succession formée par A et les tangentiels successifs est finie :

a. Lorsqu'on arrive à un point d'inflexion ;

b. Lorsqu'on arrive à un point dont le tangentiel coïncide avec l'un des points précédents.

On a le premier cas si le dénominateur du paramètre de A (diviseur d'une période) n'a que des facteurs 2 et un seul facteur 3. Le second cas se présente s'il y a d'autres facteurs, et le polygone fermé aura pour sommets tous les points de la succession lorsque le dénominateur n'a pas de facteur 2 ; s'il contient 2^ν il y a ν points qui n'entrent pas dans le nombre des sommets.

Les successions *a* correspondent à une valeur

(1) $$\alpha = \frac{\omega}{3 \cdot 2^r}$$

du paramètre de A, et sont appelées par l'auteur des *configurations arborescentes*.

Les successions b correspondent à une valeur

$$\alpha = \frac{\omega}{3t},$$

t n'étant par une puissance de 2, et s'appellent des configurations *polygonales simples* si t ne renferme pas le facteur 2, *mixtes* dans le cas contraire.

Les seules configurations arborescentes de points rationnels, qu'on peut déduire rationnellement d'un de leurs points, sont celles qui correspondent à la formule (1) pour $\nu = 0, 1, 2, 3$, et elles sont formées respectivement par un, deux, quatre et huit points. Il peut aussi y avoir des points rationnels *accidentels*, dont quelqu'un des points de la succession soit le tangentiel.

Les questions relatives aux configurations polygonales sont traitées dans une troisième Note (ce même Tome, p. 413).

Vitali (*G.*) [D 1 *d* ref. C 1 *h*]. — Sur les groupes de points et sur les fonctions de variables réelles. (229-246).

Le *corps* d'un groupe Σ de segments d'une droite est le groupe de points appartenant, même comme extrémités, à quelque segment de Σ. σ étant un segment aussi petit qu'on veut, et Σ_σ le groupe des segments de Σ inférieurs à σ, le groupe G commun aux corps de tous les Σ_σ est appelé le *noyau* de Σ. Alors :

Si le noyau de Σ a une mesure finie m_1, il existe un groupe fini ou dénombrable de segments de Σ, distincts deux à deux, dont les longueurs ont une somme $\geq m_1$.

A l'aide de ce théorème l'auteur étend aux fonctions de deux ou de plusieurs variables les méthodes employées dans sa Note *Sulle funzioni integrali*, publiée dans ces *Atti*, t. XL, p. 1021, où il a donné la condition pour qu'une fonction d'une variable réelle soit une intégrale.

Elia Levi (*E.*) [O 6 *k*]. — Sur la déformation des surfaces flexibles et inextensibles. (292-302).

L'égalité des éléments linéaires ne suffit pas pour conclure la véritable *applicabilité*, il faut aussi qu'il y ait une succession continue de surfaces, représentant les états intermédiaires entre les deux surfaces données. On appelle *isométriques* deux surfaces satisfaisant en général à l'égalité des éléments linéaires.

L'auteur démontre que deux surfaces isométriques à courbure négative (ou nulle) sont toujours applicables ; si elles sont à courbure positive, l'une peut être appliquée sur l'autre ou sur sa symétrique. La symétrie entre deux surfaces à courbure positive exclut leur applicabilité.

Laura (*E.*) [H 4 *j*]. — Sur l'intégration d'un système de quatre équations différentielles linéaires à déterminant gauche, au moyen de deux équations de Riccati. (358-378).

Note faisant suite à l'autre du Tome XLII, p. 1089.

Le système considéré dans la Note précédente est transformé par des substitutions linéaires, pour rechercher la réduction apportée dans l'intégration par la connaissance de solutions particulières. En connaissant une solution particulière, il suffit d'intégrer une seule équation de Riccati ; en en connaissant deux, on peut former l'intégrale générale par une quadrature.

Levi (*B.*) [I 12 *a* ref. M_1 5]. — Essai pour une théorie arithmétique des formes cubiques ternaires. (413-434).

Étude des configurations polygonales simples et mixtes, annoncées dans l'autre Note (ce Tome, p. 99). Voir la Note IV, faisant suite à celle-ci, à la page 672.

Elia Levi (*E.*) [T 4 *c*]. — Sur le problème de Fourier. (435-453).

Distribution des températures dans une aire plane.

Étant y le temps et x_1, x_2 les coordonnées, on doit trouver une solution de l'équation

$$\Delta_2 z - \frac{dz}{dy} = f(x_1, x_2, y),$$

étant

$$z(x_1, x_2, 0) = f_1(x_1, x_2),$$

et au contour

$$\frac{dz}{dn} + h z = \varphi(x_1, x_2, y).$$

On simplifie le problème en le réduisant de manière à pouvoir supposer $f = f_1 = 0$. L'auteur démontre aussi l'existence et l'unicité de la solution.

Morera (*G.*) [V 9]. — Fr. Siacci. Commémoration. (568-578). Avec la liste des travaux de Fr. Siacci.

Zanotti-Bianco (*O.*) [U 10 *a*]. — Les idées modernes sur la figure mathématique de la Terre. Notes pour l'histoire de la Géodésie. Note VII : La variation de la latitude avec la hauteur et la *Figur der Erde* de E. Bruns. (648-671).

Voir la Note VI dans le Tome XLII, p. 167, et une Note VIII dans ce Tome, p. 705.

Levi (*B.*) [I 12 *a* ref. M_1 5]. — Essai pour une théorie arithmétique des formes cubiques ternaires. Note IV. (672-681).

Suite de la Note insérée dans ce Tome à la page 413. Ici l'auteur étudie les configurations polygonales mixtes, ayant des points rationnels accidentels.

Jadanza (*N.*) [T 3 *a*]. — La lunette de Galilée employée comme microscope. (685-688).

Pizzetti (P.) [J 2 *b*]. — Sur la démonstration d'un théorème fondamental dans le calcul des probabilités. (698-704).

Théorème de Bernoulli.

Zanotti-Bianco (O.) [U 10 *a*]. — Les idées modernes sur la figure de la Terre. Notes pour l'histoire de la Géodésie. Note VIII : La variation de la latitude avec la hauteur et la *Figur der Erde* de E. Bruns. (705-727).

Voir la Note VII dans ce Tome, p. 648.

Sannia (G.) [O 6 *k*]. — Sur le théorème de Moutard et sur son interprétation géométrique pour les congruences W. (745-762).

La recherche des déformations infinitésimales d'une surface dépend de l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles du deuxième ordre à deux variables (équation caractéristique)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = M\theta$$

ou

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = M\theta.$$

suivant que la surface est à courbure négative ou positive. Ce sont les formes *normales* de l'équation caractéristique, la surface étant rapportée aux lignes asymptotiques. L'auteur prend l'équation caractéristique générale, relative à une surface rapportée à un double système orthogonal quelconque, et cette équation peut se réduire à la suivante :

$$\Phi\left(\frac{D}{\Delta}, \frac{D'}{\Delta}, \frac{D''}{\Delta}; \theta\right) = \left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}\, \Phi\left(\frac{D}{\Delta}, \frac{D'}{\Delta}, \frac{D''}{\Delta}; \sqrt{\rho}\right) - \frac{e D'' + g D - 2 f D'}{\Delta}\right]\theta,$$

l'opérateur Φ étant défini par

$$\Phi\left(\frac{D}{\Delta}, \frac{D'}{\Delta}, \frac{D''}{\Delta}; \ldots\right) = \frac{D''}{\Delta}\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\frac{D'}{\Delta}\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} + \frac{D}{\Delta}\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{D''}{\Delta} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{D'}{\Delta}\right)\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{D}{\Delta} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{D'}{\Delta}\right)\frac{\partial}{\partial v},$$

où

$$\Delta = \sqrt{|DD'' - D'^2|}.$$

Pour ce cas de l'équation caractéristique générale, l'auteur démontre les théorèmes de Moutard et de Bianchi.

Pour les congruences W dans lesquelles est constante la différence des carrés des distances des points limites et des foyers, on a que les courbures K, K_1 des deux nappes de la surface focale sont l'une fonction de l'autre.

Sacco (G.) [T 3 *b*]. — Aberrations et réflexions nuisibles pro-

duites par les filtres de lumière dans les appareils photographiques. (767-782).

Voir Note II à la page 856.

Tonelli (*L.*) [C 2 *h*]. — Sur la rectification des courbes. (783-800).

Étant

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$
$$(a \leqq t \leqq b)$$

une courbe rectifiable et l sa longueur, l'*intégrale* (dans le sens de Lebesgue)

$$\int_E \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt,$$

étendue au groupe E des points où les x', y', z' existent et sont finies, existe toujours et a une valeur $\leqq l$.

Si les x, y, z sont absolument continues, cette intégrale est égale à l. Cette continuité absolue de x, y, z est aussi une condition nécessaire.

Guidi (*C.*) [T 2 *b*]. — Contribution à la théorie des arcs élastiques. (809-816).

Bertini (*E.*) et *Severi* (*F.*) [Q 2 ref. M_1 2 *c*]. — Observations sur le *Restsatz* pour une courbe de l'hyperespace. (847-855).

M. Castelnuovo appelle *adjointe* à une courbe irréductible C d'un espace S_r, une hypersurface qui en tout point s-uple de C se comporte comme le cône qui projette d'un S_{r-3} général une courbe adjointe à la projection plane de C, et démontrent que les hypersurfaces adjointes d'ordre suffisamment élevé donnent sur C une série complète non spéciale. De ce théorème, M. Bertini déduit que, sur une courbe qui est l'intersection complète de $r-1$ hypersurfaces, les hypersurfaces adjointes d'un même ordre quelconque donnent une série complète. De là le *Restsartz* pour ce cas.

Lorsque C n'est pas une intersection complète, on peut y faire passer $r-1$ hypersurfaces de manière que l'intersection résiduelle C' n'ait aucune partie multiple. Alors les hypersurfaces de même ordre suffisamment élevé, adjointes à C et passant par C', donnent encore une série complète sur C, dans le cas où C' est aussi irréductible et où C et C' sont dépourvues de points multiples; mais M. Bertini dit qu'il reste à décider si cela a lieu en général.

M. Severi répond affirmativement à cette dernière question, ce qui assure le *Restsatz* pour tous les cas.

Sacco (*G.*) [T 3 *b*]. — Aberrations et réflexions nuisibles produites par les filtres de lumière dans les appareils photographiques. Note II. (856-874).

La Note I est dans ce Tome, p. 767.

Gatti (*E.*) [T 3 *a*]. — Segments correspondant à des images réelles dans certains systèmes dioptriques centrés. (874-889, 1 planche).

Panetti (*M.*) [T 2 *b*]. — Sur la déformation des solides élastiques prismatiques, produite par l'effort de tranche. (960-972).

Fano (*G.*) [Q 2 ref. M_2 8]. — Sur certaines variétés algébriques à trois dimensions ayant tous les genres nuls. (973-984).

Pour les variétés à trois dimensions, l'annulation de tous les genres n'est pas une condition suffisante pour la rationalité, c'est-à-dire pour qu'elles soient représentables sur l'espace S_3. L'auteur établit ce fait pour les deux variétés suivantes :

1° La variété générale du quatrième ordre V^4 de S_4 ;

2° La variété M_3^6 intersection générale d'une quadrique et une variété cubique de S_5.

Segre (*C.*) [M_2 9 *e*]. — Sur la génération des surfaces admettant un double système conjugué de cônes circonscrits. (985-997).

Les points de ces surfaces sont donnés par les coordonnées homogènes

$$x_i = f_i(u) + g_i(v),$$

et l'on a la construction suivante :

On prend sur un cône deux courbes A, B, et sur un autre cône, ayant même sommet, deux autres courbes C, D. Étant *a*, *b* deux points homologues des premières, et *c*, *d* deux points homologues des secondes, le lieu du point *ac*, *bd* est une des surfaces mentionnées.

Propriétés de ces surfaces ; en particulier de celles sur lesquelles les courbes de contact des cônes circonscrits forment deux systèmes conjugués de courbes planes. Dans cette dernière catégorie rentrent la cyclide de Dupin et la surface romaine de Steiner.

Sforza (*G.*) [Q 1, 2]. — Sur quelques points de l'extensimétrie non euclidienne. (1047-1053).

Dans l'espace de courbure constante $K \gtrless 0$, le volume P_z du tétraèdre normal, deux fois asymptotique, à dièdre latéral z, est donné par

$$P_z = \frac{1}{2iK^{\frac{3}{2}}} \int_z^{\pi} \log 2 \sin z \, dz.$$

Pour z réel et compris entre 0 et π, on a le développement

$$P_z = \frac{1}{4iK^{\frac{3}{2}}} \sum_1^{\infty} \frac{\sin 2nz}{n^2}.$$

Tout tétraèdre est composé par des tétraèdres normaux biasymptotiques, mais comme ils peuvent être imaginaires, et ils le sont nécessairement dans le cas elliptique, l'auteur donne un développement de P_z pour des valeurs complexes $z = x + iy$. Il trouve pour $y = 0$

$$K^{\frac{3}{2}} P_z = \frac{1}{4}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\sum_1^{\infty} \frac{-(-1)^n - e^{-2nz}}{n^2},$$

et pour $y \geqq 0$

$$K^{\frac{3}{2}} P_z = -\frac{1}{4}\left(z + \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n - e^{2niz}}{n^2}.$$

Laura (*E.*) [P 6 *e*]. — Sur les transformations de contact qui sont transformées en elles-mêmes par le groupe des rotations autour d'un point. (1053-1070).

Ces transformations sont toutes contenues dans les équations

$$x' = x f_1(\rho, \lambda) - \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} f_2(\rho, \lambda),$$

$$y' = y f_1(\rho, \lambda) - \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} f_2(\rho, \lambda),$$

$$z' = z f_1(\rho, \lambda) - \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} f_2(\rho, \lambda),$$

où

$$\lambda = \frac{px + qy - z}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\rho = x^2 + y^2 + z^2,$$

et les fonctions f_1, f_2 doivent satisfaire à l'équation

$$f_1(\lambda, \rho)\left(\lambda \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} - \frac{\partial f_2}{\partial \lambda}\right) + 2 f_2(\lambda, \rho)\left(\lambda \frac{\partial f_1}{\partial \rho} - \frac{\partial f_2}{\partial \rho}\right) - 2 \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\lambda, \rho)}(\rho - \lambda^2) = 0.$$

Ce groupe est formé par les transformations par rayons vecteurs, celles par polarité par rapport à une sphère de rayon quelconque et ayant pour centre le point fixe et celles de contact dont l'unique équation génératrice est

$$xx' + yy' + zz' = F(x^2 + y^2 + z^2, x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Burali-Forti (*C.*) [B 12 *c*, *d*]. — Les quaternions de Hamilton et le calcul vectoriel. (1146-1164).

L'auteur obtient les quaternions au moyen du calcul vectoriel, en donnant la définition suivante d'un quaternion :

On dit que α est un quaternion lorsque, α étant un opérateur pour les vecteurs, il existe au moins un nombre réel s et un vecteur u tels qu'on ait pour tout vecteur x normal à u

$$\alpha x = sx + u \wedge x.$$

[La notation αx est ici employée au lieu de $\alpha(x)$.]

Il donne aussi par la même voie les définitions et les propriétés relatives aux opérations sur les quaternions : en particulier il insiste sur la nécessité de conserver les deux opérateurs de Hamilton I, I^{-1}, abandonnés ensuite à cause d'une confusion que l'on a faite entre *quaternion droit* et *vecteur*.

S. R.

DET KONGELIGE DANSKE VIDENSKABERNES SELRKABS SKRIFTER, NATURVIDENSKABELIG OG MATHEMETISK AFDELING (1).

Cinquième série : Tome XII.

Thiele (*T.-N.*). — Sur l'application de la méthode des moindres carrés à quelques cas où une complication de certaines espèces de sources d'erreurs fortuites et de différente nature donne aux erreurs un caractère systématique, 1880. (28 p. en danois).

Sixième série : Tome I.

Steen (*A.*) — Intégration d'une équation différentielle linéaire du second ordre, 1882. (15 p. en danois).

Tome II.

Gram (*J.-P.*). — Recherche sur la multitude de nombres premiers au-dessous d'une limite donnée, 1884 (106 p. en danois, 19 p. en français) (2).

Thiele (*T.-N.*). — Sur les définitions du nombre, des espèces de nombres et des déterminations semblables aux nombres, 1886. (64 p. en danois).

Examen des principes fondamentaux du calcul numérique et du calcul symbolique.

---

(1) Mémoires de l'Académie royale des Sciences et des Lettres de Danemark, section des Sciences. Voir *Bulletin*, I_2, p. 194.

(2) Une analyse de ce Mémoire se trouve dans le *Bulletin* IX_2, première Partie, p. 155.

2de partie.

Tome III.

Zeuthen (*H.-G.*). — La théorie des coniques dans l'antiquité, 1885. (314 p. en danois) (¹).

Valentiner (*H.*). — La théorie des groupes finis de transformations, 1889. (142 p. en danois, 31 p. en français).

Ce Mémoire traite des groupes finis de transformations linéaires et contient la détermination algébrique de tous les groupes de transformations d'une droite en elle-même et d'un plan en lui-même.

Les premiers avaient été trouvés sous une forme plus géométrique par M. Klein; quant aux autres, on sait que les groupes trouvés par M. Valentiner ont été plus tard l'objet ou le point de départ de recherches d'autres auteurs.

Lorentz (*L.*). — Recherches analytiques sur les multitudes des nombres premiers, 1891. (24 p. en danois).

L'auteur prend pour point de départ la fonction $\vartheta(x)$ de Riemann, cherche à en déterminer analytiquement la partie non périodique aussi exactement que possible et à en déterminer la partie périodique par des séries dans lesquelles les termes du plus haut degré par rapport à x prennent le premier rang.

Tome VII.

Gram (*J.-P.*). — Études de quelques fonctions numériques, 1890. (28 p. en danois, 6 p. en français).

Le but de l'auteur a été d'éprouver jusqu'à quel point on peut pousser les recherches des fonctions numériques en renonçant à l'aide de la théorie analytique des nombres. Pour objet de cet essai il choisit le dénombrement des nombres composés de peu de facteurs premiers, par exemple 2, 3, 5, ..., et recherche : 1° combien il existe de ces nombres composés au-dessous d'une certaine limite n; 2° quelle est la somme des nombres λ de Liouville qui y correspondent $[\lambda(2^\alpha, 3^\beta, 5^\gamma, \ldots) = -1^{\alpha+\beta+\gamma\cdots}]$. Les fonctions exprimant le résultat de ces opérations sont appelées $N_{2,3,5,\ldots}(n)$ et $L_{2,3,5,\ldots}(n)$.

L'auteur commence par établir plusieurs théorèmes sur les diviseurs d'un nombre donné et certaines fonctions numériques de ces diviseurs, par exemple les suivants :

$$\Sigma\mu(d)(\log d)^t = (-1)^t.1.2\ldots t.\log a \log b \log c\ldots,$$

$$\Sigma\mu(d)(\log d)^s = 0$$

$$(s \text{ entier et } < t).$$

(¹) Le *Bulletin* X_2, première Partie, p. 263, contient une analyse du Livre qui est la traduction en allemand de ce Mémoire.

où l est le nombre des facteurs premiers différents $a, b, c, \ldots$, du nombre donné n; d un diviseur quelconque de ce nombre, $\mu(d)$ le nombre de Möbius correspondant à d, et où les sommes s'étendent à tous les diviseurs d.

Aux recherches sur la fonction $N(n)$ s'appliquent les propriétés suivantes : celle de satisfaire à l'équation fonctionnelle

$$F(n) - \Sigma F\left(\frac{n}{a}\right) + \Sigma F\left(\frac{n}{ab}\right) - \Sigma F\left(\frac{n}{abc}\right) + \ldots = 1,$$

où $a, b, c, \ldots$ sont les facteurs premiers de n, et celle qu'exprime l'équation

$$N_a(n) = E\left(\frac{\log n}{\log a}\right) + 1.$$

On en déduit : *soit* des résultats particuliers tels que

$$N_{2,3}(\sqrt{2^\alpha 3^\beta}) = E\,\frac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1) + 1,$$

et si 2^α et 3^β sont des puissances successives de 2 et 3, ordonnées suivant leur grandeur,

$$N_{2,3}(2^\alpha) + N_{2,3}(3^\beta) = (\alpha+1)(\beta+1) + 1;$$

soit des formules de récursion générales, passablement faciles à appliquer au calcul de $N(n)$ dans les cas où n ne contient qu'un petit nombre de facteurs premiers différents.

Le résultat le plus remarquable est le fait que l'équation fonctionnelle que nous venons de citer est aussi satisfaite par les polynomes algébriques en $\log(n)$ dont le degré est au plus égal au nombre des facteurs premiers différents $a, b, c, \ldots$. L'auteur en profite pour déduire une formule approchée, qui a, pour deux facteurs premiers a, b, la forme suivante :

$$N_{ab}(n) = \frac{1}{2}\,\frac{(\log n)^2}{\log a \log b} + \frac{1}{2}\,\frac{\log ab}{\log a \log b}\log n + \frac{1}{12}\,\frac{(\log ab)^2 + \log a \log b}{\log a \log b},$$

qui permet un calcul très précis de N.

De semblables méthodes sont appliquées à l'étude de la fonction $L(n)$. Il s'est montré qu'elle oscille autour de zéro, et l'auteur indique pour la grandeur des différences une limite, mais trouve vraisemblable qu'elle soit loin d'être atteinte.

Tome VIII.

Buchwaldt (*F.*). — Les liquides et leurs vapeurs peuvent-ils avoir une équation commune relative à leur état? Étude mathématique basée sur une exposition succincte de la théorie mathématique de la chaleur, 1896. (64 p. en danois, 6 p. en français).

Nielsen (*N.*). — Recherche sur les sommes de puissances réciproques et leur application à des séries et à des intégrales, 1898. (49 p. en danois).

L'auteur résume et achève ses recherches sur une question dont il s'était déjà occupé dans deux Mémoires insérés aux *Oversigt* de l'Académie. Il s'agit avant tout d'expliquer une différence qui a lieu entre les sommes Σn^{-s} suivant que l'exposant entier s est pair ou impair. Dans le premier cas la somme peut être exprimée comme le produit d'un nombre rationnel et de π, tandis que dans le dernier on ne connaît aucune expression semblable.

Tome X.

Juel (C.). — Introduction à la théorie des courbes graphiques, 1899. (75 p. en danois, 15 p. en français).

Une partie des recherches sur la figure des branches d'une courbe algébrique de l'ordre n résulte exclusivement de la propriété qu'elles sont fermées et qu'elles rencontrent une droite *au plus* en n points. En prenant ces propriétés pour définition d'une courbe graphique d'ordre n, l'auteur compose une théorie utile à la fois pour l'étude des courbes algébriques, et pour notre connaissance générale des formes de trajets dans le plan, produits d'une manière quelconque. L'auteur donne un aperçu complet sur les courbes graphiques des ordres 2, 3, 4. Ses résultats ne sont pas le fruit de vagues intuitions, mais ils sont fondés sur des conclusions exactes. A cet effet, il démontre et fait usage du « principe graphique de correspondance » que voici : Si sur une même ligne fermée on suppose, entre des points X et Y, une correspondance telle qu'à chaque point X correspondent q points Y et qu'à chaque point Y correspondent p points X ; si, en outre, deux points X (ou Y) correspondant à un même point Y (ou X) ne peuvent jamais coïncider; si, troisièmement, les deux sens correspondants sont contraires, alors on aura $p+q$ points correspondants qui se confondront.

Septième série : Tome I.

Juel (C.). — Sur des courbes non analytiques, 1906. (61 p. en danois).

Malgré l'altération du nom à laquelle correspond une variation du point de vue, ce travail est une continuation du Mémoire sur les courbes graphiques dans le Tome X de la 6e série. Après quelques suppléments aux résultats qui y étaient obtenus, l'auteur commence une étude semblable des courbes gauches non analytiques : courbes gauches du troisième et du quatrième ordre, en particulier celles qui se trouvent sur un hyperboloïde gauche et courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre sur un hyperboloïde qui rencontrent les génératrices d'une série en $n-1$ points. Enfin il aborde la question de l'existence de courbes planes non analytiques qui rencontrent un cercle en 4 points au plus.

Tome II.

Nielsen (N.). — Recherches sur une classe de fonctions méromorphes, 1904. (44 p. en français).

Dans un Mémoire inséré aux *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. XIX [1], l'auteur avait appliqué l'intégrale

$$\int_0^1 \varphi(z)\, z^{x-1}\, dz,$$

où la fonction $\varphi(z)$, du reste arbitraire, est soumise à certaines conditions, au développement d'une fonction en une série suivant des factorielles. Ici il s'occupe encore de l'application de la même intégrale au développement de fonctions en séries de la forme

$$F_n(x) = \sum_0 \frac{n!\, A_{s,n}}{(x+s)(x+s+1)\ldots(x+s+n)}.$$

Un des résultats remarquables auxquels parvient l'auteur, c'est que ni le quotient différentiel ni l'intégrale d'une fonction développable en une série de cette forme ne se laisse développer en une série semblable.

Nielsen (*N.*). — Recherches sur les fonctions sphériques, 1906. (57 p. en français).

L'auteur définit les fonctions métasphériques au moyen d'une équation aux différences finies et d'une équation différentielle plus générale que celles qui servent ordinairement à définir les fonctions sphériques, et réunit ainsi la déduction des propriétés communes aux différentes espèces de fonctions sphériques.

Tome V.

Nielsen (*N.*). — Recherches sur quelques généralisations d'une identité intégrale d'Abel, 1907. (36 p. en français).

L'auteur obtient, au moyen de transformations trigonométriques de l'identité trouvée par Abel

$$f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{f'(z)\, dz}{(a-z)^n},$$

plusieurs formules qu'il applique ensuite à la transformation de différentes séries. De cette façon il obtient, par exemple, des généralisations de théorèmes contenus dans son *Handbuch der Theorie der Zylinderfunctionen*.

Tome VI.

Hansen (*C.*). — Recherches sur les singularités de certaines séries spéciales sur leur cercle de convergence, 1908. (37 p. en français).

(1) *Bulletin*, 1903, p. 133.

Les séries dont s'occupe l'auteur sont la série de Lambert

$$L(s), \qquad \varphi(s) = L(s) - 2L(s^2)$$

et une série de Weierstrass comprise comme elles dans l'expression

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{rn+t}}{1 - s^{rn+t}}.$$

Il en trouve des expressions asymptotiques correspondant au cas où s s'approche des points du cercle d'unité déterminé par les racines primitives de l'équation $x^m = 1$.

H. Z.

NYT TIDSSKRIFT FOR MATHEMATIK, B, rédigé par P.-T. FOLDBERG et C. JUEL (1890-1898), et ensuite par C. JUEL et V. TRIER ([1]).

Tome I; 1890.

Zeuthen (H.-G.). — Sur la transformation d'équations différentielles à deux variables par l'introduction de coordonnées linéaires. (1-10).

Juel (C.). — Problèmes qui ont un nombre infini de solutions. (11-23).

Foldberg (P.-J.). — Intégration de quotients différentiels exacts, de la forme $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$. (23-27).

Thiele (T.-V.). — Un héritage d'Oppermann (33-39).

Il s'agit d'une règle simple pour exprimer, avec une convergence excellente, une racine d'ordre quelconque par une fraction rationnelle.

Lorenz (L.). — Le système des circonscriptions électorales et la minorité. (40-48).

Seidelin (C.). — Sur la représentation axonométrique. (49-55).

([1]) Continuation du *Tidsskrift for Mathematik* (voir *Bulletin*, XIV_2, p. 44). La Section A contient seulement des articles sur les Mathématiques élémentaires. Les articles sont en danois (ou suédois), à l'exception de ceux dont la langue est indiquée expressément.

Thiele (*T.-N.*). — Sur le problème des circonscriptions électorales. (56-63).

Zeuthen (*H.-G.*). — Nouvelle démonstration de l'existence d'une racine d'une équation algébrique. (45-47).

Zeuthen (*H.-G.*). — Résolution et généralisation de la question suivante : Trouver sur une surface sphérique une courbe de curvature constante. (67-76).

Lorenz (*L.*). — Sur un facteur discontinu (76-79).

Lindhagen (*A.*). — Sur la direction moyenne d'une ligne brisée ou d'une courbe dans le plan. (80-82).

Tome II; 1891.

Jensen (*J.-L.-W.-V.*). — Généralisation d'un théorème de Tchebycheff. (1-3).

Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1888, p. 134.

Juel (*C.*). — Note à une construction de Newton. (3-6).

La construction de Newton se trouve aux *Principia*, I, lemme XXII.

Juel (*C.*). — Démonstration géométrique du théorème de Viviani. (6-8).

Jensen (*J.-L.-W.-V.*). — La théorie de la fonction gamma exposée d'une manière élémentaire. (33-35, 57-72, 83-85).

Bang (*A.-S.*). — Sur les nombres premiers de certaines formes déterminées. (73-82).

Tome III; 1892.

Brunn (*J.-B.*). — Calcul approximatif des racines réelles de l'équation logarithmique du premier degré. (1-10).

Juel (*C.*). — Étude sur une transformation de Laguerre. (10-24).

Valentiner (*H.*). — Sur la construction des courbes du troisième

et du quatrième ordre, déterminées par 9 ou 14 de leurs points. (33-48).

Gram (*J.-P.*). — Sur l'équation indéterminée du premier degré. (57-71, 73-85).

Guldberg (*A.*). — Sur les singularités des équations différentielles du premier ordre. (86-91).

Nielsen (*N.*). — Quelques propriétés des nombres naturels. (91-94).

Tome IV; 1893.

Nielsen (*N.*). — Sur les sommes de puissances des nombres naturels. (1-10).

Heumann (*C.*). — Démonstration d'un théorème appartenant aux applications géométriques du calcul des probabilités. (25-29).

Nielsen (*N.*). — La valeur limite de $\sqrt[n]{n}$ pour $n = \infty$. (29-30).

Nielsen (*H.-P.*). Sur les courbes non composées du quatrième ordre qu'une rotation de 120° fait coïncider avec elles-mêmes. (30-34).

Bang (*A.-S.*). — Sur une équation du troisième degré. (57-59).

Iversen (*J.-M.*). — Quelques propriétés des courbes planes représentées par des équations de la forme $\left(\frac{r}{a}\right)^n = \sin n\theta$, où n est un nombre entier, positif ou négatif. (59-67).

Zeuthen (*H.-G.*). — Remarques sur la détermination des asymptotes de courbes déterminées par une équation différentielle du premier ordre. (73-77).

Wythoff (*W.-A.*). — Nouvelles démonstrations d'un théorème de probabilité. (77-81).

Nielsen (*N.*). — Une intégrale double. (81-82).

Nielsen (*N.*). — Un théorème sur les fonctions circulaires. (82-83).

Tome V; 1894.

Hermite (*Ch.*). — Sur les polynomes entiers à une variable. (1-4, en français).

Meyer (*A.*). — Systèmes d'équations du premier degré. (4-17).

Wiman (*A.*). — Sur les points d'inflexion des courbes planes du troisième ordre. (17-22).

Nielsen (*N.*). — Sur log 2 et la série $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} \cdots$. (22-25).

Cavallin (*C.-B.-S.*). — Déduction de quelques formules dans la théorie des nombres. (33-38).

Iversen (*J.-M.*). — Remarques sur l'équation d'une conique. (38-40).

Crone (*C.*). — Quelques modèles cinématiques. (57-62).

Christensen (*A.-A.*) (l'auteur a pris plus tard le nom de *Björnbo*). — Sur la quadrature du cercle dans l'antiquité grecque. (63-67).

Meyer (*A.*). — La longueur de la circonférence et l'aire du cercle. (68-72).

Meyer (*A.*). — Suites d'approximations, I (introduction à un cours d'Analyse). (81-92).

Bang (*A.-S.*). — Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité. (92-95).

Tome VI; 1895.

Guldberg (*A.*). — Sur la détermination des lignes géodésiques de quelques surfaces particulières. (1-6).

Bang (*A.-S.*). — Sur l'équation $\varphi_n(x) = 0$. (6-12).

Juel (*C.*). — Sur les polyèdres qui sont égaux à leurs images dans

un miroir plan sans être composés de deux moitiés symétriques. (12-15).

Meyer (*A.*). — Suites d'approximations, II (41-52), III (73-83).

Christensen (*A.-A.*). — Sur la quadrature du cercle dans l'antiquité grecque, II (52-56, 84-89).

Petersen (*Joh.*) (l'auteur a pris plus tard le nom de *Hjelmslev*). — Sur le problème d'inscrire une sphère à un quadrilatère gauche. (56-64).

Juel (*C.*). — Note sur la définition d'une intégrale définie. (64-67).

Tome VII; 1896.

Guldberg (*A.*) — Note sur les équations différentielles du second ordre. (1-6).

Juel (*C.*). — Sur la définition du point dans la Géométrie. (7-10).

Madsen (*V.-H.-O.*). — Sur la résolution graphique d'équations. (25-27).

Nielsen (*N.*). — Une définition de $\mathrm{L}i\,e^{-x}$. (27-29).

Nielsen (*N.*). — Une propriété des nombres naturels. (25-31).

Störmer (*C.*). — Sur une propriété des solutions de l'équation de Pell. (49-52).

Kierboe (*T.*). — Construction linéaire du neuvième point d'intersection de deux courbes du troisième ordre qui passent par 8 points donnés. (53-59).

Nielsen (*N.*). — Une formule relative à certains déterminants. (59-62).

Nielsen (*N.*). — Sommation de quelques séries élémentaires. (63-66).

Crone (*C.*). — Sur les coniques dont les tangentes rencontrent une courbe du quatrième ordre en des points qu'on peut construire au moyen du compas et de la règle. (84-94).

Tome VIII; 1897.

Schou (*E.*). — Sommation d'une série infinie. (1-5).

Schou (*E.*). — Démonstration d'un théorème de M. Hadamard. (5-6).

Nielsen (*N.*) — Quelques relations entre les nombres naturels. (7-10).

Nielsen (*N.*). — Série exprimant la constante d'Euler. (10-12).

Jensen (*J.-L.-W.-V.*). — Sur la solution d'équations fonctionnelles lorsque les hypothèses faites sur la nature des fonctions à déterminer sont réduites à un minimum. (25-28).

Juel (*C.*). — Construction des tangentes à une courbe gauche du quatrième ordre en un point double. (28-31).

Juel (*C.*). — Sur la détermination des aires et des volumes. (44-59).

Zeuthen (*H.-G.*). — Remarques sur le théorème fondamental de la Géométrie projective. (73-85).

Nielsen (*H.-P.*). — Différences finies et quotients différentiels. (86-89).

Tome IX; 1898.

Petersen (*Joh.*) [Hjelmslev]. — Théorèmes sur les figures égales. (1-11).

Gehrke (*J.*). — Quelques propriétés d'un système de cercles. (11-15).

Valentiner (*H.*). — Une formule relative à un déterminant. (15-16).

Bonnesen (*T.*). — Système de coniques ayant des contacts doubles avec deux coniques fixes. (25-36).

Valentiner (*H.*). — Sur la solution des équations du quatrième degré. (36-39).

Petersen (*Joh.*) [Hjelmslev]. — La géométrie de la figure trilinéaire dans l'espace. (49-65).

Hatzidakis (*N.-J.*). — Note sur une nouvelle formule de géométrie différentielle. (66-68).

Nielsen (*N.*). — Développement suivant des fonctions cylindriques. (73-83).

Bertelsen (*B.-P.*). — Sur l'application de substitutions additionnelles dans les équations algébriques. (84-94).

Tome X; 1899.

Bonnesen (*T.*). — Constructions géométriques sur la surface d'une sphère. (1-13, 25-35).

Guldberg (*A.*). — Note sur les équations linéaires aux différentielles totales. (13-15).

Lindhagen (*A.*). — Sur une classe d'équations différentielles. (35-39).

Petersen (*Joh.*) [Hjelmslev]. — Construction de la ligne de striction d'un hyperboloïde gauche.

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur une espèce de démonstrations énumératives dans la Géométrie. (49-51).

Valentiner (*H.*). — Sur les courbes hyperelliptiques. (51-60).

Petrini (*H.*). — Note sur le théorème de Coriolis. (60-62).

Werenskjold (*W.*). — Un calcul approximatif. (62-65).

Nielsen (*N.*). — Développements multiformes suivant des fonctions cylindriques. (73-81).

Guldberg (*A.*). — Note sur les équations aux dérivées partielles du second ordre de la forme $F(r, s, t) = 0$. (82-85).

Hansen (*Chr.*). — Sur l'attraction des masses. (85-90).

Tome XI; 1900.

Petrini (*H.*). — Les équations générales du mouvement d'un corps solide par rapport à des axes variables. (1-6).

Bonnesen (*T.*). — Remarques sur un théorème fondamental de la Géométrie plane. (25-32).

Guldberg (*A.*). — Un théorème sur les équations aux différentielles totales qui sont intégrables. (33-34).

Jörgensen (*N.*). — Une intégrale exprimant $\frac{1}{\Gamma(\mu)}$. (34-40).

Danielsson (*O.*). — Démonstration projective des contacts du cercle à neuf points. (41-42).

Zeuthen (*H.-G.*). — Étude historique et géométrique des constructions de tangentes dues à Descartes. (49-58).

Hansen (*Chr.*). — Sur les rentes viagères à payer m fois par an. (58-68).

Nielsen (*N.*). — Sur certaines généralisations de la fonction $P(x)$ de Prym. (73-77).

Petersen (*Joh.*) [Hjelmslev]. — Les théorèmes sur l'égalité de triangles sphériques. (77-80).

Tome XII; 1901.

Petersen (*Joh.*) [Hjelmslev]. — Sur la définition du plan. (1-11).

Mollerup (*J.*). — Constructions sans cercles. (12-20).

Petersen (*Jul.*). — Introduction à la Mécanique rationnelle. (25-33).

Bonnesen (*T.*). — Démonstration d'un théorème sur les surfaces applicables. (33-37).

Petersen (*Joh.*) [Hjelmslev]. — Connexion entre la géométrie des droites et la géométrie sphérique. (37-40).

Guldberg (*A.*). — Note sur les courbes géodésiques d'une surface donnée. (40-42).

Hatzidakis (*N.-J.*). — Sur l'axe central du trièdre principal d'une courbe. (49-53).

Petersen (*Joh.*) [Hjelmslev]. — Contribution à un exposé synthétique de la géométrie non euclidienne. (53-70, 73-89).

Lindhagen (*A.*). — Sur la méthode d'approximation due à Newton. (89-92).

Tome XIII; 1902.

Thiele (*T.-N.*). — Méthode pour le calcul approché d'une racine. (1-4).

Petrini (*H.*). — Contribution à la trisection de l'angle. (5-6).

Petersen (*Joh.*) [Hjelmslev]. — Contribution à un exposé synthétique de la géométrie non euclidienne, II. (25-47).

Hatzidakis (*N.-J.*). — Sur quelques conséquences des formules de Frenet et Brunel. (49-58, 73-80).

Madsen (*N.*). — Intégration de quelques équations linéaires aux dérivées partielles. (59-63).

Kragh (*O.*). — Remarque à l'occasion d'une formule d'Hermite. (80-83).

Tome XIV; 1903.

Kobbernagel (*P.*). — Une propriété focale des cyclides. (1-11).

Thiele (*T.-N.*). — Un problème dans le calcul des probabilités. (11-15).

Petersen (*Joh.*) [Hjelmslev]. — Une démonstration du théorème de Pascal. (15-16).

Petersen (*Joh.*) [Hjelmslev]. — La trigonométrie dans le plan non euclidien. (29-41).

Juel (*C.*). — Sur deux polyèdres qui se composent d'un nombre fini de polyèdres égaux. (53-63).

Nielsen (*N.*). — Note sur l'équation du troisième degré. (64-67).

Hatzidakis (*N.-J.*). — Sur les invariants de courbure des courbes gauches. (77-82).

Steffensen (*J.-F.*) *et Bertelsen* (*N.-P.*). — La détermination du taux d'une annuité. (82-85).

Tome XV; 1904.

Juel (*C.*). — Sur les coniques quatre fois tangentes à une courbe du quatrième ordre à trois points doubles. (1-5).

Gehrke (*J.*). — Sur l'application de l'équation $f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ au mouvement d'un système invariable. (5-10).

Guldberg (*A.*). — Sur les équations linéaires et homogènes aux différences finies. (25-28).

Kierboe (*T.*). — Groupes de transformations linéaires et homogènes qui ne contiennent qu'un seul paramètre. (28-36).

Nörregaard (*H.-F.*). — Note sur l'équation différentielle d'une courbe algébrique. (36-38).

Olsson (*O.*). — Sur le mouvement d'un point matériel sur une surface de rotation. (49-66).

Madsen (*V.-H.-O.*). — Démonstration d'un théorème géométrique de C. Neumann. (66-68).

Crone (*C.*). — Sur le volume du prismatoïde. (73-75).

Guldberg (*A.*) — Sur les équations aux différences finies du second ordre. (75-81).

Tome XVI; 1905.

Groth (*Th.*). — Sur la décomposition d'expressions linéaires et homogènes par rapport à des différences finies. (1-6).

Juel (*C.*). — Note sur une démonstration directe et élémentaire du théorème fondamental de la théorie des groupes dans le cas de deux paramètres. (6-15).

Mollerup (*J.*). — Une théorie arithmétique des nombres complexes. (25-31).

Madsen (*V.-H.-O.*). — Note sur les nombres à trois dimensions. (31-35).

Bang (*A.*). — Nouvelle démonstration de l'impossibilité de solutions rationnelles de l'équation $x^4 - z^4 = y^4$. (35-36).

Jensen (*J.-L.-W.-V.*). — Sur les fonctions convexes et sur des inégalités de valeurs moyennes. (49-68).

Juel (*C.*). — Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Kommerell. (69-70).

Hjelmslev (*Joh.*) [ci-devant *Petersen*]. — Sur des domaines convexes. (81-97).

Tome XVII; 1906.

Olsson (*O.*). — Sur le mouvement de corps symétriquement hélicoïdaux soumis à la pesanteur autour d'un point fixe de l'axe. (1-18, 25-29).

Smith (*O.-A.*). — Sur quelques intégrales définies. (29-32).

Madsen (*V.*). — Deux problèmes de Pascal relatifs à la cycloïde. (49-58).

Erlang (*A.-K.*). — Note sur le principe de correspondance graphique. (58-60).

Steffensen (*J.-F.*). — Une série applicable à toute détermination du taux d'une annuité. (73-77).

Mollerup (*J.*). — Théorème sur le continuum. (77-84).

Tome XVIII; 1907.

Hjelmslev (*J.*). — Sur la congruence et la symétrie. (1-17).

Steffensen (*J.-F.*). — Sur l'intégration du problème restreint. (25-32; en français).

Nielsen (*N.*). — Sur la construction de globes terrestres. (32-37).

Hjelmslev (*J.*). — Sur les principes de la théorie des courbes simples. (49-70).

Madsen (*V.-H.-O.*). — Nombres exprimant des forces et des rotations. (70-82).

Tome XIX; 1908.

Störmer (*C.*). — Solution d'un problème curieux qu'on rencontre dans la théorie élémentaire des logarithmes. (1-7; en français).

Crone (*C.*). — Sur quelques systèmes articulés. (7-15).

Jörgensen (*N.-R.*). — Sur quelques expressions intégrales de $\log \Gamma(x)$ et de $\Psi(x)$. (15-22).

Hatzidakis (*N.*). — Sur quelques formules dans la théorie des normales des surfaces. (25-36).

Gehrke (*J.*). — Remarques sur les mouvements de fluides non homogènes. (49-63).

Kragh (*O.*). — Sur un mouvement particulier d'un fil flexible dans un plan fixe. (73-96).

Tome XX; 1909.

Bohr (*H.*). — Généralisation d'un théorème de convergence connu. (1-4).

Prytz (*H.*). — Une modification de la formule de Simpson. (4-5).

Nörlund (*N.-E.*). — Note sur une fraction continue montante. (25-29).

Iversen (*J.*). — Constructions relatives à des courbes du deuxième et du troisième ordre. (29-33).

Erlang (*A.-K.*). — Le calcul des probabilités appliqué aux conversations par téléphone. (33-39).

Juel (*C.*). — Note sur une surface de rotation non analytique. (41-46).

Mollerup (*J.*). — Équations linéaires. (47-53).

Birkeland (*R.*). — Sur des intégrales irrégulières d'équations différentielles linéaires. (73).

Grauers (*H.*). — Remarque sur la théorie des chocs. (77-87).

Steffensen (*J.-F.*). — Note à un théorème dans le Traité d'Analyse. (87-90).

Le *Nyt Tidsskrift* contient encore des analyses de Livres parus, des questions à résoudre, des solutions et des questions posées aux examens.

H. Z.

OVERSIGT OVER DET KONGELIGE DANSKE VIDENSKABERSNES SELSKABS FORHANDLINGER [1].

Année 1889.

Thiele (*T.-N.*). — Quel nombre serait à préférer comme base de notre système de numération? (25-42, en français).

L'auteur donne la préférence à 4 (16).

Année 1890.

Crone (*C.*). — Sur le flux et le reflux à Copenhague. (39-113, en danois).

---

[1] *Bulletin de l'Académie royale des Sciences et des Lettres de Danemark* (voir *Bulletin*, XIV_2, p. 43). Il sera indiqué ici quels Mémoires sont rédigés en danois et en français.

Thiele (*T.-N.*). — Remarques sur la Cosmogonie de Laplace. (340-356, en danois).

Année 1892.

Thiele (*T.-N.*). — Application des calculs de la théorie des observations aux déterminations, faites par Jul. Thomsen, de la chaleur et du poids spécifique de certaines matières. (72-141, en danois).

Année 1893.

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur la résolution numérique d'une équation du 3e degré par Léonard de Pise. (1-17, en français).

Gram (*J.-P.*). — Essai sur la restitution du calcul de Léonard de Pise sur l'équation $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. (18-28, en français).

Zeuthen (*H.-G.*). — Tartalea contre Cardanum; réplique relative à la question de priorité sur la résolution des équations cubiques. (303-330, en français).

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur la signification traditionnelle du mot géométrique. (330-341, en français).

Année 1894.

Zachariae (*G.*). — Remarques sur le mesurage des degrés, son but et ses problèmes. (1-13, en danois).

Jensen (*J.-L.-W.-V.*). — Sur une expression simple du reste dans la formule d'interpolation de Newton. (246-252, en français).

Zachariae (*G.*). — Nivellement de précision; passage du *Petit-Belt* et du *Limfjord*. (253-266, en danois).

Année 1895.

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur les quadratures avant le Calcul intégral et en particulier sur celles de Fermat. (37-80, en français).

Heiberg (*J.-L.*). — La transmission de l'optique d'Euclide. (117-131, en danois).

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur le fondement mathématique de l'invention du Calcul infinitésimal. (193-256, en français).

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur quelques critiques faites de nos jours à Newton. (257-278, en français).

Les Notes historiques de M. Zeuthen dans les années 1893 et 1895 ont été analysées au *Bulletin*, XX_2, p. 24.

Gram (*J.-P.*). — Note sur le calcul de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. (303-308, en français).

Thiele (*T.-N.*). — Sur la théorie des élections multiples et sur quelques règles d'application pratique. (415-441, en danois; XV-XVIII, en français).

Année 1896.

Heiberg (*J.-L.*). — L'histoire de la transmission de la Mathématique grecque. (77-93, en danois).

Zachariae (*G.*). — Note sur les projections des cartes géographiques. (135-149, en danois).

Nielsen (*N.*). — Sur la transformation d'une intégrale définie. (335-347, en français).

Nielsen (*N.*). — Sur la sommation de quelques séries. (348-361, en français).

L'auteur s'occupe dans ces Mémoires des intègrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} p(x\sin^2\varphi)\log\sin\varphi\,d\varphi$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, p(x\sin^2\varphi)\log\sin\varphi\,d\varphi$, où p est un polynome quelconque, et des séries de la forme $\sum_1^n \frac{1}{\nu^p}\frac{e^{\nu\varphi i}}{2^\nu\cos^\nu\varphi}$.

Valentiner (*H.*). — Remarques sur les Mémoires contenus dans le premier fascicule des Œuvres scientifiques de L. Lorenz. (440-445).

Année 1897.

Zachariae (*G.*). — Observations relatives de pendules à Copenhague et dans l'île de Bornholm, avec des mesures de jonction à Vienne et à Potsdam. (139-181, en danois; 182-184, en français).

Nielsen (*N.*) — Solutions uniformes de l'équation

$$f^{\nu}(x) + f^{\nu}(x + \omega) = 1,$$

où ν est rationnel. (185-196, en danois).

Nielsen (*N.*). — Théorème sur les intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log^p \sin 2\varphi \, d\varphi$ et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tang}\varphi \log^p \sin 2\varphi \, d\varphi$. (197-206, en français.)

Gram (*J.-P.*). — Note sur le problème des nombres premiers. (236-251, en français).

Continuation des recherches mentionnées dans le Mémoire analysé au *Bulletin*, IX_2, première Partie, p. 155.

Schou (*E.-S.*). — Mémoire sur les équations différentielles linéaires, intégrables à l'aide de fonctions d'une nature spéciale. (433-488, en français).

L'auteur considère les équations linéaires et homogènes dont les intégrales particulières sont des fonctions construites au moyen d'un nombre fini de superpositions de fonctions appartenant aux deux catégories suivantes :

1° Fonctions algébriques d'un nombre quelconque de variables;

2° Fonctions θ définies par des équations différentielles de la forme

$$\varphi(\theta)\, d\theta = \psi(\upsilon)\, d\upsilon,$$

où $\varphi(\theta)$ et $\psi(\upsilon)$ sont des fonctions algébriques de θ et de υ respectivement. L'auteur indique en particulier pour les équations du deuxième ordre les formes des intégrales exprimables au moyen de ces fonctions.

Zeuthen (*H.-G.*). — Barrow, le maître de Newton. (565-606, en français).

Zeuthen (*H.-G.*). — Présentation de l'Ouvrage : « Essai sur la représentation analytique de la direction », par Caspar Wessel; tra-

duction de son Mémoire, publiée à l'occasion du centenaire de sa présentation à l'Académie, le 10 mars 1797. (26-31, en danois).

Une analyse de l'œuvre de Wessel se trouve au *Bulletin* XXI_2, première Partie, p. 229.

Année 1898.

Zachariae (*G.*). — Nivellement de précision; passage du Grand-Belt. (163-204, en danois, et 205-207 en français).

Valentiner (*H.*). — Remarques sur les Mémoires contenus dans le deuxième fascicule des Œuvres scientifiques de L. Lorenz. (277-282, en français).

Petersen (*Johannes*) [1]. — Nouveau principe pour l'étude de la géométrie des droites. (283-344, en français.)

L'auteur prend le théorème suivant pour base de la géométrie des droites dans l'espace :

« Désignons par A, b, C, a, B, c les côtés d'un hexagone gauche qui n'a que des angles droits (a, b, c, étant les plus courtes distances des droites A, B, C), et traçons sur une sphère au centre O un triangle sphérique tel que OP soit parallèle à A, OQ à B, OR à C : alors, toute relation entre les parties du triangle PQR conduira à une relation entre les parties de l'hexagone gauche (que l'auteur appelle *figure trilinéaire*) : on l'obtient en différentiant la relation sphérique et remplaçant les différentielles par les longueurs correspondantes de la figure trilinéaire. »

L'auteur applique ce principe aux relations métriques de quelques figures élémentaires de droites; à des faisceaux de normales orthoprojectifs (formés des normales à deux droites qui se coupent à angle droit); au conoïde de Plücker; aux réseaux qu'il appelle *harmoniques;* au complexe linéaire et au complexe hélicoïdal de Ball; aux figures qu'il appelle *orthologiques*, et qui sont composées de droites, ainsi qu'à une droite a de l'une correspond une droite a_1 dans l'autre et que les distances entre des droites correspondantes aient une normale fixe n, tandis que la normale commune à la distance entre deux droites de l'une des deux figures et à la distance entre les droites correspondantes de l'autre soit toujours normale à une droite fixe n_1; aux surfaces réglées et congruences répondant aux sections coniques. Il fait enfin quelques applications cinématiques, et forme un système de coordonnées de droites.

Année 1899.

Thiele (*T.-N.*). — Sur les semi-invariants de la théorie des observations. (135-141, en danois).

---

[1] L'auteur a pris plus tard le nom de Hjelmslev.

L'auteur désigne par *semi-invariants* certaines fonctions symétriques des observations réitérées.

Thiele (*T.-N.*). — Quelques résultats spectronomiques. (143-152, en danois).

Développements ultérieurs d'idées émises dans l'*Astrophysical Journal*, août 1897 et juin 1898.

Zachariae (*G.*). — Nivellement de précision; passage du Sound. (491-541, en danois, et 542-544, en français).

Valentiner (*H.*). — Application de la théorie des quaternions de Caspar Wessel à la démonstration d'un théorème récent. (655-659, en français).

L'auteur montre une dépendance entre les quaternions de Caspar Wessel et le théorème fondamental de l'article de M. J. Petersen (Hjelmslev) inséré à la précédente année.

Nielsen (*N.*). — Note sur les développements schlœmilchiens en série de fonctions cylindriques. (661-665, en français).

Exemples de développements conduisant à des séries convergentes dont la somme est égale à zéro pour tous les arguments dans un certain intervalle sans être identiquement égale à zéro. Dans une Note supplémentaire (année 1900), l'auteur a trouvé une expression générale de la somme des mêmes séries.

Année 1900.

Nielsen (*N.*). — Note supplémentaire relative aux développements schlœmilchiens en série de fonctions cylindriques. (55-60, en français).

Thiele (*T.-N.*). — Sur le calcul de Tables de mortalité. (139-142, en danois).

Heiberg (*J.-L.*). — Quelques papyrus traitant de mathématiques. (147-171, en français).

Le premier papyrus reproduit un fragment des Éléments d'Euclide datant du IIIe siècle ou du commencement du IVe siècle; les autres des défenses grecques des principes mathématiques contre les épicuriens.

Petersen (*Joh.*). [Hjelmslev]. — Géométrie des droites dans l'espace non euclidien. (305-330, en français).

L'auteur étend pour les espaces non euclidiens le principe fondamental de sa communication insérée à l'année 1898, qui avait égard à des déplacements infiniment petits, à des déplacements finis.

Année 1901.

Nielsen (*N.*). — Recherches sur une classe de séries infinies analogues à celles de M. Kapteyn. (127-146, en français).

L'auteur généralise les séries que M. Kapteyn a données dans les *Mathematische Annalen*, t. XVI, p. 187, et obtient, de même que dans ses communications insérées aux années 1899 et 1900, des fonctions discontinues qui contiennent aussi un domaine d'invariabilité.

Fredericia (*J.-A.*). — Sur le caractère de Tyge Brahe. (69-83, en danois).

Pechüle (*C.-F.*). — La nouvelle étoile de Tyge Brahe et sa réforme de l'Astronomie. (83-91, en danois).

Ces deux discours ont été prononcés dans une séance solennelle à l'anniversaire triséculaire de la mort de Tycho Brahe.

Année 1902.

Gram (*J.-P.*). — Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. (3-16, en français).

Dans une Note précédente (année 1895), l'auteur avait calculé numériquement les coefficients qui entrent dans la série représentant la fonction $\xi(t)$ et d'autres fonctions ayant rapport à la fonction ζ. Il espérait obtenir ainsi des moyens utiles à une détermination approchée des plus petites racines α de l'équation. $\xi(t) = 0$; mais même un calcul à 22 décimales bien assurées des coefficients de $\log \xi(t)$, dont le résultat se trouve dans la dernière Note, n'a pas suffi pour réaliser ce but. Pour cette raison, l'auteur a entrepris un calcul immédiat des racines α de l'équation $\zeta\left(\frac{1}{2} + \alpha i\right) = 0$ en substituant $s = \frac{1}{2} + ti$ dans la formule

$$\zeta(s) = \sum_{1}^{n} n^{-s} - n^{-s}\left(\frac{n}{1-s} + \frac{1}{2} - \frac{s}{2n}B_1 + \ldots\right)$$

et en calculant directement

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right) = C(t) + i\,S(t)$$

pour des valeurs convenables de t. De cette manière, il est parvenu à déterminer

à 8 décimales les 10 racines α les plus petites et à une décimale les 5 racines suivantes. L'auteur s'occupe ensuite des valeurs β et γ qui satisfont à une seule des équations $C(t) = 0$, $S(t) = 0$, et il paraît que ces quantités, relativement faciles à calculer, soient utiles pour la détermination des intervalles où se trouvent les racines α.

Kroman (*K.*). — Quelques remarques sur les *Lours* (trompes) de bronze conservés au Musée national de Copenhague. (69-95, en français)

Au point de vue mathémathique, l'auteur s'occupe de la production du son dans ces instruments antiques.

Nielsen (*N.*). — Théorie nouvelle des séries asymptotiques obtenues pour les fonctions cylindriques et pour des fonctions analogues. (117-177, en français).

L'auteur se sert des fonctions de Hankel

$$H_1^\nu(x) = J^\nu(x) + i\,Y^\nu(x),$$
$$H_2^\nu(x) = J^\nu(x) - i\,Y^\nu(x),$$

où $J^\nu(x)$ et $Y^\nu(x)$ sont les fonctions cylindriques de la première et de la seconde espèce, soit pour établir un aperçu sur les propriétés des fonctions cylindriques et les équations différentielles auxquelles elles satisfont, soit pour démontrer d'une manière plus simple et généraliser les résultats sur les séries asymptotiques trouvées par Hankel et H. Weber.

Juel (*C.*). — Sur les caustiques planes. (179-190, en français).

Entre les courbes normales aux rayons issus d'un point du plan et réfractés ensuite par une courbe réfringente, il y en a une que l'auteur appelle la *courbe principale des ondes*. Il démontre qu'il y a réciprocité entre elle et la courbe réfringente, abstraction faite d'une transformation de similitude, et en changeant le signe de l'indice de réfraction.

Année 1903.

Juel (*C.*). — Égalité par addition de quelques polyèdres. (47-64, en français).

Égaux par addition sont deux polyèdres composés d'autres polyèdres égaux entre eux par paires (Dehn et Vahlen, dans les *Mathematische Annalen*, t. LV, et t. LVI). L'auteur s'occupe d'exemples de polyèdres qui sont égaux par addition à un cube.

Zachariae (*G.*). — Sur l'erreur moyenne de la mesure relative de pendules. (349-384, en danois; 385-391, en français).

Zeuthen (*H.-G.*). — Présentation de l'Histoire des Mathématiques aux XVIe et XVIIe siècles. (553-572, en danois).

L'auteur rend compte des principes suivis dans ses recherches historiques.

Année 1906.

Hansen (*C.*). — Sur l'excès du nombre des diviseurs de la forme $4n-3$ d'un entier quelconque sur celui des diviseurs de la forme $4n-1$. (19-30, en français).

Sans résoudre le nombre en ses facteurs premiers, l'auteur fait usage de formules de récurrence déduites d'équations appartenant à la théorie des fonctions elliptiques.

Thiele (*T.-N.*). — Une question d'hérédité éclairée à l'aide du calcul des probabilités. (149-152, en danois).

Thiele (*T.-N.*). — Différences réciproques. (153-171, en français).

Les différences réciproques sont des nombres obtenus à l'aide d'un algorithme analogue à celui qui conduit aux différences divisées de Newton. En posant $A = f(a)$ et $B = f(b)$, l'auteur définit les différences réciproques de premier ordre par l'équation

$$\rho(a, b) = \frac{a-b}{A-B},$$

et la définition de la différence réciproque d'un ordre quelconque se fait ensuite par l'équation

$$\rho(a, b, \ldots, f, g) = \frac{a-g}{\rho(a, b, \ldots, f) - \rho(b, \ldots, f, g)} + \rho(b, \ldots, f).$$

Tandis que le domaine élémentaire de la formule d'interpolation de Newton ne comprend que les fonctions rationnelles finies et entières, l'interpolation par différences réciproques s'applique en outre à toutes les fonctions rationnelles fractionnées.

Bonnesen (*T.*). — Sur les séries linéaires triplement infinies de courbes algébriques sur une surface algébrique. (281-293, en français).

L'auteur se sert d'une transformation des séries de courbes en des sections planes d'une autre surface. A son insu, une partie des résultats venaient d'être trouvés par M. Pannelli (*Rend. del Circolo di Palermo*, 1905); d'autres sont nouveaux.

Année 1907.

Hansen (*C.*). — Démonstration de l'impossibilité du prolongement analytique de la série de Lambert et des séries analogues. (3-19, en français).

L'auteur ajoute à la démonstration quelques expressions asymptotiques des séries.

Mollerup (*J.*). — Sur la théorie des ensembles et le concept du nombre. (127-144, en français).

L'auteur réduit le problème des fondements de l'Arithmétique en posant ce seul postulat que les axiomes relatifs à l'échelle finie des nombres n'impliquent pas contradiction. Il en déduit l'existence d'une échelle infinie bien ordonnée aussi bien que celle du principe de l'induction complète considéré dans toute son étendue.

Année 1908.

Kroman (*K.*). — La probabilité *a posteriori*. (133-144, en danois).

Bohr (*H.*). — Recherches sur la multiplication de deux intégrales définies prises entre des limites indéfinies. (213-232, en français).

Les résultats établis ici pour la multiplication de deux intégrales $\int_0^\infty u(x)\,dx$ et $\int_0^\infty v(x)\,dx$ forment un ensemble analogue à celui des théorèmes connus qui ont lieu pour la multiplication de deux séries infinies $\sum_0^\infty u_n$ et $\sum_0^\infty v_n$. L'auteur remarque à la fin de sa Note qu'il regarde les séries comme cas particuliers, et les intégrales comme cas limites, d'une notion plus générale, qu'il appelle *séries à indices arbitraires*, sur laquelle il espère revenir pour en déduire d'autres nouveaux résultats, embrassant les séries et les intégrales.

Thiele (*T.-N.*). — Sur la valeur propre des séries divergentes. (469-480, en français).

L'auteur définit ainsi la valeur propre d'une série : la somme de la série, en tant que cette définition nous permet de maintenir sans aucune restriction les axiomes principaux de l'addition, à savoir les principes univoques de l'addition et de la soustraction et le principe associatif (non le principe commutatif).

Année 1909.

Steffensen (*J.-F.*). — Les orbites périodiques dans le problème de Hill. (319-335, en français). H. Z.

JOURNAL FUR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK.

Tome CXXXII; 1907.

Landsberg (*Georg*). — Sur la réduction des équations par adjonction. (1-20).

Lorsqu'on considère, dans un domaine de rationalité donné, deux équations algébriques entières irréductibles, l'adjonction d'une racine de la seconde peut réduire la première, et inversement. Il existe entre les deux réductions des relations remarquables de réciprocité que l'auteur discute complètement en partant *des groupes des deux équations*. Les mêmes méthodes sont applicables à l'étude de la décomposition de l'équation fondamentale d'un *corps* par rapport à un module premier et par suite à la détermination des idéaux premiers de ce corps, en partant du groupe du corps de Galois correspondant.

1. Si $A(x)$ et $B(x)$ désignent deux fonctions rationnelles entières, à coefficients entiers, irréductibles dans le corps R des nombres rationnels, l'adjonction à R de toutes les racines des équations $A = 0$ et $B = 0$ fournit un corps de Galois G de degré r, lequel possède un groupe $\mathcal{G}$ de même degré. A chaque sous-corps U de G *appartient* un sous-groupe $\mathcal{U}$ de $\mathcal{G}$ formé des substitutions de $\mathcal{G}$ qui laissent invariants tous les nombres de U et dont l'indice par rapport à $\mathcal{G}$ est égal au degré de U.

Si α désigne une racine de $A(x) = 0$ et β une racine de $B(x) = 0$, les corps $R(\alpha)$ et $R(\beta)$ appartiennent à certains sous-groupes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $\mathcal{G}$, respectivement de degrés a et b, et l'on a

$$r = ma = nb,$$

m et n désignant les degrés de $A(x)$ et de $B(x)$. De plus le corps $R(\alpha, \beta)$ appartient au sous-groupe $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de degré d.

2. La décomposition de $\mathcal{G}$ par rapport à ses deux sous-groupes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ va jouer un rôle fondamental. Cette décomposition est représentée par la formule

$$\mathcal{G} = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}g_1\mathcal{B} + \mathcal{A}g_2\mathcal{B} + \ldots + \mathcal{A}g_{k-1}\mathcal{B}$$

dans laquelle $g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}$ sont $k-1$ substitutions convenablement choisies de $\mathcal{G}$. Chaque couple $\mathcal{A}g_i\mathcal{B}$ contient $\dfrac{ab}{d_i}$ substitutions, si l'on désigne par d_i le degré du groupe

$$\mathcal{D}_i = (g_i^{-1}\mathcal{A}g_i, \mathcal{B}).$$

On a de même

$$\mathcal{R} = \mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{B}g_1^{-1}\mathcal{A} + \mathcal{B}g_2^{-1}\mathcal{A} + \ldots + \mathcal{B}g_{k-1}^{-1}\mathcal{A}.$$

3. Cela étant, par l'adjonction de β, le polynome $A(x)$ se décompose exactement en k facteurs irréductibles

$$A(x) = A(x, \beta)\, A_1(x, \beta) \ldots A_{k-1}(x, \beta),$$

le facteur $A(x, \beta)$ admettant pour racines α et celles qui s'en déduisent par les substitutions de $\mathcal{A}\mathcal{B}$, le facteur $A_i(x, \beta)$ admettant pour racines celles qui se déduisent de α par les substitutions de $\mathcal{A}g_i\mathcal{B}$. Le degré de $A_i(x, \beta)$ est égal à $\mu_i = \frac{b}{d_i}$.

De même, par l'adjonction de α, le polynome $B(x)$ se décompose dans le même nombre k de facteurs irréductibles

$$B(x) = B(x, \alpha)\, B_1(x, \alpha) \ldots B_{k-1}(x, \alpha),$$

le facteur $B_i(x, \alpha)$, de degré $\nu_i = \frac{\alpha}{d_i}$, admettant pour racines celles qui se déduisent de β par les substitutions de $\mathcal{B}g_i^{-1}\mathcal{A}$.

Les deux décompositions comportent ainsi le même nombre de facteurs irréductibles et les degrés des facteurs correspondants sont proportionnels, $\frac{\mu_i}{\nu_i}$ étant égal à $\frac{b}{a}$ et à $\frac{m}{n}$.

4. En particulier le cas où $B(x)$ est identique à $A(x)$ donne la décomposition d'une équation irréductible par l'adjonction d'une de ses racines. $\mathcal{R}$ se réduit ici au groupe de l'équation et $\mathcal{A}$ au sous-groupe de $\mathcal{R}$ qui laisse invariante la racine α. Dans la décomposition de $A(x)$ par l'adjonction de α, le facteur $A_i(x, \alpha)$ est *linéaire* si g_i est échangeable avec $\mathcal{A}$. Le nombre ρ de ces facteurs linéaires est égal à l'indice de $\mathcal{A}$ par rapport au groupe $\mathcal{H}$ des éléments de $\mathcal{R}$ échangeables avec $\mathcal{A}$.

Pour qu'il y ait un facteur linéaire et un facteur de degré $m - 1$, c'est-à-dire pour que le groupe $\mathcal{R}$ soit plusieurs fois transitif, il faut et il suffit que $\mathcal{A}$ soit différent de ses m sous-groupes conjugués et que le plus grand commun diviseur de $\mathcal{A}$ et d'un quelconque de ses conjugués soit d'indice $m - 1$.

5. Soient maintenant G un corps de Galois de degré r, P un de ses diviseurs premiers de degré f et p le nombre premier rationnel dans lequel entre P. L'auteur désigne par $\mathfrak{Z}$ le groupe de décomposition de P, et par Z le corps de décomposition de P : chaque substitution de $\mathfrak{Z}$ laisse invariant chaque nombre de Z, et $\mathfrak{Z}$ est formé des substitutions qui conservent P. Si h est le degré de $\mathfrak{Z}$, $e = \frac{r}{h}$ est le degré de Z, h est un multiple de f, soit fg, et l'on a

$$p = (P P_1 \ldots P_{e-1})^g,$$

$P_1, \ldots, P_{e-1}$ désignant les diviseurs premiers conjugués de P.

6. Soit $A = R(\alpha)$ un sous-corps de G, appartenant à un groupe $\mathcal{A}$ de degré a. La forme fondamentale w de A satisfait à une équation irréductible

entière $\Psi(x) = 0$ de degré $m = \frac{r}{a}$. L'auteur se propose d'abord d'étudier la réduction de $\Psi(x)$ par l'adjonction de Z :

Si l'on décompose le groupe $\mathfrak{R}$ par rapport aux sous-groupes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{Z}$, d'après la formule

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{A}\mathfrak{Z} + \mathfrak{A}g_1\mathfrak{Z} + \ldots + \mathfrak{A}g_{k-1}\mathfrak{Z},$$

$\Psi(x)$ se décompose en k facteurs irréductibles

$$\Psi(x) = \Psi(x, \zeta^{(\lambda)})\,\Psi_1(x, \zeta^{(\lambda)})\ldots\Psi_{k-1}(x, \zeta^{(\lambda)}),$$

les Ψ_i étant des fonctions linéaires à coefficients entiers des e nombres $\zeta^{(0)}$, $\zeta^{(1)}, \ldots, \zeta^{(e-1)}$ qui constituent une base de Z.

Il résulte des propriétés de Z que chacun des nombres $\xi^{(\rho)}$ est congru à un nombre *rationnel* $\rho^{(\lambda)}$ par rapport au module P^{ε}. L'auteur en déduit que le polynome $\Psi_i(\varpi, \rho^{(\lambda)})$ est congru à zéro par rapport à un module M_i qui est de la forme $\Pi_i^{\varepsilon_i}$, où Π_i est un diviseur premier du corps A; on a de plus

$$p = \Pi^{\varepsilon}\Pi_1^{\varepsilon_1}\ldots\Pi_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}$$

et

$$\Psi(x) \equiv \Psi(x, \rho^{(\lambda)})\,\Psi_1(x, \rho^{(\lambda)})\ldots\Psi_{k-1}(x, \rho^{(\lambda)}) \pmod{p}.$$

On arrivera ainsi à la décomposition de $\Psi(x)$ en facteurs irréductibles (mod. p), chaque facteur $\Psi_i(x, \rho^{(\lambda)})$ étant de la forme

$$\Psi_i(x, \rho^{(\lambda)}) \equiv \varpi_i(x)^{\varepsilon_i},$$

où $\varpi_i(x)$ est irréductible (mod p). *On est ainsi arrivé à la décomposition de p à ses idéaux premiers.*

7. Les exposants ε_i s'obtiennent d'ailleurs facilement si l'on ajoute à la considération de $\mathfrak{Z}$ celle du groupe d'inertie $\mathfrak{T}$ du diviseur premier P; ce groupe de degré g est formé des substitutions qui laissent la forme fondamentale de G congrue à elle-même (mod P). Cela étant, ε_i n'est autre que l'indice par rapport à $\mathfrak{T}$ du plus grand commun diviseur de $g_i^{-1}\mathfrak{A}g_i$ et de $\mathfrak{T}$.

Bauer (Michael). — Sur la théorie générale des quantités algébriques. (21-32).

I. Étant donnée l'équation

$$(1) \qquad z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_k z^{n-k} + \ldots + c_n = 0$$

dont les coefficients sont des nombres entiers rationnels d'un certain domaine holoïde, on considère un diviseur premier rationnel P de ce domaine et le corps (Γ) défini par une racine ϖ de l'équation (1). Dans ce corps (Γ), P et ϖ se décomposent en facteurs premiers idéaux par les formules

$$P = \mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2}\ldots\mathfrak{p}_r^{e_r},$$

$$\varpi = \mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\mathfrak{p}_r^{a_r}\mathfrak{Q}, \qquad (P, \mathfrak{Q}) = 1;$$

les e_i sont des exposants entiers positifs, les a_i des exposants entiers non négatifs.

Les rapports $\frac{a_i}{e_i}$ sont désignés sous le nom de *nombres caractéristiques* de w par rapport à P. Ils peuvent facilement être déterminés en construisant un certain polygone de Puiseux, celui qui correspond au système de points

$$(0, 0), \quad (1, r_1), \quad (2, r_2), \quad \ldots, \quad (n, r_n),$$

r_i désignant l'exposant de la plus haute puissance de p qui entre dans c_i. Les nombres de Puiseux correspondants sont les seuls nombres caractéristiques *possibles*.

II. Pour que les s sommets du polygone de Puiseux soient fournis par les points correspondant aux termes

$$z^n, \quad z^{n-k_1}, \quad z^{n-k_1-k_2}, \quad \ldots, \quad z^{n-(k_1+k_2\ldots+k_s)} = 1,$$

il faut et il suffit que les nombres r_i satisfassent aux conditions

$$r_{k_1+k_2+\ldots+k_i} = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

$$r_{k_1+k_2+\ldots+k_{i-1}+l} \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{i-1} + l\frac{\alpha_i}{k_i} \qquad \left(\begin{array}{c} i = 1, 2, \ldots, s \\ l = 1, 2, \ldots, k_i - 1 \end{array}\right)$$

où α_1 est un nombre entier non négatif, les autres α étant des nombres entiers positifs satisfaisant aux inégalités

$$\frac{\alpha_1}{k_1} < \frac{\alpha_2}{k_2} < \ldots < \frac{\alpha_s}{k_s}.$$

Les nombres de Puiseux cherchés sont alors les nombres de la suite

$$\frac{\alpha_1}{k_1}, \quad \frac{\alpha_2}{k_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha_s}{k_s}.$$

III. L'auteur démontre que tous les nombres de Puiseux ainsi obtenus sont des nombres caractéristiques effectifs si l'on considère, au lieu du corps (Γ), le corps $(\bar{\Gamma})$ déterminé par les n racines de l'équation (1) et au lieu de la racine w, les n racines $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n)}$. Pour chacun des facteurs premiers idéaux de P le nombre caractéristique $\frac{\alpha_i}{k_i}$ se présente en tout k_i fois.

IV. Des considérations précédentes découlent des conséquences importantes. Si en effet, pour tous les nombres de Puiseux, le numérateur α_i et le dénominateur k_i sont premiers entre eux, chaque facteur irréductible du premier membre de l'équation (1) a un degré qui est une somme d'un certain nombre d'entiers $k_1, k_2, \ldots, k_s$; de plus, dans les différentes sommes qui correspondent aux différents facteurs irréductibles, chaque entier k_i entre une fois et une seule.

En particulier si les c_i sont des nombres rationnels entiers divisibles par le nombre premier rationnel p, c_{n-k} n'étant pas divisible par p^2, le premier membre de l'équation (1) admet un facteur irréductible de degré supérieur ou égal à $n - k$.

Bauer (Michael). — Sur les équations sans affect. (33-35).

En s'appuyant sur les résultats obtenus dans l'article précédent, l'auteur montre qu'il est toujours possible de former une équation algébrique entière de degré n à cofficients entiers qui soit sans *affect*, c'est-à-dire telle que son groupe soit formé des $n!$ substitutions de n lettres. Il suffit pour cela que les nombres de Puiseux de cette équation relatifs à certains nombres premiers satisfassent à des conditions que l'auteur énonce, et qui sont toujours réalisables.

Rothe (*Rudolf*). — Recherches sur la représentation géodésique l'une sur l'autre de deux surfaces à courbure totale constante. (36-68).

Le problème de la représentation l'une sur l'autre de deux surfaces à courbure totale constante, avec conservation des lignes géodésiques, est résolu complètement par le théorème de Beltrami d'après lequel on peut représenter une telle surface sur un plan de manière à faire correspondre aux lignes géodésiques de la surface les droites du plan. L'auteur reprend ce problème en etendant ses recherches aux courbes de courbure géodésique constante des deux surfaces.

I. Si deux surfaces admettent une représentation l'une sur l'autre avec conservation des lignes géodésiques, sans que cette représentation réalise l'application de la première surface sur la seconde ou sur une homothétique de la seconde, les ds^2 des deux surfaces ont la forme de Liouville

$$dl^2 = (U - V)(du^2 + dv^2)$$
$$dl'^2 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right)\left(\frac{du^2}{U} + \frac{dv^2}{V}\right).$$

La courbure totale k de la première surface est donnée par la formule

$$2k(U - V)^3 = U'^2 - V'^2 - (U - V)(U'' - V'').$$

L'intégration de cette équation, dans le cas où aucune des dérivées U' et V' n'est identiquement nulle, et où k est constant, conduit à la formule

$$dl^2 = -\frac{1}{k}(\wp u - \wp iv)(du^2 + dv^2)$$

où $\wp u$ désigne une fonction *pe'* avec deux invariants arbitraires. La forme précédente est au fond identique à celle obtenue par H.-A. Schwarz pour le ds^2 de la sphère lorsque ce géomètre s'est proposé la représentation conforme d'une hémisphère sur un rectangle.

II. Si la première surface est à courbure totale constante k, la seconde a aussi sa courbure totale constante $\overline{k}$. Les fonctions *pe'* correspondant aux deux surfaces ont leurs invariants donnés par les formules suivantes

$$g_2 = 12(s_0^2 - \overline{s_0}k) \qquad g_3 = 12 s_0 \overline{s_0} k - 8 s_0^3 - 4 k^2 \overline{k},$$
$$\overline{g_2} = 12(\overline{s_0^2} - s_0 \overline{k}), \qquad \overline{g_3} = 12 s_0 \overline{s_0} \overline{k} - 8 \overline{s_0^3} - 4 \overline{k^2} k$$

et la représentation géodésique est définie par les formules

$$[\wp(u; g_2, g_3) - s_0]\,[\wp(\bar{u}; \bar{g}_2, \bar{g}_3) - \bar{s}_0] = k\bar{k}$$
$$[\wp(iv; g_2, g_3) - s_0]\,[\wp(\bar{iv}; \bar{g}_2, \bar{g}_3) - \bar{s}_0] = k\bar{k}.$$

On a d'ailleurs la relation intéressante entre les invariants absolus G et $\bar{G}$,

$$\frac{G}{\bar{G}} = \frac{k^2}{\bar{k}}.$$

L'auteur examine les deux cas de dégénérescence où la fonction $\wp u$ se réduit à $-\frac{a^2}{\sin^2 au}$ et à $-\frac{1}{u^2}$.

III. L'auteur arrive au cas, laissé jusqu'à présent de côté, où la fonction V se réduit à une constante. Les deux systèmes orthogonaux qui se correspondent dans la représentation sont alors formés chacun d'une famille de lignes géodésiques et de la famille de leurs trajectoires orthogonales. On a dans ce cas

$$dl^2 = -\frac{a^2}{k\sin^2 au}(du^2 + dv^2)$$

$$d\bar{l}^2 = -\frac{\bar{a}^2}{\bar{k}\sin^2 \bar{a}\bar{u}}(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2),$$

et les formules qui définissent la représentation géodésique sont

$$\frac{k}{a^6}\cos^2 au + \frac{\bar{k}}{\bar{a}^6}\cos^2\bar{a}\bar{u} = 0,$$

$$av = \bar{a}\bar{v}.$$

L'auteur désigne cette représentation géodésique particulière sous le nom de représentation géodésique *affine*, et cela pour une raison qui ne semble pas exacte. Si l'on représente chaque surface sur un plan de Beltrami où l'on a choisi une conique fondamentale, les géodésiques étant représentées par les droites du plan, l'auteur prétend que la représentation géodésique affine des deux surfaces se traduit pour les deux plans par une représentation projective *affine;* or il n'en est rien, la représentation projective est assujettie à la condition nécessaire et suffisante que la conique fondamentale du premier plan soit représentée dans le second plan par une conique *bitangente* à la conique fondamentale de ce second plan.

L'auteur recherche s'il existe e représentation géodésique telle qu'une famille de courbes à courbure géodésique constante (cercles géodésiques de même rayon), soit représentée par une famille de même nature. Il démontre que cela est impossible si la famille dépend de deux paramètres; si elle dépend d'un seul paramètre il faut et il suffit que la représentation géodésique soit affine. Dans ce cas il indique quelle est la famille de cercles qui se conserve [sur le plan de Beltrami ces cercles géodésiques sont représentés par les coniques bitangentes à la fois à la conique fondamentale et à une conique fixe bitangente elle-même à la conique fondamentale]. Tout ce qui précède suppose d'ailleurs la courbure totale des deux surfaces différente de zéro.

Les surfaces à courbure totale constante sont les seules susceptibles d'une représentation géodésique faisant correspondre une famille de cercles géodésiques de rayon géodésique constant à une famille de la même nature.

Lange (*M.*). — La distribution de l'électricité sur deux sphères conductrices placées dans un champ électrostatique symétrique par rapport à leur ligne des centres. (69-84).

Étant données deux sphères conductrices extérieures l'une à l'autre placées dans un champ électrostatique symétrique par rapport à leur ligne des centres, l'auteur étudie le potentiel, pour un point variable de la ligne des centres intérieur à la première sphère, dû aux masses électriques provenant, sur la surface de cette sphère, de l'influence du champ électrostatique donné. Il suppose que les masses qui produisent ce champ sont toutes extérieures aux deux sphères. Le potentiel cherché est donné par une certaine équation fonctionnelle que l'auteur ramène à la forme

$$\varphi(z) - q^2 \varphi(q^2 z) = \mathrm{F}(z),$$

où q^2 est une constante inférieure à 1, $\varphi(z)$ la fonction inconnue et $\mathrm{F}(z)$ une fonction connue de la variable z (transformée homographique de l'abscisse x du point variable).

L'auteur résout cette équation fonctionnelle par un développement en série et étudie le cas particulier où le champ électrostatique provient de masses électriques situées sur la surface d'une troisième sphère ayant son centre en ligne droite avec ceux des deux premières et extérieure aux deux premières. Il examine en détail le cas où le rayon de cette sphère est infiniment petit.

Kokott (*P.*). — Généralisation d'un théorème de Gudermann sur des cercles d'une sphère se touchant les uns les autres. (81-84).

Si l'on considère sur une sphère deux petits cercles fixes dont l'un entoure l'autre sans le toucher et une suite de cercles tous tangents aux deux cercles fixes et tels que chacun d'eux touche le suivant, il peut arriver que cette suite se ferme; s'il en est ainsi le même fait se produit quel que soit le premier cercle choisi pour former la suite. L'auteur démontre que le théorème est encore vrai si chaque cercle de la suite, au lieu de toucher le suivant, le coupe sous un angle constant.

Plus généralement, étant données deux sphères fixes M et m dont l'une entoure la seconde, on considère l'ellipsoïde de révolution lieu des centres de sphères qui touchent M et m. On prend sur cet ellipsoïde deux ellipses fixes, on place sur la première ellipse le centre d'une sphère μ tangente à M et m, puis sur la deuxième ellipse le centre d'une sphère μ' tangente à M et m et coupant μ sous un angle donné ω, puis sur la première ellipse le centre μ_1 d'une sphère tangente à M et m et coupant μ' sous l'angle ω, et ainsi de suite : si cette suite de sphères est limitée, elle le sera quelle que soit la position qu'occupe sur la première ellipse le centre de la sphère μ.

Schur (*J.*). — Recherches sur la représentation des groupes finis par des substitutions linéaires fractionnaires. (85-137).

Cet important Mémoire, par sa nature même, est difficile à résumer. Contentons-nous de reproduire son introduction.

« Si l'on veut déterminer toutes les représentations d'un groupe fini donné $\mathfrak{H}$ par des substitutions linéaires fractionnaires, on a, comme je l'ai montré dans mon travail antérieur (*Journal de Crelle*, t. CXXVII, p. 20), à calculer en première ligne un groupe représentatif (Darstellungsgruppe) $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{H}$. Un tel groupe $\mathfrak{R}$ est caractérisé par les propriétés suivantes :

» 1° $\mathfrak{R}$ contient un sous-groupe $\mathfrak{M}$ formé d'éléments invariants de $\mathfrak{R}$ et $\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{M}}$ est isomorphe au groupe $\mathfrak{H}$;

» 2° Le commutateur de $\mathfrak{R}$ contient tous les éléments de $\mathfrak{M}$:

» 3° Il n'y a pas de groupe possédant les propriétés 1° et 2° et dont l'ordre soit supérieur à celui du groupe $\mathfrak{R}$.

» Un groupe $\mathfrak{H}$ peut posséder plusieurs groupes représentatifs; au contraire le groupe *abélien* $\mathfrak{M}$, que je nomme *multiplicateur* de $\mathfrak{H}$, est bien déterminé.

» Pour la discussion des représentations de $\mathfrak{H}$ par des substitutions linéaires fractionnaires il suffit de connaître un groupe représentatif quelconque de $\mathfrak{H}$. Au contraire il est intéressant, au point de vue de la théorie des groupes, d'avoir un aperçu plus précis sur les différents groupes représentatifs (non isomorphes) de $\mathfrak{H}$ et sur le nombre de ces groupes. Ce problème, est traité dans le paragraphe 1 de ce Mémoire. On indique en particulier une limite supérieure du nombre cherché, et cette limite est atteinte dans une classe générale de groupes $\mathfrak{H}$, celle des groupes parfaits.

» Si l'on connaît pour le groupe donné $\mathfrak{H}$ un groupe $\mathfrak{R}$ qui possède les propriétés 1° et 2°, il est en général très dificile de décider s'il jouit aussi de la propriété 3°. Dans le paragraphe 2, j'indique un criterium qui facilite dans beaucoup de cas particuliers la réponse à cette question. En particulier j'obtiens le théorème, utile dans les applications, que tout groupe *fermé*, qui possède les propriétés 1° et 2°, est un groupe représentatif de $\mathfrak{H}$. — J'appelle groupe fermé un groupe dont le multiplicateur est d'ordre 1, et qui est ainsi son propre groupe représentatif.

» La méthode indiquée dans mon Mémoire antérieur, paragraphe 3, pour le calcul du multiplicateur d'un groupe $\mathfrak{H}$, résulte de la considération du schéma général de composition pour les éléments du groupe. Dans le paragraphe 3 de ce Mémoire je montre que, pour la résolution de ee problème, il suffit aussi de considérer un système complet de relations entre les éléments générateurs du groupe $\mathfrak{H}$. En m'appuyant sur cette méthode je détermine dans le paragraphe 4 les multiplicateurs d'une série de groupes spéciaux, parmi lesquels les groupes abéliens.

» Dans le paragraphe 5 je détermine les groupes représentatifs des groupes finis connus qu'on obtient par la considération des substitutions linéaires binaires dont les coefficients sont des imaginaires de Galois. La détermination des degrés de toutes les représentations irréductibles de ces groupes par des substitutions linéaires entières ou fractionnaires (à coefficients quelconques) s'obtient ensuite (§ 6) par le calcul des caractères de leurs groupes représentatifs. »

Nielsen (Niels). — Sur les séries de fonctions cylindriques. (138-146).

Dans son *Traité des fonctions cylindriques*, l'auteur a exprimé, à l'aide d'une intégrale définie très simple, le produit

$$J^{\frac{n+\nu}{2}}(x)\, J^{\frac{n-\nu}{2}}(x),$$

où x désigne un entier non négatif, tandis que ν est une quantité finie quelconque. L'auteur généralise cette représentation en partant de la formule de Cauchy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\nu-1}\varphi \cos(\rho\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi\, \Gamma(\nu)}{2^\nu\, \Gamma\left(\frac{\nu+\rho+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\rho+1}{2}\right)},$$

où la partie réelle de ν est positive, et arrive ainsi à la formule

$$J^{\frac{\nu+\rho}{2}}(x)\, J^{\frac{\nu-\rho}{2}}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J^\nu(2x\cos\varphi) \cos(\rho\varphi)\, d\varphi,$$

valable pourvu que la partie réelle de ν soit supérieure à -1.

En remplaçant dans le second membre la fraction J^ν par son expression donnée par Bessel sous la forme d'intégrale définie, on arrive à cette autre formule

$$J^{\frac{\nu+\rho}{2}}(x)\, J^{\frac{\nu-\rho}{2}}(x)$$
$$= \frac{4x^\nu}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x\cos\varphi\sin\psi)\, (\cos\varphi\cos\psi)^\nu \cos(\rho\varphi)\, d\varphi\, d\psi$$

où il faut supposer que la partie réelle de ν est supérieure à $-\frac{1}{2}$.

L'auteur déduit de ce qui précède un principe général et très remarquable concernant les séries de fonctions cylindriques. Soit

$$x^\nu f(\alpha x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} A_s^\nu(\alpha)\, J^{\nu+r_s}(p_s x)$$

une série de fonctions cylindriques, convergente lorsque x est situé dans un domaine K contenant $x = 0$, et uniformément convergente par rapport à α lorsque α est situé dans un domaine k contenant $\alpha = 0$. Alors la série peut être transformée dans une série de *produits de deux fonctions cylindriques :*

$$x^\nu f(\alpha x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} A_s^\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right) J^{\frac{\nu+\rho+r_s}{2}}(p_s x)\, J^{\frac{\nu-\rho+r_s}{2}}(p_s x),$$

et cette série est convergente pourvu que x soit situé dans le domaine K_1 homothétique de K par rapport à $x = 0$ dans le rapport $\frac{1}{2}$ et que α soit situé dans le domaine k_1 homothétique de k par rapport à $\alpha = 0$ dans le rapport 2. Il faut de plus supposer que la partie réelle de ν est supérieure à 1 et la partie réelle de $\nu - \rho$ à -2.

Si $r_s = s$, $p_s = 1$, on obtient les séries neumanniennes;

Si $r_s = s$, $p_s = \nu - s$, on obtient les séries kapteyniennes;

Si $r_s = 0$, $p_s = s$, on obtient les séries de Schlömilch.

Thomé (L.-W.). — Sur une application de la théorie des équations différentielles linéaires au calcul des variations. (147-158).

Cet article généralise certains résultats contenus dans deux Mémoires précédents parus dans les Tomes CXXV et CXXVIII du même *Journal*. Dans ce nouvel article les familles de courbes voisines de la courbe fournie par le calcul des variations peuvent admettre des discontinuités et des valeurs extrêmes variables.

L'auteur ajoute un certain nombre d'exemples à ceux contenus dans les articles précédents. Citons, entre autres, la détermination de l'aire minima comprise entre une courbe, sa développée et deux normales; la détermination de la surface de révolution d'aire minima, l'aire d'une section méridienne étant donnée.

Kostka (C.). — Remarques sur les fonctions symétriques. (159-166).

Dans le Tome XCIII du même *Journal* l'auteur avait considéré trois catégories T, K, C, de fonctions symétriques entières de n quantités $t_1, t_2, \ldots, t_n$, et il avait étudié le passage de l'une quelconque de ces fonctions aux fonctions des deux autres catégories. T est le type connu d'une fonction symétrique entière homogène des t; K est un produit quelconque des fonctions symétriques élémentaires $c_1, c_2, \ldots, c_n$; enfin C est un déterminant formé suivant certaines règles au moyen des éléments $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

En partant des fonctions aleph de Wronski $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots$, définies par les formules de récurrence

$$\mathfrak{c}_r - c_1\mathfrak{c}_{r-1} + c_2\mathfrak{c}_{r-2} + \ldots + (-1)^r c_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots),$$

et des n quantités $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \ldots, \mathfrak{t}_n$ racines de l'équation

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{t}) = 1 - \mathfrak{c}_1\mathfrak{t} - \mathfrak{c}_2\mathfrak{t}^2 - \ldots - (-1)^n \mathfrak{c}_n\mathfrak{t}^n = 0,$$

on peut former d'une manière analogue, trois catégories de fonctions entières $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{C}$; l'auteur étudie la manière dont chacune des fonctions des *six* catégories considérées s'exprime au moyen des fonctions de l'une des cinq autres catégories.

L'équation $F(x) = 0$ qui a pour racines $t_1, t_2, \ldots, t_n$ et l'équation $\mathfrak{F}(x) = 0$ sont dites *associées;* elles sont caractérisées par la propriété suivante :

Si s_μ et $\mathfrak{s}_\mu$ désignent les sommes des puissances μ^{es} de leurs racines, on a

$$s_\mu = (-1)^\mu \mathfrak{s}_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Weber (H.). — Sur les corps cycliques. (167-188).

L'auteur a été conduit par le beau Mémoire de Mertens, publié dans le Tome précédent du même *Journal*, à reprendre ses anciennes recherches sur le théorème de Kronecker, d'après lequel tous les corps abéliens ne contiennent pas d'autres irrationnelles algébriques que celles qu'on rencontre dans la division du cercle. Abandonnant son ancienne méthode, qui l'obligeait, dans le cas où le degré du corps est une puissance de 2, à considérer le nombre des classes des corps de la division du cercle, l'auteur s'appuie, comme Mertens, sur l'induction complète; mais il n'utilise que les théorèmes les plus simples de la théorie des nombres algébriques et de la théorie de Galois.

1. L'auteur définit les systèmes cycliques de degré n et la composition de ces systèmes. Il lui suffira dans la suite de se limiter au cas où n est une puissance λ^ρ d'un nombre premier λ.

2. Il passe ensuite à la définition des équations cycliques; il montre que, si une équation cyclique est irréductible, aucune de ses résolvantes $L(\alpha, x_0)$, où α désigne une des racines imaginaires λ^{es} de l'unité, ne peut être égale à une fonction rationnelle de α, à moins que cette résolvante ne soit nulle : on peut d'ailleurs toujours supposer, sans changer le corps défini par les racines de l'équation cyclique, qu'aucune résolvante n'est nulle.

3. L'auteur rappelle la définition et les propriétés élémentaires des *corps normaux*, c'est-à-dire identiques à leurs conjugués.

4. Il rappelle la définition des nombres premiers critiques p dans un corps normal Ω de degré m. On décompose p eu ses facteurs premiers d'après la formule

$$p = (\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_e)^g,$$

$$N(\mathfrak{p}_i) = p^f, \qquad efg = m,$$

f s'appelle le *degré* de l'idéal premier $\mathfrak{p}_i$, g le *poids* de p ou de $\mathfrak{p}_i$. Le nombre premier p est dit *critique* si g est plus grand que 1. Un nombre premier qui n'est pas critique dans un corps Ω n'est critique dans aucun corps Ω' diviseur de Ω.

5. Revenant aux équations cycliques, l'auteur considère un corps cyclique de degré premier λ, et désigne par α une racine imaginaire $\lambda^{\text{ième}}$ de l'unité. Pour que le nombre premier p différent de λ soit critique dans ce corps, il faut que les puissances $L(\alpha, \xi)^\lambda$ des résolvantes $L(\alpha, \xi)$ soient divisibles par une puissance de p dont l'exposant ne soit pas divisible par λ.

Ce théorème admet une réciproque.

6. Si maintenant le corps cyclique $R(\xi)$ de degré λ est diviseur d'un corps cyclique $R(x)$ de degré $n = \lambda^\rho$, le nombre premier p différent de λ ne peut être critique dans $R(\xi)$ que si $p - 1$ est divisible par n. Ce théorème fondamental est démontré d'abord dans le cas d'une puissance de 2, p étant un multiple de 4 plus 3; puis dans le cas général.

Si alors p, différent de λ, est critique, on peut composer le système cyclique considéré avec un système cyclique résultant de la considération du corps des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité, de manière à obtenir un système cyclique pour lequel

p n'est plus critique. Tout est donc ramené au cas où le seul nombre premier critique est λ.

7. L'auteur démontre très facilement le théorème final dans le cas où $\lambda = 2$.

8 et 9. Pour le cas où λ est impair, l'auteur arrive à la démonstration finale à la suite de théorèmes sur les idéaux du corps des racines $\lambda^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Neumann (Ernst-Richard). — Sur une nouvelle méthode de réduction dans les problèmes de l'Hydrodynamique. (189-215).

Lorsqu'un fluide parfait est animé d'un mouvement irrotationnel, la détermination de son mouvement est ramenée à celle d'une seule fonction, le potentiel des vitesses : dans le cas particulier où le fluide est incompressible, cette fonction est assujettie à satisfaire à l'équation de Laplace. Il y a une autre classe de mouvements, *même tourbillonnaires*, pour laquelle tout se ramène également à la détermination d'une seule fonction ; c'est la classe des mouvements *permanents, à deux dimensions*, lorsqu'il n'y a aucune force extérieure.

En supposant donc que les composantes u, v de la vitesse d'une molécule fluide ne dépendent que de x, y, que w est nulle, et enfin qu'il n'y a pas de forces données, les équations du mouvement sont

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$0 = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial z},$$

$$\frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon v)}{\partial y} = 0.$$

L'auteur suppose, mais c'est une hypothèse qui n'est pas indispensable, qu'il y a une relation donnée entre la *pression* p et la *densité* ε.

En posant

$$\sqrt{\varepsilon}\,u = \mathrm{U}, \qquad \sqrt{\varepsilon}\,v = \mathrm{V},$$

les quantités U, V, p s'expriment au moyen des dérivées partielles d'une certaine fonction Φ, que l'auteur appelle *fonction du courant* (Strömungsfunktion). On a en effet

$$\mathrm{UV} = -2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}, \qquad p + \mathrm{U}^2 = 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \qquad p - \mathrm{V}^2 = -2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}.$$

Lorsque ε est une fonction donnée de p, la fonction Φ satisfait à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre ; dans le cas particulier où le fluide est incompressible, cette équation exprime que la dérivée totale par rapport au temps de la quantité

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

est nulle ; autrement dit, sur un même filet liquide $\Delta\Phi$ reste constant.

La fonction Φ satisfait en outre à une condition aux limites : sa dérivée seconde par rapport à la tangente et à la normale est nulle en tout point de la section droite du cylindre qui limite le fluide.

Si le fluide est incompressible, on peut appliquer la théorie précédente même s'il y a une fonction des forces $W(x, y, z)$; dans ce cas il suffit de remplacer dans les formules précédemment obtenues, p par $p + \varepsilon W$. La fonction Φ n'est d'ailleurs définie qu'à une expression près de la forme

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + h.$$

Le tourbillon ζ s'exprime très simplement au moyen de $\Delta\Phi$ par les formules

$$\zeta = \frac{1}{2\varepsilon u}\frac{\partial\Delta}{\partial y} = -\frac{1}{2\varepsilon v}\frac{\partial\Delta}{\partial x}.$$

L'auteur étudie le cas particulier où la fonction Φ ne dépend que de la distance du point (x, y) à un point fixe; autrement dit, en coordonnées polaires, Φ ne dépend que de r. Deux cas sont alors possibles : dans le premier cas la vitesse de chaque molécule est normale au rayon vecteur, la fonction Φ est arbitraire, n'étant soumise qu'à la restriction que $\Phi''(r) - \frac{1}{r}\Phi'(r)$ soit négatif. Dans le second cas le mouvement est *radial* et irrotationnel, la fonction Φ ayant la valeur

$$\Phi(r) = \beta^2 \log\frac{1}{r} + A r^2 + C.$$

Si le liquide étant incompressible, le mouvement est de plus irrotationnel, la fonction Φ satisfait simplement à l'équation

$$\Delta\Phi = \text{const.}$$

qu'on peut toujours supposer, grâce à l'indétermination de Φ, réduite à l'équation de Laplace. Il y a alors entre la fonction Φ et le potentiel des vitesses φ une relation simple. Soient Ω et ω les deux fonctions analytiques de $z = x + iy$ dont les parties réelles sont Φ et φ; on a

$$4\frac{d^2\Omega}{dz^2} = \varepsilon\left(\frac{d\omega}{dz}\right)^2.$$

Les considérations précédentes pourraient s'étendre à des cas plus généraux, par exemple à certains mouvements irrotationnels pour lesquels les hypothèses qui assurent l'existence du potentiel des vitesses ne sont pas toutes vérifiées. Elles s'appliqueraient aussi aux mouvements à une dimension *non permanents*.

Stuyvaert (*M.*) — Congruence de triangles, cubiques gauches et autres variétés annulant des matrices. (216-237).

L'auteur considère une matrice de l lignes et $l+1$ colonnes dont les éléments sont des formes de degré quelconque en $x_1, x_2, \ldots, x_d$, les coefficients de ces formes étant à leur tour fonctions de trois paramètres homogènes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; les degrés des éléments en x et α sont supposés choisis de façon que tout déter-

minant extrait de la matrice soit une forme homogène en x et en α. Pour chaque système de valeur de α_1, α_2, α_3, la matrice égalée à zéro représente en $x_1, \ldots, x_d$, une variété algébrique à $d-3$ dimensions dans l'espace à $d-1$ dimensions. Quand les α varient, on a ainsi une *congruence* de variétés. La congruence est dite *linéaire* si par chaque point (x) il passe une variété (variable) et une seule.

Si, en particulier, chaque élément de la matrice est linéaire à la fois par rapport aux x et par rapport aux α, et si $l=2$, l'auteur cherche dans quels cas la congruence ainsi obtenue est linéaire : il arrive à six types distincts. Pour $d=4$, on a ainsi six types de congruences linéaires de cubiques gauches : par exemple les cubiques gauches d'une congruence du premier type passent toutes par un point fixe et s'appuient huit fois sur une sextique gauche de genre *trois*. Il existe une congruence linéaire remarquable que l'auteur appelle la *gerbe* G et qui appartient à la fois à cinq des six types indiqués : toutes les cubiques gauches de cette gerbe passent par deux points fixes et ont trois bisécantes communes.

On peut se proposer, pour chaque congruence, de rechercher sa *classe*, c'est-à-dire le nombre de fois qu'une droite arbitraire contient deux points x d'une des variétés. La congruence du type I, dont il a été question tout à l'heure, est de première classe. Certaines congruences du type II sont aussi de première classe : les cubiques de ces congruences ont une bisécante commune et rencontrent chacune en quatre points deux cubiques gauches fixes.

Si l'on prend $d=3$ au lieu de prendre $d=4$, les congruences des six types précédents deviennent des congruences de triangles dans le plan : l'auteur cherche les coniques pour lesquelles ces triangles sont autopolaires. Il étudie de plus la correspondance entre le sommet d'un de ces triangles et le côté opposé : cette correspondance est quadratique et birationnelle.

Enfin il étudie la congruence des cubiques gauches à cinq bisécantes communes : elle est représentée par une matrice de six formes linéaires contenant les paramètres variables au troisième degré ; un paramètre manque dans chaque ligne et les deux lignes ne diffèrent que par le nom des paramètres. On peut aussi représenter cette congruence par une matrice linéaire par rapport aux paramètres, mais qui a l'inconvénient de donner chaque courbe de la congruence accompagnée de neuf droites parasites.

Jacobsthal (*Ernst*). — Sur la représentation des nombres premiers de la forme $4n+1$ par des sommes de deux carrés. (238-245).

Tout nombre premier p de la forme $4n+1$ peut se mettre sous la forme d'une somme de deux carrés a^2+b^2. L'auteur indique la représentation suivante

$$a = \frac{1}{2}\varphi(r), \qquad b = \frac{1}{2}\varphi(n),$$

où l'on pose

$$\varphi(e) = \sum_{m=1}^{m=p} \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m^2-e}{p}\right),$$

$\left(\frac{m}{p}\right)$ étant le symbole de Legendre, r un résidu et n un non-résidu quelconque

2me Partie.

de p. L'entier a est impair, tandis que b est pair; a est ainsi complètement déterminé par la formule

$$a = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{p+3}{4}} \frac{\frac{p-1}{2}!}{\left(\frac{p-1}{4}!\right)^2} \quad (\text{mod } p),$$

tandis que b est déterminé (avec ambiguïté) par la formule

$$b \equiv \pm \frac{1}{2}(-1)^{\frac{p+3}{4}} \frac{1}{\left(\frac{p-1}{4}!\right)^2} \quad (\text{mod } p).$$

Le nombre a est aussi égal au nombre a'' introduit par Gauss dans la formule

$$a'' + b'' i = \sum_{\mu=1}^{\mu=p-2} i^{ind\,\mu+\mu^2}.$$

Schlesinger (*Ludwig*). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires. (247-254).

Le système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_{ik}(x)}{x-a} y_k,$$

où les $P_{ik}(x)$ sont holomorphes au voisinage de $x = a$, est tel que ses solutions ne sont pas indéterminées au point $x = a$. L'auteur donne de ce théorème une démonstration directe, basée sur un procédé analogue à celui par lequel on démontre la convergence de l'intégrale

$$\int_b^a \frac{f(x)\,dx}{(x-a)^{1-\alpha}}$$

où α est positif et où $f(x)$ est holomorphe au voisinage de $x = a$.

Fueter (*Rudolf*). — La théorie des rayons de nombres (2e Partie). (255-269).

La première Partie du Mémoire de l'auteur a paru dans le même *Journal*, t. CXXX, p. 197. Dans cette seconde Partie l'auteur généralise pour un corps quelconque la théorie des genres (Chap. V); puis il donne l'application de cette théorie à la multiplication complexe (Chap. VI et VII).

Les deux théorèmes fondamentaux auxquels il arrive ainsi sont les suivants :

Le discriminant relatif des équations de la multiplication complexe par rapport à un anneau r *de guide* f *du corps quadratique imaginaire* $(\sqrt{m})$ *ne contient que les nombres premiers du guide* f.

Toute équation abélienne dans un corps quadratique imaginaire peut être résolue par les corps des modules singuliers et les corps de la division du cercle.

Bernstein (*Félix*). — Sur la théorie de la série trigonométrique. (270-278).

L'auteur, dans cet article, s'appuie uniquement sur la représentation, par une série trigonométrique uniformément convergente, d'une fonction continue, de période 2π, définissant une ligne brisée. Il démontre les deux théorèmes suivants :

Si $f(x)$ est une fonction qui dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ possède des points de continuité et dont les valeurs, en ces points de continuité, subissent dans tout l'intervalle $(0, 2\pi)$ une oscillation finie, on peut construire une série dont tous les termes sont des expressions trigonométriques limitées, qui converge en chaque point de continuité de $f(x)$ et représente $f(x)$ en ces points.

Si $f(x)$ est une fonction intégrable (au sens de Riemann) dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, on peut, étant donné un nombre positif η aussi petit qu'on veut, déterminer un entier M tel que, si $\psi_m(x)$ désigne l'ensemble des m premiers termes de la série trigonométrique construite avec les coefficients de Fourier relatifs à la fonction $f(x)$, on ait

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - \psi_m(x)]^2 dx < \eta \qquad (m \geq \text{M}).$$

Ce dernier théorème permet de retrouver immédiatement le théorème de Hurwitz et de De la Vallée-Poussin relatif aux coefficients de Fourier et défini par la formule

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + a_k'^2.$$

Tous les résultats précédents s'étendent d'ailleurs à des séries plus générales que les séries trigonométriques.

Heger (*R.*). — Sur la géométrie sphérique. (279-287).

L'auteur se sert d'un triangle sphérique de référence et prend pour coordonnées d'un point de la sphère les sinus des distances sphériques du point aux côtés de ce triangle. Il prend pour coordonnées tangentielles d'un grand cercle les coordonnées ponctuelles de son pôle par rapport au triangle polaire du triangle de référence. Il démontre en particulier le théorème suivant, généralisation d'un théorème de Steiner :

L'enveloppe des grands cercles qui découpent sur deux petits cercles fixes deux cordes telles que les tangentes de leurs moitiés soient dans un rapport constant, est une conique sphérique.

Ce théorème admet un corrélatif.

Perron (*Oskar*). — Nouveaux critères pour l'irréductibilité des équations algébriques. (288-307).

L'auteur, dans des travaux antérieurs, avait déjà recherché des critères *pratiques* pour l'irréductibilité des équations algébriques à coefficients entiers : ces critères reposaient sur des considérations de *divisibilité* pour les coefficients. Il démontre maintenant de nouveaux critères fondés sur les considérations de *grandeur* de ces mêmes coefficients.

Ces critères reposent tous sur l'un des deux principes évidents suivants :

L'équation

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

où les coefficients sont des nombres entiers, est certainement irréductible si les valeurs absolues de $n-1$ de ses racines sont inférieures à 1.

La même équation est certainement irréductible si elle admet un couple de racines imaginaires conjuguées, les $n-2$ autres racines étant en valeur absolue inférieures à 1.

Du premier principe découlent les critères suivants :

THÉORÈME I. — *L'équation est irréductible si l'on a*

$$|a_1| > 1 + |a_2| + \ldots + |a_n|.$$

THÉORÈME II. — *L'équation est irréductible si l'on a une des deux inégalites*

$$f\left(\frac{1+|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|}{2}\right) < 0, \qquad (-1)^n f\left(-\frac{1+|a_1|+\ldots+|a_n|}{2}\right) < 0.$$

Parmi les critères qui découlent du second principe, contentons-nous de signaler le suivant :

THÉORÈME III. — *L'équation est irréductible si l'on a* $a_2 > 0$ *et si en outre l'une des inégalités suivantes est vérifiée*

$$\sqrt{a_2}\left(1 - \mathrm{P}^{\frac{1}{n-1}}\right) \geqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2\,|a_1| - 2\,|a_2| + \ldots + 2\,|a_n| - 1},$$

$$\sqrt{a_2}\left(1 - \mathrm{P}^{\frac{1}{n-1}}\right) \geqq 1 + \sqrt{\frac{1 - |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|}{2}};$$

dans ces inégalités, on a posé

$$\mathrm{P} = \left|\frac{a_1}{i\sqrt{a_2}} + \frac{a_3}{(i\sqrt{a_2})^3} + \frac{a_4}{(i\sqrt{a_2})^4} + \ldots + \frac{a_n}{(i\sqrt{a_2})^n}\right|.$$

Ce théorème entraîne le suivant, qui a moins de portée, mais qui est plus commode :

L'équation est irréductible si l'on a

$$\sqrt{a_2} \geqq 4^{n-1}(|a_1| + |a_3| + \ldots + |a_n|);$$

si n *est au moins égal à* 5, *le coefficient* 4^{n-1} *peut être remplacé par* $\left(\frac{7}{2}\right)^n$.

Les méthodes de l'auteur peuvent aussi s'appliquer aux équations dont les

coefficients sont des fonctions rationnelles d'une ou plusieurs variables. C'est ainsi que l'équation

$$f(x, y) = y^n + g_1(x) y^{n-1} + \ldots + g_{n-1}(x) y + g_n(x) = 0$$

où les $g_i(x)$ sont des fonctions rationnelles entières de x, est irréductible dans les deux cas suivants :

1° Si $g_1(x)$ est de degré supérieur à tous les autres $g_i(x)$;

2° Si le degré de $g_1(x)$ est égal au plus haut des degrés des autres $g_i(x)$ et si de plus il n'existe aucune constante c telle que $f(x, c)$ soit identiquement nul.

Tome CXXXIII; 1908.

Thomé (*L.-W.*). — Sur les équations différentielles linéaires simultanées. (1-17).

L'auteur poursuit et achève les recherches indiquées dans le Mémoire portant le même titre et paru dans le Tome CXXXI du même *Journal*. Il s'agit de ramener l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires simultanées à celle d'un certain nombre d'équations différentielles linéaires à une seule fonction inconnue. Dans le Mémoire précédent l'auteur avait examiné le cas où l'on peut se ramener à une seule équation différentielle linéaire. Dans le cas général on est obligé de considérer une équation différentielle linéaire et homogène en même temps qu'un autre système d'équations linéaires simultanées, mais non homogènes. Ce dernier système peut être traité comme le système donné et ainsi de suite.

Si les coefficients des équations données sont rationnels ou dépendent rationnellement de x et d'une fonction algébrique de x, la nature des intégrales du système donné au voisinage d'un point singulier se déduit facilement de la nature des intégrales des différentes équations différentielles linéaires auxquelles le système se ramène.

Horn (*J.*). — Sur la représentation asymptotique des intégrales des équations différentielles linéaires. (19-67).

Dans ce Mémoire, qui fait suite à des Mémoires antérieurs sur le même sujet, l'auteur étudie la représentation asymptotique des intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{d^m y}{dx^m} + x^k P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + x^{(m-1)k} P_{m-1} \frac{dy}{dx} + x^{mk} P_m y = 0.$$

où les coefficients P_1, P_2, ..., P_m sont des fonctions de x holomorphes au voisinage de $x = \infty$; le nombre positif $k + 1$ s'appelle d'après Poincaré le *rang* de l'équation différentielle. L'auteur avait dans des travaux précédents étudié le cas où les P sont des fonctions rationnelles, h étant égal à 0 (*Math. Ann.*, t. XLIX et L), ou m étant égal à 2 (*Act. Math.*, t. XXIII). Dans le présent Mémoire il étudie le cas où les P ne sont plus des fonctions rationnelles, en se bornant aux cas ($m = 2$, $k = 0$), ($m = 3$, $k = 0$), ($m = 2$, $k \geqq 1$).

1. Si $k=0$, $m=2$, et si l'on pose

$$P_i = a_i + \frac{a'_i}{x} + \frac{a''_i}{x^2} + \dots \qquad (i=1,2)$$

l'équation différentielle est vérifiée, au moins si les racines α_1, α_2 de l'équation caractéristique

$$\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0,$$

sont distinctes, par deux développements en série de Thomé, en général divergents,

$$S_i = e^{\alpha_i x} x^{\rho_i}\left(1 + \frac{A_{i1}}{x} + \frac{A_{i2}}{x^2} + \dots\right) \qquad (i=1,2),$$

où

$$\rho_i = -\frac{a'_1\alpha_i + a'_2}{2\alpha_i + a_1}.$$

En désignant par $\varphi_i(x)$ la fonction obtenue en s'arrêtant dans S_i au terme en $\frac{1}{x^n}$, par $D_1(y) = y'' + p_1 y' + p_2$ le premier membre de l'équation différentielle qui admet φ_1 et φ_2 pour intégrales, enfin par $D_2(y)$ l'expression $(p_1 - P_1)y_i + (p_2 - P_2)y$, l'auteur forme une suite de fonctions u_0, u_1, u_2, ... par la loi de récurrence

$$D_1(u_{\nu+1}) = D_2(u_\nu) \qquad (u_0 = \varphi_i).$$

Le calcul de $u_{\nu+1}$ se fait par des quadratures; l'auteur prend un chemin d'intégration partant de l'infini dans une certaine direction et se terminant en x. Il suppose, ce qui est toujours permis, que la différence $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$ est réelle et positive.

2. Si l'on part de $u_0 = \varphi_1$ et si l'on suppose que x reste dans le domaine défini par les inégalités

$$|x| \geqq R, \qquad -\pi \leqq \arg x \leqq \pi,$$

où R désigne un nombre positif suffisamment grand, on prouve la convergence absolue et uniforme de la série

$$\eta_1 = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} u_\nu;$$

η_1 est une intégrale de l'équation donnée et elle est de la forme

$$\eta_1 = e^{\alpha_1 x} x^{\rho_1}\left(\Phi_1 + \frac{\gamma_1}{x^{n+1}}\right)$$

où Φ_1 est l'ensemble des n premiers termes entre parenthèses de la série S_1 et où γ_1 reste fini dans le domaine considéré. On démontre de même l'existence, dans le domaine défini par

$$|x| \geqq R, \qquad 0 \leqq \arg x \leqq 2\pi,$$

d'une intégrale

$$\eta_2 = e^{\alpha_2 x} x^{\rho_2}\left(\Phi_2 + \frac{\gamma_2}{x^{n+1}}\right)$$

jouissant de propriétés analogues.

3. Si l'on fait varier le nombre n, les intégrales η_1 et η_2 ne changent pas ; par suite, chacune, dans son domaine, est représentée asymptotiquement par la série S_1 ou S_2.

L'intégrale η_1 prolongée dans le domaine

$$|x| \geqq R, \quad -\frac{3\pi}{2} + \delta \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta \qquad \left(o \leqq \delta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

est encore représentée asymptotiquement par la série S_1 ; il en est de même de η_2 prolongée dans le domaine

$$|x| \geqq R, \quad -\frac{\pi}{2} + \delta \leqq \arg x \leqq \frac{5\pi}{2} - \delta \qquad \left(o \leqq \delta \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

4. L'auteur donne une limite supérieure du module de γ_1 et de γ_2 lorsque x varie respectivement dans les domaines

$$|x| \geqq \frac{R}{\sin\delta}, \quad -\frac{3\pi}{2} + \delta \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta,$$

$$|x| \geqq \frac{R}{\sin\delta}, \quad -\frac{\pi}{2} + \delta \leqq \arg x \leqq \frac{5\pi}{2} - \delta,$$

5. L'auteur indique les modifications qu'on pourrait faire subir au chemin d'intégration l sans que la méthode précédente cessât d'être applicable.

6. L'auteur passe au cas $k = o$, m quelconque et se place dans l'hypothèse où les m racines de l'équation caractéristique sont distinctes. Alors la même méthode d'approximations successives peut être appliquée en partant de la fonction obtenue en s'arrêtant, dans l'une des m séries de Thomé, au $n^{\text{ième}}$ terme. L'auteur se borne dans la suite au cas $m = 3$.

7. Si d'abord les trois racines α_1, α_2, α_3 sont situées sur une même droite, on peut supposer les différences $\alpha_2 - \alpha_1$ et $\alpha_3 - \alpha_2$ réelles et positives. On peut alors démontrer l'existence de quatre intégrales représentées asymptotiquement par les séries de Thomé, à savoir

η_1	par	S_1	dans le domaine	$-\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$,
η_2	»	S_2	»	$-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$,
η_2	»	S_2	»	$\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{5\pi}{2}$,
η_3	»	S_3	»	$-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{5\pi}{2}$.

8. Si α_1, α_2, α_3 ne sont pas en ligne droite, on peut supposer que la droite $\alpha_1\alpha_2$ est parallèle à l'axe imaginaire positif et que α_3 est à droite de cet axe. Soient $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ les angles du triangle $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$. On démontre alors l'existence

de 6 intégrales représentées asymptotiquement par les séries de Thomé, à savoir :

η_1	par	S_1	dans le domaine	$-2\pi+\mathfrak{S}_1 < \arg x < \pi$,
$\overline{\eta}_1$	»	S_1	»	$0 < \arg x < \pi+\mathfrak{S}_1$,
η_2	»	S_2	»	$-\pi < \arg x < 2\pi-\mathfrak{S}_2$,
$\overline{\eta}_2$	»	S_2	»	$-\pi-\mathfrak{S}_2 < \arg x < 0$,
η_3	»	S_3	»	$-2\pi-\mathfrak{S}_2 < \arg x < \mathfrak{S}_1$,
$\overline{\eta}_3$	»	S_3	»	$-\pi+\mathfrak{S}_1 < \arg x < \pi-\mathfrak{S}_2$.

9. L'auteur passe ensuite au cas d'un rang $k+1$ quelconque, l'ordre m étant égal à 2. Ici les séries normales de Thomé sont de la forme

$$S_i = e^{g_i(x)} x^{\rho_i}\left(1+\frac{A_{i1}}{x}+\frac{A_{i2}}{x^2}+\dots\right) \qquad (i=1,2)$$

où

$$g_i(x) = \alpha_i\frac{x^{k+1}}{x+1}+\alpha_{i1}\frac{x^k}{k}+\dots+\alpha_{ik}x.$$

On peut supposer $\beta=\alpha_2-\alpha_1$ réel et positif ; l'auteur applique alors la même méthode d'approximations successives.

10. L'auteur définit les chemins d'intégration qui servent à obtenir les quadratures qui se présentent dans l'application de la méthode. Il fait décrire à la variable d'intégration v le chemin défini par l'équation

$$v^{k+1} = x^{k+1}+w$$

où le point w décrit une droite partant de l'infini et arrivant à l'origine. Il démontre un certain nombre de lemmes.

11. Dans le domaine défini par les inégalités

$$|x| \geqq \frac{R}{\sqrt[k+1]{\sin\frac{\delta}{2}}}, \quad \frac{\left(2p-\frac{3}{2}\right)\pi+\delta}{k+1} \leqq \arg x \leqq \frac{\left(2p+\frac{3}{2}\right)\pi-\delta}{k+1} \qquad (p=0,1,\dots,k),$$

il existe une intégrale $\eta_1^{(p)}$ de l'équation différentielle de la forme

$$\eta_1^{(p)} = e^{g_1(x)}x^{\rho_1}\left(\frac{\Phi_1+\gamma_1^{(p)}}{x^{pc}}\right),$$

la quantité $\gamma_1^{(p)}$ restant finie dans le domaine.

12. Il y a un théorème analogue pour $\eta_2^{(p)}$. Finalement il existe $2(k+1)$ intégrales représentées asymptotiquement par les séries S_1 et S_2, l'intégrale $\eta_1^{(p)}$ dans le domaine

$$\frac{2p\pi}{k+1}-\frac{3\pi}{2(k+1)} < \arg x < \frac{2p\pi}{k+1}+\frac{3\pi}{2(k+1)},$$

l'intégrale $\eta_2^{(p)}$ dans le domaine

$$\frac{2p\pi}{k+1}-\frac{\pi}{2(k+1)} < \arg x < \frac{2p\pi}{k+1}+\frac{5\pi}{2(k+1)}.$$

Hazzidakis (*J.-N.*). — Sur les forces qui font décrire comme trajectoires des coniques. (68-76).

L'auteur donne une nouvelle solution du problème posé par Bertrand. Il arrive à cette propriété intéressante que si une force fait décrire au point auquel elle est appliquée une conique, quelle que soit la position initiale du point, et *pour deux directions différentes de la vitesse initiale*, il en est de même quelle que soit la direction de cette vitesse initiale.

Pirondini (*Geminiano*). — Sur la théorie générale des radiales et des anti-radiales. (77-92).

Étant donnée, sur une surface à courbure totale constante, une ligne L, on mène par un point fixe Ω de la surface une suite de vecteurs géodésiques égaux aux rayons de courbure géodésiques de la courbe L et tels que deux vecteurs géodésiques infiniment voisins fassent entre eux le même angle que les rayons géodésiques correspondants de la courbe L. Le lieu L_1 des extrémités des vecteurs géodésiques ainsi obtenus s'appelle la *radiale* de L ; inversement L est l'anti-radiale de L_1.

L'auteur définit, pour une courbe tracée sur une surface à courbure totale constante, trois systèmes de coordonnées intrinsèques. Dans le premier les coordonnées (s, V) sont l'arc de la courbe et le rayon vecteur géodésique issu d'un point fixe. Dans le second les coordonnées (V, ω) sont le rayon vecteur géodésique issu d'un point fixe et l'angle que fait ce rayon vecteur avec un rayon vecteur fixe. Dans le troisième les coordonnées (s, r) sont l'arc de la courbe et le rayon géodésique (compté entre la courbe et sa développée géodésique).

Cela étant, si la ligne L a pour équation

$$s = F(r),$$

la radiale L_1 a pour équation

$$\omega = \frac{1}{a}\int \frac{F'(V)}{\sin\frac{V}{a}}\,dV \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{1}{a}\int \frac{F'(V)}{\operatorname{sh}\frac{V}{a}}\,dV$$

suivant que la courbure de la surface est $\frac{1}{a^2}$ ou $-\frac{1}{a^2}$. Par exemple, sur une sphère, la ligne à torsion constante a pour radiale une loxodromie. Sur une surface à courbure constante positive la radiale d'une développante de cercle géodésique a pour équation

$$V = \frac{a}{\operatorname{tang} i}\,\omega.$$

Réciproquement si la ligne L_1 est représentée par l'équation

$$\omega = f(V),$$

son antiradiale L est représentée par l'une ou l'autre des équations

$$s = a\int f'(r)\sin\frac{r}{a}\,dr, \quad \text{ou} \quad s = a\int f'(r)\operatorname{sh}\frac{r}{a}\,dr.$$

2e Partie.

L'auteur applique ces formules à la recherche de l'anti-radiale d'une géodésique.

On peut donner des formules s'appliquant indifféremment aux trois familles de surfaces à courbure constante. Si la ligne L est représentée par $r = r(s)$, la radiale s'obtient en éliminant s entre les équations

$$V = r(s), \qquad s_1 = \int \sqrt{1 + r'^2(s)}\, ds.$$

Enfin l'auteur donne quelques méthodes applicables au plan et permettant de se débarrasser des signes de quadrature.

Appell (Paul). — Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement. (93-96).

L'auteur considère un système matériel soumis à des liaisons avec frottement mais satisfaisant à certaines hypothèses qui se trouvent réalisées dans la plupart des systèmes usuels. La quantité

$$\Phi = f_1 N_1 v_1 + f_2 N_2 v_2 + \ldots + f_p N_p v_p,$$

où les f sont les coefficients de frottement des solides en contact, les N les valeurs absolues des réactions de frottement et les v les valeurs des vitesses de glissement relatives des points matériels au contact dans les divers corps frottants associés deux à deux, tend vers zéro lorsque t augmente indéfiniment ; ou plutôt, quelque grand que soit θ, il y a des valeurs de t supérieures à θ pour lesquelles la quantité Φ devient aussi petite qu'on veut.

Voronoï (Georges). — Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Premier Mémoire : Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites. (97-178).

Hermite avait introduit dans la théorie des nombres un principe nouveau et fécond, qui consistait à faire correspondre à un ensemble (X) de systèmes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de valeurs entières de $x_1, \ldots, x_n$, un ensemble (R) de domaines continus, ramenant ainsi l'étude de l'ensemble (X) à l'étude de l'ensemble (R). Ce Mémoire est consacré à de nouvelles applications de ce principe, et spécialement à l'étude des propriétés du minimum arithmétique des formes quadratiques positives et de ses différentes représentations par des systèmes de nombres entiers.

Hermite a démontré que le minimum M d'une forme quadratique positive à n variables de déterminant D, ne dépasse pas la valeur $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n]{D}$. En réalité la fonction $\frac{M}{\sqrt[n]{D}}$ admet, du moins pour $n \geqq 4$, plusieurs maximums relatifs ; MM. Korkine et Zolotareff ont déterminé pour $n \leqq 5$ la valeur du maximum absolu et ils ont appelé *extrêmes* les formes quadratiques qui correspondent à un maximum relatif.

L'auteur étudie dans ce Mémoire des formes quadratiques positives qui com-

prennent, comme cas particulier, les formes extrêmes, et qu'il appelle *formes parfaites*.

Première Partie : *Théorie générale des formes quadratiques positives parfaites et des domaines qui leur correspondent*, — Une forme quadratique positive φ à n variables, de minimum M, est dite *parfaite* si elle est la seule forme quadratique prenant la valeur M pour les différents systèmes de valeurs des variables qui donnent à φ cette valeur M. Si une forme φ n'est pas parfaite, on peut trouver une forme quadratique φ_1 de même minimum, telle que toutes les représentations du minimum M de la forme φ soient aussi des représentations du minimum de φ_1, mais telle qu'elle en possède, en outre, au moins une autre représentation du minimum M. De là on déduit, de proche en proche, l'existence d'une forme quadratique parfaite (1-5).

Deux formes parfaites sont dites *équivalentes* si l'on peut passer de l'une à l'autre par une substitution linéaire à coefficients entiers et de déterminant ± 1. L'ensemble des formes parfaites équivalentes entre elles constitue une classe. Il existe un nombre fini de classes différentes de formes parfaites à n variables (6-7).

L'auteur va faire correspondre à chaque forme parfaite un domaine à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions, déterminé à l'aide d'inégalités linéaires. Aussi commence-t-il par étudier de tels domaines dans l'espace à m dimensions. Soient

$$y_k(x) \geqq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

les inégalités définissant un tel domaine R ; l'auteur se borne au cas où les équations $y_k(x) = 0$ n'admettent d'autre solution que $x_1 = \ldots = x_m = 0$. Si un certain nombre d'équations $y_k(x) = 0$ définissent une demi-droite (issue de l'origine) appartenant à R, cette droite s'appelle une *arête* du domaine R. Si le domaine est à m dimensions et possède s arêtes $(\xi_{1k}, \xi_{2k}, \ldots, \xi_{mk})$, tout point du domaine est défini par les formules

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=s} \rho_k \xi_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

avec

$$\rho_k \geqq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

On appellera face à μ dimensions du domaine R un domaine P(μ) formé des points appartenant à R et vérifiant une ou plusieurs des équations $y_k(x) = 0$, à condition que ces équations définissent un domaine à μ dimensions composé de points qui, tous, ne vérifient aucune autre des équations $y_k(x) = 0$. Chaque face est déterminée par un certain nombre t des arêtes de R, de la même manière que R est déterminé par ses s arêtes (8-13).

Si R est déterminé à l'aide des inégalités

$$p_{1k} x_1 + p_{2k} x_2 + \ldots + p_{mk} x_m \geqq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \sigma),$$

le domaine $\mathcal{R}$ déterminé par les formules

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=\sigma} \rho_k p_{ik} \qquad \text{où} \qquad \rho_k \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

est dit *corrélatif* du premier. Réciproquement le premier est corrélatif du second, et chaque face P_μ du premier est corrélative d'une face $P_{m-\mu}$ du second (14).

Cela étant, soit une forme quadratique parfaite positive φ, et soient

$$(l_{1k}, l_{2k}, \dots, l_{nk}) \qquad (k = 1, 2, \dots, s)$$

les s représentations du minimum M de φ. En posant

$$\lambda_k = l_{1k}x_1 + l_{2k}x_2 + \dots + l_{nk}x_n,$$

l'auteur fait correspondre à φ le domaine R de formes quadratiques, domaine de l'espace à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions, déterminé par l'égalité

$$f = \sum_{k=1}^{k=s} \rho_k \lambda_k^2 \qquad (\rho_k \geq 0)$$

Le domaine R est à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions et il possède s arêtes dont chacune correspond à l'une des représentations des minima de φ (15).

L'auteur introduit ici les formes quadratiques extrêmes. Il démontre que, pour qu'une forme quadratique φ soit extrême, il faut et il suffit qu'elle soit parfaite et que sa forme adjointe soit intérieure au domaine qui correspond à la forme donnée φ (16-18).

Deux domaines R et R' correspondant aux formes parfaites φ et φ' sont dits *équivalents*, si les formes φ et φ' sont équivalentes. L'ensemble (R) des domaines qui correspondent aux différentes formes parfaites φ se partage donc en un nombre fini de classes de domaines R. Si une forme quadratique f est intérieure à une face $P(\mu)$ du domaine R, elle n'appartient qu'aux domaines de l'ensemble (R) qui sont contigus par la face $P(\mu)$. Si en particulier à une face $P(\mu)$ de R appartient une forme quadratique *positive*, le nombre des domaines de l'ensemble (R) contigus par la face $P(\mu)$ est *fini* (19-21).

L'auteur démontre d'une manière plus précise qu'il n'existe qu'un seul domaine R' contigu au domaine R par une face P à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ dimensions. Soit φ la forme parfaite à laquelle correspond le domaine R et soient $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_t^2$ les arêtes de la face P ; soient enfin p_{ij} les coefficients définis par leségalités

$$\sum p_{ij} l_{ik} l_{jk} = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, t)$$

La forme parfaite φ' à laquelle correspond R' est donnée par la formule

$$\varphi' = \varphi + \rho \sum p_{ij} x_i x_j$$

où ρ est la plus petite valeur positive que prend la fonction

$$\frac{\varphi(x_1, \dots, x_n) - M}{-\sum p_{ij} x_i x_j}$$

quand on y donne aux x des valeurs entières rendant positif le dénominateur. Ce nombre ρ peut être obtenu par un nombre fini d'opérations (22-23).

Toute forme quadratique positive appartient au moins à un domaine de l'ensemble (R) (24).

On peut déterminer tous les domaines de l'ensemble (R) en partant d'un domaine particulier R, en cherchant tous les domaines $R_1, R_2, \ldots, R_\sigma$ contigus à R par une face à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ dimensions, en procédant pour chacun de ces nouveaux domaines comme pour le premier, et ainsi de suite. En ne conservant dans chaque opération que des domaines non équivalents entre eux, on arrivera à une série de domaines non équivalents entre eux, mais tels que tout domaine de (R) soit équivalent à l'un d'eux. Cette recherche est facilitée par la considération des substitutions qui laissent invariants les domaines de l'ensemble (R) (25-26).

Ce qui précède fournit une méthode de réduction des formes quadratiques positives. Toute forme quadratique positive sera dite *réduite* si elle appartient à un domaine quelconque

$$R, R_1, R_2, \ldots, R_{\sigma-1}$$

d'un système complet des représentants des différentes classes de l'ensemble (R). Une forme quadratique réduite ne peut être transformée en une autre forme réduite ou en elle-même qu'à l'aide d'une substitution laissant invariant un domaine ou une face des domaines de la série précédente (27-28).

SECONDE PARTIE. — *Quelques applications de la théorie générale à la recherche des formes quadratiques parfaites.*

L'auteur part de ce qu'il appelle la *forme parfaite principale*.

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n.$$

Cette forme est extrême. Elle possède $\frac{n(n+1)}{2}$ représentations de son minimum 1 ; le domaine R qui lui correspond est déterminé par les inégalités

$$a_{1k} + a_{2k} + \ldots + a_{nk} \geqq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$
$$-a_{ij} \geqq 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Elle possède $\frac{n(n+1)}{2}$ formes parfaites contiguës, mais elles sont toutes équivalentes entre elles ; l'une d'elles est

$$\varphi_1 = \varphi - x_1 x_2 ;$$

elle est équivalente à φ si $n = 2$ (29-31).

Les formes parfaites binaires ne forment qu'une classe ; d'après cela on pourra appeler *réduite* une forme quadratique positive

$$f = ax^2 - 2bxy + cy^2$$

si ses coefficients satisfont aux inégalités

$$a + b \geqq 0, \qquad -b \geqq 0, \qquad c + b \geqq 0$$

qui définissent le domaine R correspondant à φ.

Les formes parfaites ternaires ne forment également qu'une classe. Une forme positive réduite sera celle qui appartient au domaine R correspondant à la forme parfaite principale. Le domaine R peut être partagé en 24 parties équivalentes qui peuvent être transformées l'une en l'autre à l'aide des 24 substitutions adjointes à celles qui laissent invariante la forme principale. Une telle subdivision est inconnue pour $n > 3$ (32-33).

L'auteur étudie ensuite la forme parfaite $\varphi_1 = \varphi - x_1 x_2$. Cette forme est extrême, le groupe g_1 qui la laisse invariante est composé de $2^{n-1} n!$ substitutions, dans le cas $n \geqq 5$. Toutes les formes parfaites contiguës à la forme φ_1 sont équivalentes aux formes suivantes

$$\varphi_1 - \rho x_1 x_3,$$

$$\varphi_1 + \rho (x_1 x_2 - \delta_{23} x_2 x_3 - \ldots - \delta_{n-1,n} x_{n-1} x_n) \qquad (\delta_{ij} = 0 \text{ ou } 1).$$

L'auteur se borne, dans le cas général, à étudier la forme $\varphi_1 - \rho x_1 x_3$; il détermine la valeur de ρ pour chaque valeur de n ; pour $4 \leqq n \leqq 8$, cette valeur est égale à 1 ; pour $n = 12$, on obtient une forme parfaite pour laquelle le rapport $\frac{M}{\sqrt[n]{D}}$ est supérieur à 2 : c'est le premier exemple d'une forme parfaite jouissant de cette propriété (34-42).

L'auteur revient à des cas particuliers. Si $n = 4$ il n'y a que deux classes de formes parfaites, représentées par φ et φ_1. Si $n = 5$, il y a trois classes représentées par φ, φ_1 et

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{1}{2}(x_1 x_2 - x_3 x_4 - x_2 x_4 - x_4 x_5);$$

ces formes ont le même maximum 1 et des déterminants respectivement égaux à $\frac{6}{2^5}$, $\frac{4}{2^5}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \frac{1}{2^5}$ (43-45).

Kœnigsberger (*Leo*). — Sur l'élimination des variables entre les équations de Lagrange en Dynamique. (179-242).

Le problème dont s'occupe l'auteur a pour objet de chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'élimination d'un certain nombre de paramètres entre les équations de Lagrange qui correspondent à un potentiel cinétique du premier ordre conduise encore, pour les paramètres restants, à des équations de Lagrange correspondant à un potentiel cinétique du premier ordre ou d'ordre supérieur.

1. Les équations de Lagrange, pour un système de n points soumis à des liaisons, sont dites *correspondre* à un potentiel H du $\nu^{\text{ième}}$ ordre si elles expriment qu'on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left\{ \left[-\frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_i'} - \ldots + (-1)^{\nu+1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(\nu)}} - X_i \right] \delta x_i + \ldots \right.$$
$$\left. + \left[-\frac{\partial H}{\partial z_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial z_i'} - \ldots + (-1)^{\nu+1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial z_i^{(\nu)}} - Z_i \right] \delta z_i \right\} = 0$$

pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons qui existent à l'in-

stant t : les fonctions H, X_i, Y_i, Z_i dépendant de t, des x_i, y_i, z_i et de leurs dérivées jusqu'au $\nu^{\text{ième}}$ ordre.

Si la position du système dépend de μ paramètres indépendants $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, les équations de Lagrange sont de la forme

$$-\frac{\partial H}{\partial p_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_s} - \ldots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} = P_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu).$$

On retrouve les équations classiques si H est un potentiel cinétique du premier ordre ; dans la Mécanique ordinaire, H est un polynome entier du second degré en $p'_1, p'_2, \ldots, p'_\mu$.

2. Si l'on se donne un système de μ équations différentielles du second ordre en $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, la variable indépendante étant t, ce système ne peut pas en général se mettre sous la forme

$$-\frac{\partial H}{\partial p_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_s} = 0,$$

H étant un potentiel cinétique de la Mécanique ordinaire. En particulier si $\mu = 1$, il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que l'équation donnée

$$f(t, p, p')\,p'' + f_1(t, p, p') = 0$$

jouisse de la propriété que le rapport $\frac{f_1}{f}$ soit un polynome du deuxième degré en p'

$$\frac{f_1}{f} = \Omega_1(t, p)p'^2 + \Omega_2(t, p)p' + \Omega(t, p),$$

dont les coefficients satisfassent à la relation

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial p} = 2\,\frac{\partial \Omega_1}{\partial t}.$$

Des conditions analogues existent dans le cas $\mu = 2$.

3. Étant données $\rho + \sigma = \mu$ équations de Lagrange

$$-\frac{\partial H}{\partial p_r} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_r} = P_r, \qquad -\frac{\partial H}{\partial q_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q'_s} = Q_s$$

$$(x = 1, 2, \ldots, \rho) \qquad (s = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

l'élimination des p conduit en général à σ équations différentielles d'ordre $2\rho+2$ en $q_1, \ldots, q_\sigma$. On peut se demander dans quel cas ces équations peuvent se mettre sous la forme d'équations de Lagrange correspondant à un potentiel d'ordre $\rho + 1$.

L'auteur prend en particulier le cas $\rho = \sigma = 1$, H ne dépendant pas de t. Si p''_1 (et par suite p'_1) n'entre pas dans la première équation, si de plus p_1 n'entre pas dans P_1 et P_2, l'équation différentielle du quatrième ordre en p_2 a toujours la forme d'une équation de Lagrange. Si au contraire la seconde équation ne contient pas p'_1 et p''_1, P_1 et P_2 étant constants, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation en p_2 résultant de l'élimination de p_1 soit une équation de Lagrange correspondant à un potentiel cinétique du second ordre est que H soit

de la forme

$$H = a_1 p_1'^2 + a_2 p_2'^2 + \varphi(p_1 - \lambda_1 p_2) + \psi(p_1 - \lambda_2 p_2) \qquad \left(\lambda_1 \lambda_2 = \frac{a_2}{a_1}\right).$$

4. Revenons au cas général de $\rho + \sigma$ équations. Si les équations relatives aux paramètres p ne contiennent pas les dérivées du premier et du second ordre de p, l'élimination des p conduit pour les q à σ équations différentielles du quatrième ordre, qui sont équivalentes à σ équations de Lagrange correspondant à un potentiel cinétique du second ordre. Si en outre les équations relatives aux q ne contiennent pas $p''_1, \ldots, p''_\rho$, l'élimination des p conduit à σ équations différentielles du second ordre, qui sont équivalentes à σ équations de Lagrange correspondant à un potentiel cinétique du premier ordre.

Si les équations de Lagrange données ne contiennent pas les paramètres p, les premières ne contenant pas non plus les p'', les équations résultant de l'élimination des p ne possèdent pas en général la forme de Lagrange.

Si les équations données ne contiennent ni les p, ni les p', l'élimination des p'' conduit à σ équations différentielles du second ordre qui possèdent la forme des équations de Lagrange pour un potentiel cinétique du premier ordre.

L'auteur examine enfin le cas où quelques-uns des groupes des p, p', p'' manqueraient dans les équations relatives aux q, ou bien en partie dans les équations relatives aux p et dans les équations relatives aux q.

5. L'élimination de certains paramètres peut encore se faire par suite d'intégrations évidentes.

Si les P sont des fonctions de t, et si les $\frac{\partial H}{\partial p_\rho}$ sont des dérivées totales par rapport à t et de plus ne contiennent pas les p, l'élimination des p conduit, pour les q, à σ équations de Lagrange pour un potentiel du premier ordre. L'auteur applique ce théorème général à l'étude du mouvement d'un système formé de n points soumis à des forces admettant une fonction de forces U ne dépendant que des coordonnées de ces points, et auxquels on a adjoint un $(n+1)^{\text{ième}}$ point, soumis à aucune force, et dont les coordonnées sont liées à celles des n premiers points par une ou deux ou trois relations.

6. L'auteur examine enfin le cas où l'élimination se ferait en utilisant certaines relations entre les paramètres et leurs dérivées premières, qui seraient compatibles avec les équations de Lagrange données.

Jahnke (*E.*). — Sur les substitutions orthogonales et les relations différentielles entre les fonctions thêta de deux arguments. (243-283).

Le groupe des substitutions orthogonales de 4 variables joue, comme l'ont montré Caspary, Martin Krause et l'auteur lui-même, un rôle fondamental dans la théorie des fonctions thêta de deux arguments. On obtient les coefficients de la substitution orthogonale la plus générale de quatre variables en multipliant deux matrices de la forme

$$\begin{matrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_4 & \alpha_3 \\ -\alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & -\alpha_1 \end{matrix}$$

Si les deux matrices sont identiques, on obtient une matrice produit de la forme

$$\begin{matrix} Aa_{11} & Aa_{12} & Aa_{13} & 0 \\ Aa_{21} & Aa_{22} & Aa_{23} & 0 \\ Aa_{31} & Aa_{32} & Aa_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{matrix}$$

et les coefficients a_{ik} sont les coefficients de la substitution orthogonale la plus générale de déterminant 1 à 3 variables. Dans le cas général d'une substitution orthogonale à 4 variables, les 16 coefficients de la substitution forment ce que l'auteur appelle un système d'ordre 16 (Sechszehnersystem), tandis que les coefficients Aa_{ij} forment un système d'ordre 9 (Neunersystem).

Dans les n°s 1 et 3, l'auteur développe diverses méthodes permettant de déduire d'un système d'ordre 9 ou 16, par transformation infinitésimale de leurs paramètres, de nouveaux systèmes orthogonaux. Les n°s 2 et 3 contiennent des applications de ces résultats aux fonctions thêta générales de deux arguments.

Signalons, en particulier, un système orthogonal qui contient les fonctions p hyperelliptiques; si l'on multiplie chaque $p_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$ par la fonction $q_{\alpha\beta}$ correspondante (carré du quotient de deux fonctions thêta), les seize dérivées $n^{\text{ièmes}}$ des fonctions q, p, prises dans la disposition de Caspary, forment les coefficients d'un système orthogonal.

Au n° 4 l'auteur développe, en partant d'un théorème fondamental de Grassmann, les formules de multiplication entre quatre des systèmes d'ordre 16 qui peuvent être construits au moyen de quatre systèmes de quatre paramètres. Ces formules établissent des relations entre les systèmes orthogonaux fournis par les dérivées des fonctions thêta. L'auteur donne dans le n° 5 des applications aux fonctions q, p. Il indique d'abord huit représentations linéaires différentes de ce système de fonctions au moyen des carrés des thêta. Il montre ensuite qu'entre les fonctions q, p existe la même espèce de dépendance qu'entre les carrés des fonctions thêta, à savoir que chacune peut s'exprimer d'une manière linéaire et homogène en fonction de quatre d'entre elles. De plus les relations de Rosenhain et de Göpel entre les carrés des fonctions thêta ont lieu aussi entre les fonctions q, p, pourvu que les coefficients constants soient modifiés convenablement.

Dans le n° 6 l'auteur montre que la dépendance entre les fonctions q, p est plus spéciale qu'entre les carrés des fonctions thêta, car elle comporte huit relations linéaires de plus. On obtient ces relations sous forme homogène (n° 7) en introduisant à la place des fonctions q, p le système orthogonal des fonctions j:

$$j_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = q_{\alpha\beta}(x_1, x_2)\, p_{\alpha\beta}(x_1, x_2) + \frac{c_{\alpha\beta}\, c''_{\alpha\beta} - c'^2_{\alpha\beta}}{c_5^2};$$

les relations de Rosenhain et de Göpel qui existent entre les fonctions q, p existent sans changement entre les fonctions j. On peut de deux manières différentes représenter chaque fonction j par trois d'entre elles linéairement indépendantes. Géométriquement parlant la dépendance entre les fonctions j correspond à une configuration de seize points, qui est une dégénérescence dans le plan de la configuration de Kummer.

Réthy (*Moritz*). — Sur la stabilité et l'instabilité d'un point matériel dans un milieu résistant. (284-288).

L'auteur démontre le théorème suivant, qui se rattache à des recherches antérieures de M. Fejér (même Journal, t. CXXXI):

Soit un point matériel libre soumis à une force admettant une fonction des forces U. On suppose que U présente en un point G un minimum isolé tel que les termes de plus bas degré du développement de Taylor de la fonction U, constituent une forme définie positive. On suppose de plus que le point est soumis à une résistance de milieu $f(v)$ opposée à la vitesse, $f(o)$ étant nul, et le rapport $\frac{f(v)}{v}$ restant, pour de petites valeurs de v, inférieur à un nombre fixe, ou bien augmentant constamment et devenant infini quand v tend vers o en décroissant. Dans ces conditions, la position d'équilibre G est instable.

Jung (*Heinrich-W.-E.*). — Représentation des fonctions d'un corps algébrique de deux variables indépendantes x, y au voisinage d'un point $x=a$, $y=b$. (289-314).

Soit un corps algébrique K de deux variables indépendantes x et y défini par une équation $f(x, y, z)=o$. M. Hensel, dans un article paru dans les *Acta mathematica* (t. XXIII, 1900), s'est occupé de la représentation des fonctions du corps au voisinage d'une courbe irréductible $A(x, y)=o$. L'auteur s'occupe ici de la représentation de ces fonctions au voisinage d'un point (a, b), qu'on peut toujours supposer être le point (o, o). Le résultat fondamental est le suivant:

On peut toujours trouver deux fonctions u et v du corps K telles que x et y soient des séries ordinaires de puissances de u et de v, s'annulant pour $u=v=o$ tandis que toutes les autres fonctions de K sont ou bien des séries ordinaires de puissances de u ou de v, ou bien des quotients de telles séries. Il suffit d'un nombre fini de couples de fonctions u et v et de développements pour représenter les fonctions de K dans tout le voisinage du point (o, o).

I. *Les fonctions de* K *au voisinage de* $x=o$, $y=o$. — Le polynome $f(z, x, y)$ peut être décomposé en un produit de facteurs $F, F_1, \ldots, F_{\lambda-1}$, chacun étant rationnel et entier en z et ayant des coefficients développables en séries de puissances de x et de y au voisinage de l'origine, les différents facteurs F_i étant indécomposables en d'autres facteurs de même espèce. Il suffit de considérer une branche de z annulant F par exemple. Pour chaque valeur de x assez petite ($|x|<r$), la fonction z de y peut être représentée sur une surface de Riemann dont on ne considérera que les points pour lesquels $|y|<s$, r et s étant deux nombres fixes pris assez petits. La portion $\overline{R}$ considérée de la surface de Riemann, peut se décomposer en plusieurs parties connexes $R, R^{(1)}, \ldots$, qui s'échangent entre elles quand x décrit un chemin fermé.

Si R est une des parties de $\overline{R}$ et si $t_1(x), t_2(x), \ldots, t_\rho(x)$ sont les points de ramification de R, l'auteur considère la fonction rationnelle entière de plus bas degré $P(x, y)$ qui contient les facteurs $y-t_1(x), \ldots, y-t_\rho(x)$. Il pose alors $D=xP$ dans le cas où les termes de plus bas degré de P sont divisibles par x et où $x=o$ est une courbe de ramification; il pose $D=P$ dans les autres cas. La fonction D ainsi définie est la fonction de ramification relative à $R(x)$.

Si les termes de plus bas degré de D sont de degré μ, le nombre μ est dit le rang de ramification de R.

II. *Les cas les plus simples.* — L'auteur étudie d'abord le cas de $\mu = 0$ et de $\mu = 1$.

Si $\mu = 0$, R n'a pas de point de ramification.

Si $\mu = 1$, $D = P$. On peut alors se ramener au cas où la branche considérée z n'a, comme courbe de ramification, au voisinage de (o, o), que $x = 0$ et $y = 0$ (ou l'une des deux seulement). Par une analyse arithmétique simple, l'auteur montre qu'on peut trouver deux quantités u et v telles que x et y soient chacun de la forme u^α, v^β, α et β étant entiers, z étant développable en une série de puissances en u et v. Pour représenter toutes les déterminations de z, il se peut qu'on soit obligé de recourir à un nombre fini de choix différents de u et de v. On peut enfin toujours s'arranger pour que les u et les v appartiennent au corps K lui-même.

III. *Le cas général.* — Si μ est supérieur à 1, l'auteur se ramène au cas $\mu = 0$ ou 1, par une suite de transformations birationnelles.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXXIV.

40183 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.



TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS

TOME XXXIV; 1910. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXXIV.

46856 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.